5.1. 22 dicembre 2006

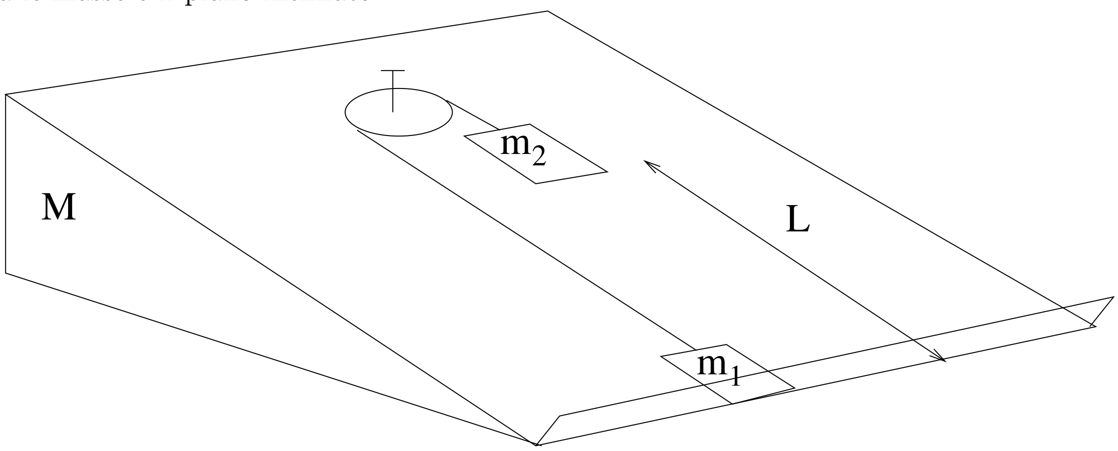
Primo problema (15 punti)

Le due masse in figura somo $m_1 = m_2 = m$. Quella a sinistra si muove inizialmente con velocità v_0, l'altra è ferma. La molla ha lunghezza a riposo ℓ e costante elastica k, ed è libera ad un estremo.

1. Per quali valori v_0 le due masse non arrivano a toccarsi?
2. Calcolare la velocità delle masse quando queste sono di nuovo separate.
3. Se la velocità iniziale è sufficiente a far toccare le massa, e queste rimangono attaccate, calcolare la velocità finale del sistema.

Secondo problema (15 punti)

Un cuneo di massa M a forma di prisma triangolare di apertura angolare θ è libero di muoversi sul piano orizzontale su cui è appoggiato. Sul cuneo si trovano due masse m_1 e m_2 ($m_2 > m_1$), collegate tra loro da un filo inestensibile di massa nulla come mostrato in figura. Il filo scorre senza attrito su un perno solidale al piano inclinato. Non vi è attrito tra le masse e il piano inclinato.



1. Se il cuneo è mantenuto immobile, determinare il moto delle masse m_1 e m_2(lasciate andare da ferme).
2. Se il cuneo è libero di muoversi senza attrito sul piano orizzontale, determinare il suo spostamento quando la massa m_2 raggiunge il bordo.
3. In presenza di attrito statico μ_s tra il cuneo e il piano orizzonale, determinare il valore minimo affinchè il cuneo resti immobile durante la discesa di m_2.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Cerchiamo sotto quali condizioni le masse si toccano. Possiamo utilizzare la conservazione dell'energia e della quantità di moto. Uguagliando il valore iniziale di queste quantità a quello posseduto al momento del contatto abbiamo

$$m_1 v_0 \geq (m_1 + m_2) v_2$$

e

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 \geq \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_2^2 + \frac{1}{2} k \ell^2 \,.$$

Si è utilizzato il fatto che al momento del contatto $v_2 \leq v_1$, e la molla è completamente contratta. Ricavando v_f dalla prima relazione si trova

$$v_2 \leq \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0$$

e sostituendo nella seconda

$$m_1 v_0^2 \geq \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_2^2 + k \ell^2$$

da cui

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{k}{\mu}} \ell$$

dove $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2) = m/2$ è la massa ridotta del sistema. Le masse non arriveranno dunque a toccarsi per

$$v_0 < \sqrt{\frac{k}{\mu}} \ell \,.$$

Domanda 2

Si tratta di un urto elastico, e dato che le masse sono uguali deve essere

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

ossia $v_1 = 0$ e $v_2 = v_0$ se $m_1 = m_2 = m$.

Domanda 3

Anche in questo caso possiamo vedere il problema come un urto, questa volta completamente anelastico. Sarà ovviamente

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_f \,.$$

Avremo quindi ($m_1 = m_2 = m$)

$$v_f = \frac{1}{2} v_0 \,.$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Consideriamo le forze che agiscono sulle due masse lungo la direzione parallela al piano. Per la prima abbiamo

$$m_1 a_1 = m_1 g \sin\theta - T$$

e per la seconda

$$m_2 a_2 = m_2 g \sin\theta - T \,.$$

Abbiamo preso come verso positivo per le accelerazioni di entrambe le masse quello verso lo spigolo del cuneo. Sottraendo membro a membro abbiamo

$$m_1 a_1 - m_2 a_2 = (m_1 - m_2) g \sin\theta$$

ma $a_2 = -a_1$ da cui

$$a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \sin\theta < 0 \,.$$

Le due masse quindi si muovono di moto uniformemente accelerato. Partendo da fermi e misurando lo spostamento a partire dalla posizione iniziale di ciascuna massa abbiamo

$$s_1 = \frac{1}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \sin\theta \, t^2$$

$$s_2 = \frac{1}{2} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \sin\theta \, t^2$$

Domanda 2

La quantità di moto orizzontale del sistema si conserva. Questo significa che la posizione orizzontale del centro di massa non cambia, dato che inizialmente è ferma. Possiamo dunque scrivere

$$\frac{M X_0 + m_1 x_1 + m_2 x_2}{M + m_1 + m_2} = \frac{M\left(X_0 + \Delta\right) + m_1\left(x_1 + \delta_1\right) + m_2\left(x_2 + \delta_2\right)}{M + m_1 + m_2}$$

dove X_0, x_1 e x_2 sono le coordinate orizzontali iniziali del centro di massa del cuneo e delle due masse, e Δ, δ_1, δ_2 i relativi spostamenti finali, il tutto nel sistema di riferimento del laboratorio. D'altra parte lo spostamento orizzontale finale della massa m_2 è noto

$$\delta_2 - \Delta = L\cos\theta$$

e per l'inestensibilità del filo deve essere

$$\delta_2 - \Delta = -\left(\delta_1 - \Delta\right) .$$

Ricavando δ_1, δ_2 da queste ultime due relazioni otteniamo

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \Delta + L\cos\theta \\ \delta_1 &= \Delta - L\cos\theta \end{aligned}$$

e sostituendo nella prima abbiamo

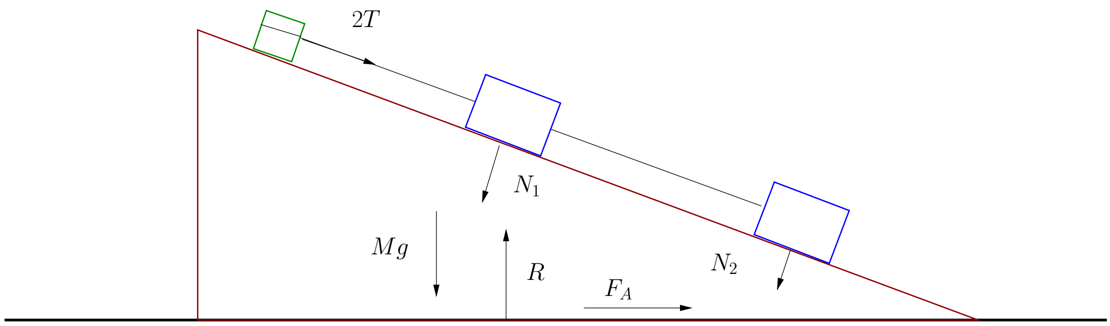
$$M\Delta + m_1\left(\Delta - L\cos\theta\right) + m_2\left(\Delta + L\cos\theta\right) = 0$$

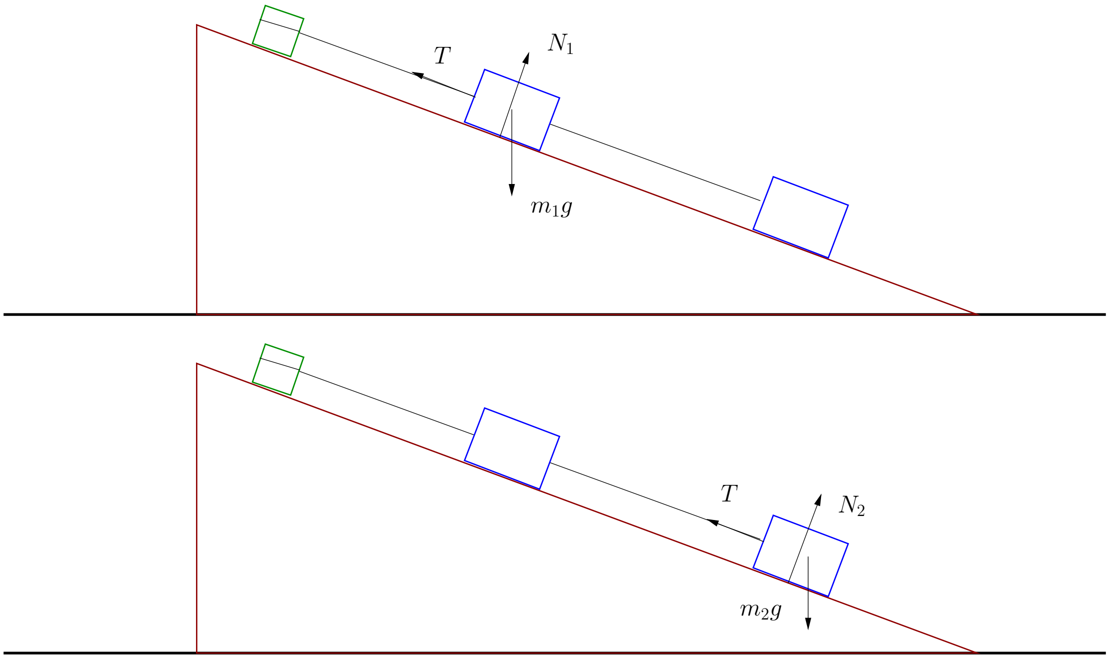
da cui

$$\Delta = \frac{(m_1 - m_2)L\cos\theta}{M + m_1 + m_2} .$$

Domanda 3

Facciamo riferimento ai diagrammi delle forze agenti sul cuneo e sulle due masse riportati qui sotto. Indichiamo con T la tensione del filo, con N_1 e N_2 le reazioni vincolari del piano obliquo, con R la reazione vincolare del piano orizzontale e con F_A la forza di attrito.





Scriviamo le equazioni del moto per le masse e per il cuneo, nell'ipotesi che quest'ultimo resti fermo. Tenendo conto del fatto che

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= -\ddot{y}_2 \\ \ddot{x}_1 &= -\ddot{x}_2 \,.\end{aligned}$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned}m_1\ddot{x}_1 &= N_1 \sin\theta - T\cos\theta & (5.1.1)\\ m_1\ddot{y}_1 &= N_1\cos\theta + T\sin\theta - m_1 g & (5.1.2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-m_2\ddot{x}_1 &= N_2 \sin\theta - T\cos\theta & (5.1.3)\\ -m_2\ddot{y}_1 &= N_2\cos\theta + T\sin\theta - m_2 g & (5.1.4)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}0 &= -(N_1+N_2)\sin\theta + 2T\cos\theta + F_A & (5.1.5)\\ 0 &= R - Mg - (N_1+N_2)\cos\theta - 2T\sin\theta \,. & (5.1.6)\end{aligned}$$

Dato che

$$\frac{\ddot{y}_1}{\ddot{x}_1} = \frac{\ddot{y}_2}{\ddot{x}_2} = -\tan\theta$$

dividendo membro a membro le equazioni (5.1.1), (5.1.2) e (5.1.3), (5.1.4) otteniamo

$$N_1 = m_1 g\cos\theta$$

$$N_2 = m_2 g \cos\theta$$

Dalle equazioni del moto per le masse abbiamo

$$\left(\frac{N_1}{m_1} + \frac{N_2}{m_2}\right) \sin\theta - T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \cos\theta = 0$$

$$\left(\frac{N_1}{m_1} + \frac{N_2}{m_2}\right) \cos\theta + T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \sin\theta = 2g$$

da cui ($\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$)

$$T = 2g\mu \sin\theta\,.$$

Sostituendo nella equazione (5.1.6) troviamo

$$R = Mg + (m_1 + m_2) g \cos^2\theta + 4g\mu \sin^2\theta$$

e tenendo conto che deve essere $|F_A| \leq \mu_s R$ abbiamo infine

$$[(m_1 + m_2) - 4\mu] \left|\cos\theta \sin\theta\right| \leq \mu_s \left[M + (m_1 + m_2)\cos^2\theta + 4\mu \sin^2\theta\right]$$

ossia

$$\mu_s \geq \frac{(m_1 - m_2)^2 \cos\theta \sin\theta}{M(m_1 + m_2) + (m_1 + m_2)^2 \cos^2\theta + 4 m_1 m_2 \sin^2\theta}\,.$$