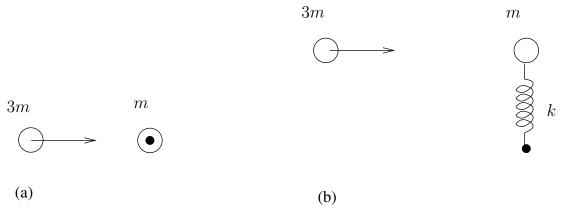
5.2. 19 dicembre 2008

Problema 1 (15 punti)



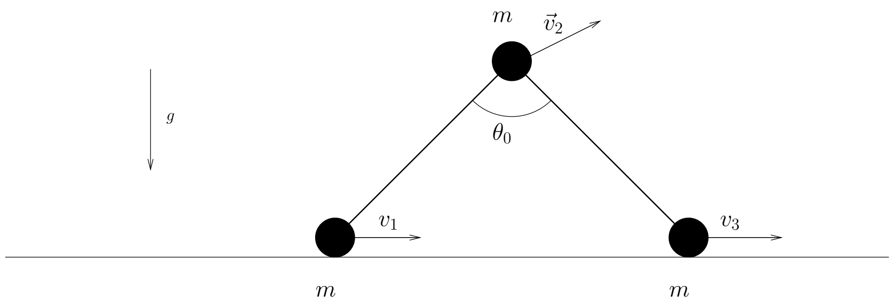
Un proiettile urta come in figura (a) un bersaglio tenuto da una molla di lunghezza nulla e costante elastica k. Il proiettile ha massa tripla del bersaglio, e l'urto ha una durata trascurabile.

1. Si calcoli la velocità di bersaglio e proiettile appena dopo l'urto nel caso di urto completamente anelastico.

2. Si calcoli la massima elongazione della molla.

3. Ora il bersaglio è tenuto fermo a distanza ℓ dalla posizione di equilibrio al momento dell'urto, in maniera che la molla sia perpendicolare alla velocità del proiettile come in figura (b). Si calcoli il momento angolare del sistema dopo l'urto e quindi la massima elongazione della molla.

Problema 2 (15 punti)



Le tre masse identiche in figura sono collegate da due aste di lunghezza ℓ e massa trascurabile come in figura. Quelle agli estremi sono inoltre vincolate a scorrere su un piano orizzontale, mentre l'angolo tra le due aste può variare liberamente, e vale inizialmente θ_0.

1. Se $v_1(0) = V$ e $v_3(0) = 0$ determinare la velocità iniziale della massa intermedia $\vec{v}_2(0)$.

2. Nel caso $v_1(0) = v_3(0) = 0$ determinare la velocità $\vec{v}_2$ quando la massa intermedia urta il piano.

3. Se $v_3(0) = 0$, determinare il minimo valore di $v_1(0)$ che permette alle masse agli estremi di toccarsi.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Dato che l'urto è istantaneo la molla non cambia la sua lunghezza mentre questo avviene e può essere ignorata. Nell'urto si conserva la quantità di moto, e la velocità di proiettile e bersaglio dopo l'urto è la stessa. Di conseguenza

$$\begin{aligned} 3mv_0 &= 4mV_x \\ 0 &= 4mV_y \end{aligned}$$

cioè $V_y = 0$ e $V_x = 3V_0/4$.

Domanda 2

Dopo l'urto si conserva sia l'energia che la quantità di moto. Confrontando l'energia iniziale e quella al momento della massima elongazione otteniamo

$$\frac{1}{2}4m\left(\frac{3}{4}V_0\right)^2 = \frac{1}{2}k\ell^2$$

da cui

$$\ell = \sqrt{\frac{9}{4}\frac{m}{k}}V_0$$

Domanda 3

Anche questa volta la molla può essere ignorata durante l'urto, e la velocità finale delle due masse è la stessa calcolata precedentemente. Il momento angolare rispetto all'estremo vincolato della molla è uguale a quello iniziale, dato che si conserva nell'urto, e vale

$$L = -3mv_0\ell$$

Si può verificare questo anche con un calcolo diretto:

$$L = -4mV_x\ell$$

Successivamente all'urto si conserva sia l'energia che il momento angolare. Quindi possiamo scrivere l'energia in termini di potenziale efficace, come

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{k}{2}r^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$$

dove r è la lunghezza della molla. Dalla conservazione dell'energia otteniamo al momento della massima elongazione (notare che inizialmente la velocità radiale è nulla)

$$\frac{k}{2}\ell^2 + \frac{L^2}{2m\ell^2} = \frac{k}{2}\ell_{max}^2 + \frac{L^2}{2m\ell_{max}^2}$$

e quindi

$$\frac{km}{L^2}\left(\ell^2 - \ell_{max}^2\right) = \left(\frac{1}{\ell_{max}^2} - \frac{1}{\ell^2}\right)$$

Scartando la soluzione banale $\ell_{max} = \ell$, che corrisponde alla condizione iniziale, otteniamo

$$\ell_{max} = \frac{|L|}{\sqrt{km\ell}} = \frac{3v_0}{\omega}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Anzitutto

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 - 2\ell\sin\frac{\theta}{2} \\ x_2 &= x_3 - \ell\sin\frac{\theta}{2} \\ y_2 &= \ell\cos\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

e quindi inizialmente

$$\begin{aligned} v_1 &= -\ell\dot{\theta}_0\cos\frac{\theta_0}{2} \\ v_{2x} &= -\frac{\ell}{2}\dot{\theta}_0\cos\frac{\theta_0}{2} \\ v_{2y} &= -\frac{\ell}{2}\dot{\theta}_0\sin\frac{\theta_0}{2} \end{aligned}$$

dato che la terza massa è ferma. Segue che

$$\begin{aligned} v_{2x} &= \frac{V}{2} \\ v_{2y} &= \frac{V}{2}\tan\frac{\theta_0}{2} \end{aligned}$$

Domanda 2

Dalla conservazione della quantità di moto orizzontale e dell'energia abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= 3mv_x \\ mg\ell\cos\frac{\theta_0}{2} &= \frac{1}{2}3mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_{2y}^2 \end{aligned}$$

dove v_x è la velocità finale orizzontale comune alle tre masse. Segue che $v_{2x} = 0$ e

$$v_{2y} = -\sqrt{2mg\ell\cos\frac{\theta_0}{2}}$$

Domanda 3

Le velocità iniziali sono le stesse trovate nel primo problema. Per le velocità finali deve essere

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{2x} = v_3 \\ v_{2y} &= 0 \end{aligned}$$

Dalla conservazione di energia e quantità di moto orizzontale abbiamo adesso

$$\begin{aligned} mV + m\frac{V}{2} &= 3mv_3 \\ \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{V^2}{4} + \frac{V^2}{4}\tan^2\frac{\theta_0}{2}\right) + mg\ell\cos\frac{\theta_0}{2} &= \frac{1}{2}3mv_3^2 + mg\ell \end{aligned}$$

e risolvendo troviamo

$$V = \frac{4\sin\frac{\theta_0}{4}}{\sqrt{2 + \tan^2\frac{\theta_0}{2}}}\sqrt{g\ell}$$