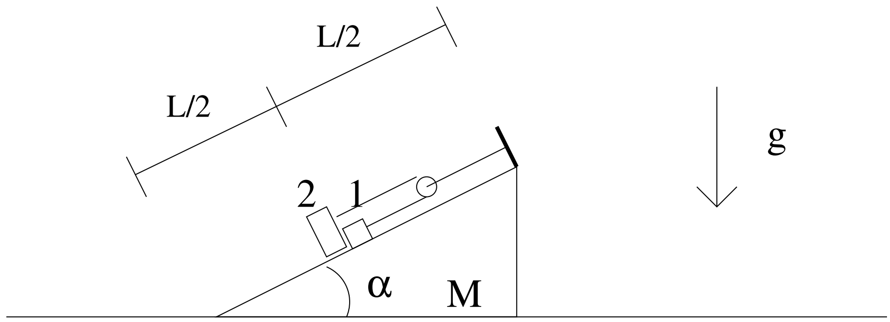
## 5.3. 18 dicembre 2009

### Problema 1 (15 punti)




Si consideri il sistema in figura: un cuneo di massa $M$ inclinato di un angolo $\alpha$ è appoggiato su un piano orizzontale. Tra la superficie orizzontale e il cuneo è presente attrito statico sufficiente a mantenerlo fermo. Sul cuneo sono appoggiate due masse $m_1$ e $m_2$, con $m_2 > m_1$, attaccate ai due estremi di un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza $L$, che passa in una carrucola a sua volta attaccata all'estremo superiore del cuneo. Si trascuri l'attrito tra i due corpi e il cuneo, e si considerino i due corpi come punti materiali, inizialmente non in contatto tra di loro, ma appena appoggiati l'un l'altro.

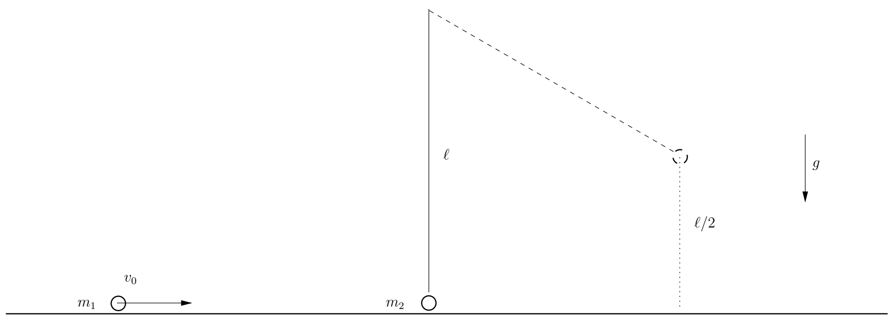
1. Determinare la tensione del filo.

2. Determinare il minimo coefficiente di attrito statico tra il cuneo e il piano orizzontale affinché il cuneo non si muova.

   Si supponga adesso che tra il piano orizzontale ed il cuneo non ci sia attrito e che quindi il cuneo sia libero di muoversi orizzontalmente. All'istante iniziale i due corpi sono tenuti fermi ad una distanza dalla fine del cuneo pari alla metà della lunghezza del filo, e sono appena appoggiati l'un l'altro. Il cuneo è fermo.

3. Determinare la velocità del cuneo quando il corpo 2 è arrivato a terra.

### Problema 2 (15 punti)



Il pendolo in figura è formato da una massa $m_2$ appesa ad un filo inestensibile e di massa nulla di lunghezza $\ell$. Viene colpito da una massa $m_1$ che si muove inizialmente con velocità $v_0$ su un piano orizzontale privo di attrito. Per rispondere a tutte le domande che seguono si assuma che l'urto avvenga in un tempo molto breve, e che in esso venga dissipata la massima quantità possibile di energia $W_{MAX}$.

- Calcolare per quale velocità $v_0^*$ il pendolo riesce a sollevarsi di $\ell/2$ da terra.
- Determinare $W_{MAX}$.
- Per $v_0 > v_0^*$ determinare la tensione del filo quando la massa si è sollevata di $\ell/2$, nell'ipotesi che le due masse siano rimaste attaccate dopo l'urto.

## Soluzione primo problema

### Domanda 1

Le equazioni del moto nelle direzioni parallele al piano inclinato si scrivono

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= T - m_1 g \sin\alpha \qquad (5.3.1)\\ m_2 a_2 &= T - m_2 g \sin\alpha \qquad (5.3.2) \end{aligned}$$

ed inoltre per l'inestensibilità del filo $a_1 + a_2 = 0$. Dividendo per le masse e sommando membro a membro abbiamo

$$a_1 + a_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) T - 2g \sin\alpha \qquad (5.3.3)$$

ed usando l'inestensibilità

$$T = 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \sin\alpha \qquad (5.3.4)$$

### Domanda 2

Le reazioni vincolari applicate alle masse si determinano dalla condizione di accelerazione nulla per la particella nella direzione normale al piano:

$$\begin{aligned} N_1 &= m_1 g \cos\alpha \qquad (5.3.5)\\ N_2 &= m_2 g \cos\alpha \qquad (5.3.6) \end{aligned}$$

Anche il cuneo non deve avere accelerazioni verticali, e questo permette di calcolare $R$

$$\begin{aligned} R &= N_1 \cos\alpha + N_2 \cos\alpha + 2T \sin\alpha + Mg \qquad (5.3.7)\\ &= (m_1 + m_2)\, g \cos^2\alpha + 4g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \sin^2\alpha + Mg \qquad (5.3.8)\\ &= \frac{(m_1 + m_2)^2 \cos^2\alpha + 4 m_1 m_2 \sin^2\alpha + M (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)} g \qquad (5.3.9) \end{aligned}$$

Consideriamo adesso le forze orizzontali applicate al cuneo. Deve essere

$$F_a + (N_1 + N_2)\sin\alpha - 2T\cos\alpha = 0 \tag{5.3.10}$$

da cui

$$|F_a| = |2T\cos\alpha - (N_1 + N_2)\sin\alpha| \le \mu_s R \tag{5.3.11}$$

ossia

$$\mu_s \ge \frac{(m_1 - m_2)^2\cos\alpha\sin\alpha}{(m_1 + m_2)^2 + M(m_1 + m_2) - (m_1 - m_2)^2\sin^2\alpha} \tag{5.3.12}$$

### Domanda 3

In assenza di attrito si conserva l'energia e la quantità di moto orizzontale del sistema. Confrontando la configurazione iniziale e quella finale abbiamo per la prima

$$(m_1 + m_2)\, g\frac{\ell}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2}m_1\left(v_{x1}^2 + v_{y1}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(v_{x2}^2 + v_{y2}^2\right) + \frac{1}{2}MV^2 + m_1 g\ell\sin\alpha \tag{5.3.13}$$

perchè inizialmente tutte le velocità sono nulle e le due masse si trovano ad una altezza $h = \frac{1}{2}\ell\sin\alpha$, mentre alla fine la massa $m_1$ si trova ad una altezza $h = \ell\sin\alpha$ e la massa $m_2$ ad $h = 0$. Abbiamo quindi

$$m_1\left(v_{x1}^2 + v_{y1}^2\right) + m_2\left(v_{x2}^2 + v_{y2}^2\right) + MV^2 = (m_2 - m_1)\, g\ell\sin\alpha \tag{5.3.14}$$

Lo stesso confronto per la quantità di moto orizzontale dà

$$MV + m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = 0 \tag{5.3.15}$$

Inoltre a causa dell'inestensibilità del filo

$$v_{1y} = -v_{2y} \tag{5.3.16}$$

e la velocità delle due masse relativa al cuneo deve essere parallela al suo lato inclinato, quindi

$$v_{1y} = (v_{1x} - V)\tan\alpha \tag{5.3.17}$$

$$v_{2y} = (v_{2x} - V)\tan\alpha \tag{5.3.18}$$

Usando le ultime 4 relazioni lineari, possiamo esprimere tutte le velocità in termini della sola $V$:

$$v_{1x} = -\frac{M + 2m_2}{m_1 - m_2}V \tag{5.3.19}$$

$$v_{1y} = -v_{2y} = -\frac{(M + m_1 + m_2)}{m_1 - m_2}V\tan\alpha \tag{5.3.20}$$

$$v_{2x} = \frac{M + 2m_1}{m_1 - m_2}V \tag{5.3.21}$$

e sostituendo nella prima abbiamo

$$\left[(m_1+m_2)\frac{(M+m_1+m_2)^2}{(m_1-m_2)^2}\tan^2\alpha+m_1\frac{(M+2m_2)^2}{(m_1-m_2)^2}+m_2\frac{(M+2m_1)^2}{(m_1-m_2)^2}+M\right]V^2 \\ =(m_2-m_1)\,g\ell\sin\alpha$$

da cui

$$V=\sqrt{\frac{(m_2-m_1)^3\,g\ell\sin\alpha}{(M+m_1+m_2)\left[(m_1+m_2)(M+m_1+m_2)\tan^2\alpha+4m_1m_2+M\,(m_1+m_2)\right]}} \tag{5.3.22}$$

## Soluzione secondo problema

### Domanda 1

Rispondendo alla seconda domanda mostreremo che immediatamente dopo l'urto le due masse si muoveranno con la stessa velocità

$$v=\frac{m_1}{m_1+m_2}v_0 \tag{5.3.23}$$

Supponendo che rimangano attaccate ed imponendo la conservazione dell'energia deve essere

$$\frac{1}{2}\,(m_1+m_2)\,v^2=(m_1+m_2)\,g\frac{\ell}{2} \tag{5.3.24}$$

se invece le masse restano separate, solo $m_2$ si solleva mentre $m_1$ continua a muoversi orizzontalmente a velocità $v$. In questo caso

$$\frac{1}{2}m_2v^2=m_2g\frac{\ell}{2} \tag{5.3.25}$$

ma in entrambe le eventualità si trova

$$v=\frac{m_1}{m_1+m_2}v_0^*=\sqrt{g\ell} \tag{5.3.26}$$

e quindi

$$v_0^*=\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\sqrt{g\ell} \tag{5.3.27}$$

### Domanda 2

Fino ad immediatamente dopo l'urto possiamo scrivere l'energia nella forma

$$E=\frac{1}{2}\,(m_1+m_2)\,v_{cm}^2+\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}v_r^2 \tag{5.3.28}$$

dove $v_{cm}$ è la velocità del centro di massa del sistema e $v_r$ la velocità relativa tra le due masse. Dato che si conserva la quantità di moto deve essere

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)\,v_{cm}^2+\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}v_0^2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\,v_{cm}^2+\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}v_r^2+W \tag{5.3.29}$$

dove $v_r$ è la velocità relativa immediatamente dopo l'urto e $W$ l'energia dissipata. Chiaramente la massima dissipazione si ha quando $v_r=0$, e in questo caso

$$W_{MAX}=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}v_0^2 \tag{5.3.30}$$

Inoltre abbiamo, dato che $v_1=v_2=v$

$$v_{cm}=v=\frac{m_1}{m_1+m_2}v_0 \tag{5.3.31}$$

### Domanda 3

Dalla conservazione dell'energia troviamo la velocità $v_h$ delle due masse quando raggiungono l'altezza $h=\ell/2$:

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2v_0^2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\,v_h^2+(m_1+m_2)\,g\frac{\ell}{2} \tag{5.3.32}$$

cioè

$$v_h^2=\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2v_0^2-g\ell \tag{5.3.33}$$

Scrivendo l'equazione del moto nella direzione parallela al filo deve essere

$$-(m_1+m_2)\,\frac{v_h^2}{\ell}=(m_1+m_2)\,g\cos\alpha-T \tag{5.3.34}$$

dove $\alpha=\pi/3$ è l'angolo che il filo forma con la verticale. Quindi

$$T=(m_1+m_2)\,g\cos\alpha+(m_1+m_2)\,\frac{v_h^2}{\ell} \tag{5.3.35}$$

ossia

$$T=(m_1+m_2)\left[\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\frac{v_0^2}{\ell}-\frac{1}{2}g\right] \tag{5.3.36}$$