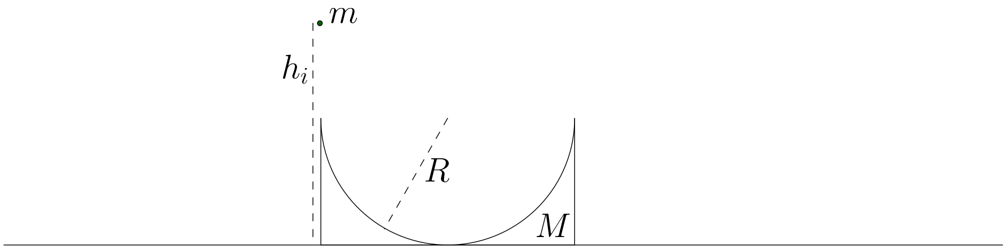
5.4. 9 marzo 2010

Problema 1 (15 punti)



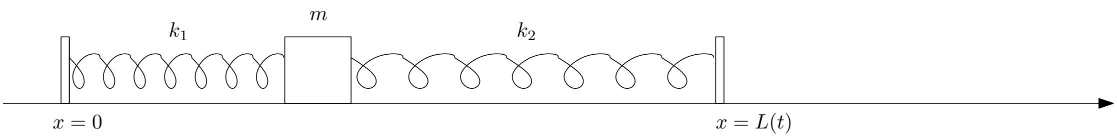
Una scodella semisferica di massa M è appoggiata su un piano orizzontale privo di attrito. Un punto materiale di massa m viene lasciato cadere da una altezza $h_i > R$, in modo da arrivare sul bordo sinistro della scodella. Da questo momento esso rimane vincolato ad essa, fino ad arrivare eventualmente al bordo opposto e lasciarla.

1. Calcolare lo spostamento orizzontale della scodella al momento del distacco, e l'altezza finale a cui arriva il punto materiale.

2. Calcolare la velocità del punto materiale al suo passaggio nel punto più basso della scodella.

3. Applicando una forza orizzontale alla scodella la si mantiene ferma. Quale è il valore massimo della forza da applicare?

Problema 2 (15 punti)



Una massa m di dimensioni trascurabili è collegata a due punti posti nelle posizioni $x = 0$ e $x = L(t) > 0$ da due molle di massa trascurabile, lunghezza a riposo nulla e costanti elastiche k_1 e k_2.

1. Determinare la posizione di equilibrio del sistema se $L(t) = L_0$ è costante.

2. Sempre nell'ipotesi $L(t) = L_0$ determinare la legge oraria della massa nell'ipotesi che a $t = 0$ questa si trovi ferma in $x = L_0/2$.

3. Si osserva adesso che la legge oraria della massa è, per $t > 0$,

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + x_0$$

dove a e x_0 sono costanti positive dalle opportune dimensioni. Determinare $L(t)$.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Indichiamo con X_i la posizione orizzontale iniziale del centro di massa della sola scodella. Per il centro di massa del sistema avremo

$$X_{cm,i} = \frac{MX_i + m\left(X_i - R\right)}{M + m}$$

Al momento del distacco avremo

$$X_{cm,f} = \frac{M\left(X_i + d\right) + m\left(X_i + d + R\right)}{M + m}$$

dove d è lo spostamento cercato. Ma dato che la componente orizzontale della quantità di moto del sistema si conserva ed è inizialmente nulla sarà $X_{cm,i} = X_{cm,f}$, quindi

$$\frac{MX_i + m\left(X_i - R\right)}{M + m} = \frac{M\left(X_i + d\right) + m\left(X_i + d + R\right)}{M + m}$$

e risolvendo troviamo

$$d = -\frac{2mR}{m + M}$$

Indichiamo con v_x, v_y le componenti della velocità della particella, con V la velocità della scodella.

Al distacco la componente orizzontale della velocità della particella relativa alla scodella è nulla. Ma dato che la quantità di moto orizzontale si conserva ed è inizialmente nulla abbiamo

$$0 = mv_x + MV = m\left(v_x - V\right) + \left(M + m\right)V = (m + M)V$$

Quindi $V = 0$, ma anche $v_x = -\frac{M}{m}V = 0$. In conclusioni al momento del distacco la scodella è ferma e la particella si muove verticalmente. Dalla conservazione dell'energia segue che l'altezza finale sarà uguale a quella iniziale.

Domanda 2

Usando la conservazione dell'energia possiamo scrivere

$$mgh_i = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

dove abbiamo indicato con v, V le velocità della particella e della scodella (entrambe orizzontali quando la prima si trova nel punto più basso). Inoltre dalla conservazione della quantità di moto orizzontale abbiamo

$$0 = mv + MV$$

e quindi

$$V = -\frac{m}{M} v$$

Sostituendo otteniamo0

$$mgh_i = \frac{1}{2} m \left(1 + \frac{m}{M}\right) v^2$$

e quindi

$$v = \sqrt{2gh_i \left(\frac{M}{m+M}\right)}$$

Domanda 3

Dato che la forza da applicare è l'unica che agisce

$$F = (M+m)\frac{ma_x}{m+M} = ma_x$$

dove a_x è l'accelerazione orizzontale della particella. D'altra parte

$$ma_x = -N \sin\theta \tag{5.4.1}$$

dove N è la reazione vincolare della scodella. Se scriviamo l'equazione del moto per la particella nella direzione radiale abbiamo invece

$$m\frac{v^2}{R} = -mg\cos\theta + N$$

Inoltre dalla conservazione dell'energia

$$mgh_i = mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2} mv^2$$

possiamo ricavare la velocità in funzione della posizione. Sostituendo nella (5.4.1) otteniamo

$$N = 2mg\left(\frac{h_i}{R} - 1 + \cos\theta\right) + mg\cos\theta$$

e quindi

$$F = -mg\left[2\left(\frac{h_i}{R} - 1\right) + 3\cos\theta\right]\sin\theta$$

Cerchiamo il minimo:

$$\frac{dF}{d\theta} = -mg\left[2\left(\frac{h_i}{R} - 1\right) + 3\cos\theta\right]\cos\theta + 3mg\sin^2\theta = 0$$

cioè

$$\cos^2\theta + 2\gamma\cos\theta - \frac{1}{2} = 0$$

dove abbiamo posto per semplicità

$$\gamma = \frac{1}{6}\left(\frac{h_i}{R} - 1\right)$$

Risolvendo troviamo

$$\cos\theta = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + \frac{1}{2}}$$

Scartando la soluzione negativa (non corrisponde ad una posizione sulla scodella) e sostituendo abbiamo

$$F = \pm 3mg\left(3\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \frac{1}{2}}\right)\sqrt{\frac{1}{2} - 2\gamma^2 + 2\gamma\sqrt{\gamma^2 + \frac{1}{2}}}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Detta x la posizione della massa, la forza che agisce su di essa vale

$$F = -k_1 x - k_2 (x - L_0)$$

e si annulla quindi per

$$x = \frac{k_2}{k_1 + k_2} L_0$$

che corrisponde alla posizione di equilibrio.

Domanda 2

L'equazione del moto si scrive

$$m\ddot{x} = -(k_1 + k_2)x + k_2 L_0$$

che corrisponde ad una massa collegata ad una molla di costante elastica k_1+k_2 sottoposta ad una forza costante $k_2 L_0$. La soluzione generale dell'equazione omogenea

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = 0$$

è un'oscillazione armonica

$$x_{om}(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

dove

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

Una soluzione particolare dell'equazione completa corrisponde alla massa ferma nella posizione di equilibrio

$$x_p(t) = \frac{k_2}{k_1 + k_2} L_0$$

e quindi la soluzione generale sarà

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{k_2}{k_1 + k_2} L_0$$

Imponiamo ora le condizioni al contorno. La massa si trova inizialmente in $L_0/2$, quind

$$x(0) = A + \frac{k_2}{k_1 + k_2} L_0 = \frac{L_0}{2}$$

da cui

$$A = \frac{1}{2} \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} L_0$$

Inoltre è ferma:

$$\dot{x}(0) = B\omega = 0$$

e quindi

$$x(t) = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \frac{L_0}{2} \cos \omega t + \frac{k_2}{k_1 + k_2} L_0$$

Notare che se $k_1 = k_2$ non si ha oscillazione.

Domanda 3

L'accelerazione della massa vale

$$\ddot{x} = a$$

e sostituendo nell'equazione del moto

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = k_2 L(t)$$

troviamo

$$ma + (k_1 + k_2)\left(\frac{1}{2}at^2 + x_0\right) = k_2 L(t)$$

quindi otteniamo

$$L(t) = \frac{ma}{k_2} + \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) x_0 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) at^2$$