5.6. 14 dicembre 2016

Esercizio 1

Un cuneo di massa $M = 5\,\mathrm{kg}$ è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito, sul quale è libero di scorrere. L'angolo formato dal piano inclinato con la direzione orizzontale è $\theta = \pi/6$. All'estremo superiore di questo è fissata una molla ideale di costante elastica $k = 30\,\mathrm{N m^{-1}}$ e lunghezza a riposo ℓ_0 uguale a quella del piano inclinato, come in Figura 5.1.

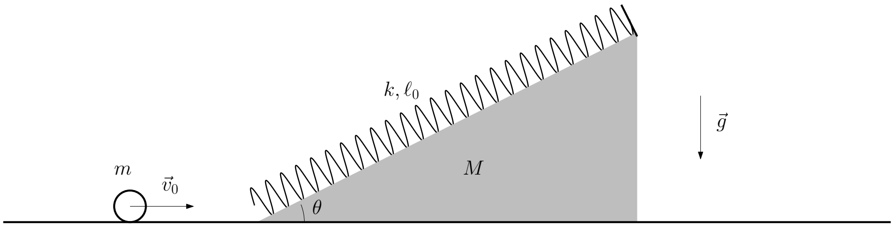

Figura 5.1.:

Inizialmente una particella di massa $m = 2\,\mathrm{kg}$ viene lanciata lungo il piano con velocità $v_0 = 1\,\mathrm{m s^{-1}}$, e arrivata al cuneo vi sale sopra (lo spigolo tra piano inclinato e superficie orizzontale è stato opportunamente arrotondato).

1. Determinare due costanti del moto per il sistema, e calcolarne il valore numerico iniziale.
2. Quanto vale la velocità del cuneo nell'istante in cui la compressione della molla è massima? E la velocità della particella?
3. Calcolare la massima compressione della molla.

Esercizio 2

Un piano è inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale. Su di esso è posato un cuneo con un angolo al vertice β come in Figura 5.2.

Il cuneo ha massa M, e su di esso è posato un punto materiale di massa m. Si considera il vincolo tra punto materiale e cuneo come bilatero. Inizialmente cuneo e punto materiale sono fermi.

1. Supponendo che vi sia attrito tra cuneo e piano inclinato, per quale valore minimo del coefficiente di attrito statico μ_s il cuneo rimane fermo?
2. In assenza di attrito, ad α fissato determinare almeno un valore di β per il quale il punto materiale si muova solo in direzione verticale.

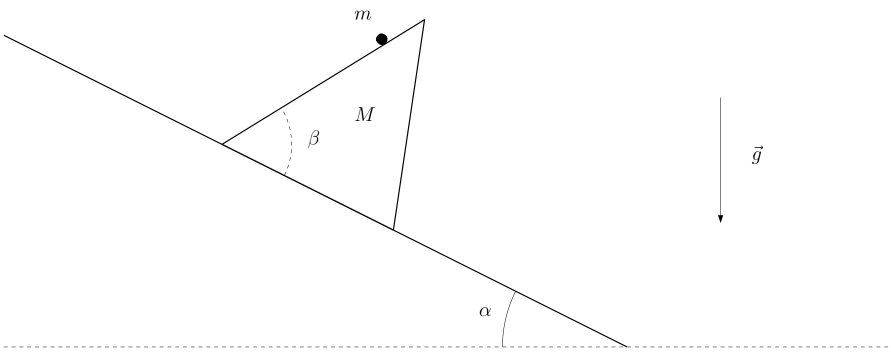

Figura 5.2.:

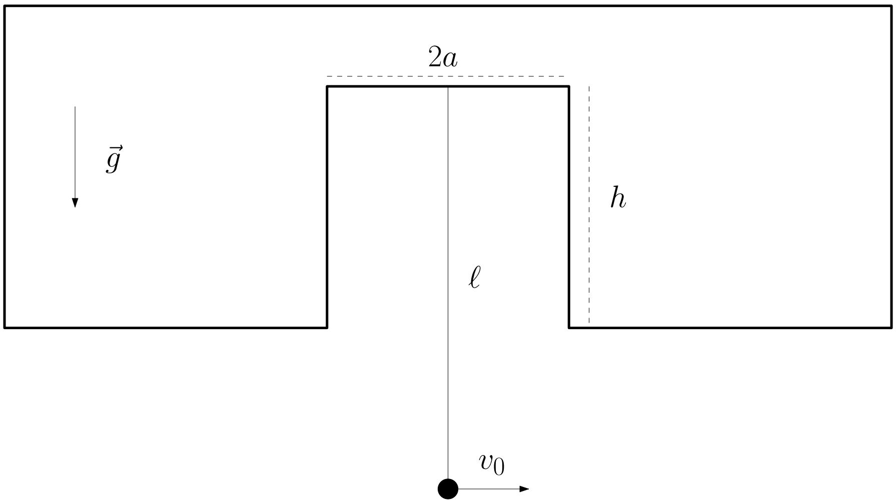

Figura 5.3.:

Esercizio 3

Un pendolo di lunghezza ℓ, con $\ell > \sqrt{a^2 + h^2}$, è appeso all'interno della struttura rappresentata in Figura 5.3. Inizialmente si trova in posizione verticale, e la massa appesa m ha una velocità v_0.

1. Per quale valore massimo di $v_0 = v_1$ il filo non tocca lo spigolo della struttura durante l'oscillazione?

2. Per quale valore minimo di $v_0 = v_2$ la massa urta la struttura?

3. Considerando $v_0 = v_2$, determinare la tensione del filo immediatamente prima e immediatamente dopo il suo contatto con lo spigolo della struttura.

Soluzioni

Esercizio 1

Domanda 1

Sul sistema complessivo non agiscono forze esterne orizzontali, quindi la quantità di moto orizzontale totale P_x si conserva. Le forze che agiscono sul sistema sono:

1. La forza peso, conservativa.
2. Le forze di richiamo dovute alla molla, anche esse conservative.
3. La reazione normale del piano orizzontale, che non compie lavoro perchè perpendicolare allo spostamento dei punti di applicazione.
4. Le due reazioni normali, uguali e contrarie, tra cuneo e particella. I lavori da esse compiute si cancellano, dato che lo spostamento relativo tra cuneo e particella è normale ad esse.

In conclusione l'energia meccanica totale E, data dalla somme delle energie cinetiche e delle energie potenziali gravitazionali e della molla si conservano. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
P_x &= mv_x + MV \\
E &= \frac{1}{2}m\left(v_x^2+v_y^2\right)+\frac{1}{2}MV^2+mgh+\frac{1}{2}k\left(\Delta\ell\right)^2
\end{aligned}$$

dove v_x e v_y sono le componenti orizzontali e verticali della velocità della particella, V la velocità del cuneo (solo orizzontale), h la posizione verticale della particella rispetto al piano orizzontale, e $\Delta\ell$ la deformazione della molla. Inizialmente $v_x = v_0$, $v_y = V = 0$, $h = 0$ e $\Delta\ell = 0$ quindi

$$\begin{aligned}
P_x &= mv_0 = 2\text{kg}\times 1\text{m}\,\text{s}^{-1} = 2\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-1} \\
E &= \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}2\text{kg}\times\left(1\text{m}\,\text{s}^{-1}\right)^2 = 1\text{J}
\end{aligned}$$

Domanda 2

Nel momento di massima compressione le velocità del cuneo e della particella sono le stesse, ed in particolare $v_y = 0$. Dalla conservazione della quantità di moto orizzontale troviamo quindi

$$mv_0 = (m+M)\,V$$

cioè

$$V = \frac{m}{m+M}v_0$$

Domanda 3

Nel momento di massima compressione $h = -\Delta\ell \sin\theta$. Dalla conservazione dell'energia meccanica abbiamo

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m+M)V^2 - mg\Delta\ell\sin\theta + \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2$$

cioè, eliminando V,

$$(\Delta\ell)^2 - \frac{2mg}{k}\sin\theta\Delta\ell - \mu\frac{v_0^2}{k} = 0$$

dove $\mu = mM/(m+M)$ è la massa ridotta del sistema. Risolvendo per $\Delta\ell$ troviamo

$$\Delta\ell = \frac{mg\sin\theta}{k} \pm \sqrt{\frac{m^2g^2\sin^2\theta}{k^2} + \mu\frac{v_0^2}{k}}$$

La compressione massima corrisponde alla soluzione negativa, e quindi

$$\Delta\ell = \frac{mg\sin\theta}{k}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{\mu k v_0^2}{m^2g^2\sin^2\theta}}\right)$$

Esercizio 2

Domanda 1

Se il cuneo rimane fermo, il punto materiale ha una accelerazione uniforme (indichiamo nel seguito con $\hat{\tau}$ il versore parallelo al piano inclinato e con $\hat{n}$ quello normale)

$$\vec{a} = -g\sin(\beta-\alpha)(\hat{\tau}\cos\beta + \hat{n}\sin\beta)$$

e il centro di massa del sistema cuneo+punto materiale avrà una accelerazione

$$\vec{a}_{cm} = -g\sin(\beta-\alpha)\frac{m}{m+M}(\hat{\tau}\cos\beta + \hat{n}\sin\beta)$$

che deve essere uguale alla forza totale agente diviso la massa totale. Quindi

$$-mg\sin(\beta-\alpha)(\hat{\tau}\cos\beta + \hat{n}\sin\beta) = N\hat{n} - (m+M)g\hat{y} + F_a\hat{\tau}$$

Proiettando nelle direzioni $\hat{\tau}$ e $\hat{n}$ troviamo

$$\begin{aligned}-mg\sin(\beta-\alpha)\cos\beta &= -(m+M)g\hat{y}\cdot\hat{\tau} + F_a\\ -mg\sin(\beta-\alpha)\sin\beta &= N - (m+M)g\hat{y}\cdot\hat{n}\end{aligned}$$

da cui

$$F_a = -mg \sin(\beta - \alpha) \cos\beta - (m + M) g \sin\alpha$$
$$N = -mg \sin(\beta - \alpha) \sin\beta + (m + M) g \cos\alpha$$

Dato che deve essere $|F_a| \leq \mu_s N$ troviamo

$$\mu_s = \frac{(m + M) \sin\alpha + m \cos\beta \sin(\beta - \alpha)}{(m + M) \cos\alpha - m \sin\beta \sin(\beta - \alpha)} = \frac{M \sin\alpha + m \sin\beta \cos(\beta - \alpha)}{M \cos\alpha + m \cos\beta \cos(\beta - \alpha)}$$

Domanda 2

Se il punto materiale si muove solo verticalmente, la sua accelerazione orizzontale deve essere nulla. Questo accade ad esempio se il suo piano di appoggio è orizzontale, cioè quando $\alpha = \beta$. L'unica altra possibilità è che non vi sia alcuna forza tra punto materiale e cuneo. In questo caso l'accelerazione del punto materiale sarà semplicemente

$$\vec{a} = -g\hat{y}$$

mentre quella del cuneo sarà

$$\vec{a}' = g \sin\alpha \hat{\tau}$$

Ma punto materiale e cuneo devono rimanere in contatto, quindi le componenti delle due accelerazioni lungo la normale al lato obliquo del cuneo devono coincidere:

$$\vec{a} \cdot (-\hat{\tau} \sin\beta + \hat{n} \cos\beta) = \vec{a}' \cdot (-\hat{\tau} \sin\beta + \hat{n} \cos\beta)$$

da cui

$$\cos\alpha \cos\beta = 0$$

Il caso $\alpha = \pi/2$ corrisponde ad un piano verticale: in questo caso il cuneo e la particella cadono entrambi con accelerazione $\vec{a} = -g\hat{y}$. Abbiamo infine il caso $\beta = \pi/2$.

Esercizio 3

Domanda 1

L'angolo massimo possibile del filo rispetto alla verticale è dato da

$$\tan\theta_{max} = \frac{a}{h}$$

L'energia meccanica del sistema si conserva ed è data da

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - mg\ell \cos\theta$$

Di conseguenza per non avere contatto deve essere

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mg\ell \leq -mg\ell\cos\theta_{max}$$

da cui

$$v_1 = \sqrt{2g\ell\left(1-\cos\theta_{max}\right)}$$

Volendo si può eliminare θ_{max} utilizzando la relazione

$$\cos\theta_{max} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta_{max}}} = \frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}$$

Domanda 2

Possiamo utilizzare ancora una volta la conservazione dell'energia, che scriviamo nella forma

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

Infatti la forza di contatto tra il filo e la struttura non fa lavoro, dato che il punto di applicazione è in quiete. Di conseguenza

$$\frac{1}{2}mv^2 - mg\ell \leq -mgh$$

da cui

$$v_2 = \sqrt{2g\left(\ell - h\right)}$$

Domanda 3

Al momento del contatto la velocità della massa si determina dalla conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - mg\ell = \frac{1}{2}mv^2 - mg\ell\cos\theta_{max}$$

Segue che

$$v^2 = v_2^2 + 2g\ell\left(\cos\theta_{max} - 1\right)$$

Immediatamente prima del contatto abbiamo un moto circolare con raggio $\rho_1 = \ell$. Quindi l'equazione del moto nella direzione del filo da

$$-m\frac{v^2}{\rho_1} = -T + mg\cos\theta_{max}$$

da cui

$$\begin{aligned}
T &= m\frac{v^2}{\rho_1} + mg\cos\theta_{max} \\
&= m\frac{v_2^2}{\ell} + 3mg\cos\theta_{max} - 2mg \\
&= m\frac{v_2^2}{\ell} + \frac{3mgh}{\sqrt{h^2+a^2}} - 2mg
\end{aligned}$$

Subito dopo il contatto abbiamo ancora un moto circolare, ma con raggio $\rho_2 = \ell - \sqrt{a^2+h^2}$. Quindi

$$\begin{aligned}
T &= m\frac{v^2}{\rho_2} + mg\cos\theta_{max} \\
&= m\frac{v_2^2}{\ell - \sqrt{a^2+h^2}} + 2mg\frac{\ell}{\ell - \sqrt{a^2+h^2}}\left(\cos\theta_{max} - 1\right) + mg\cos\theta_{max}
\end{aligned}$$