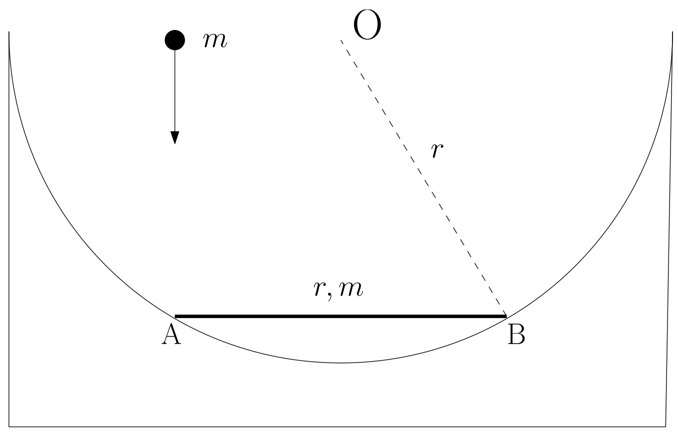
6.2. 23 marzo 2010

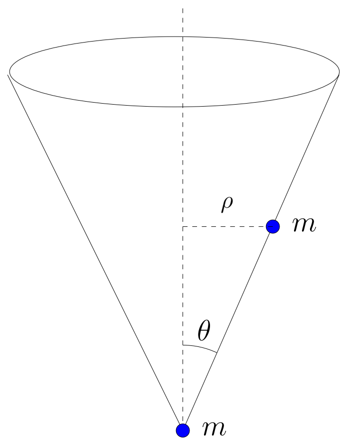
Problema 1



Un'asta di massa m e lunghezza r si muove con gli estremi vincolati ad una guida semicircolare priva di attrito. Il raggio della guida è uguale alla lunghezza dell'asta, e quest'ultima si trova inizialmente in equilibrio nella posizione in figura. Una particella di massa uguale a quella dell'asta viene lasciata cadere sulla verticale di un'estremo dell'asta, da un'altezza iniziale uguale a quella del centro della guida. L'urto con l'estremo dell'asta è istantaneo e la particella rimane attaccata ad essa.

1. Determinare l'angolo che l'asta forma con l'orizzontale nella posizione di equilibrio del sistema.
2. Calcolare l'energia dissipata durante l'urto.
3. Calcolare l'altezza massima raggiunta dal centro di massa del sistema dopo l'urto.

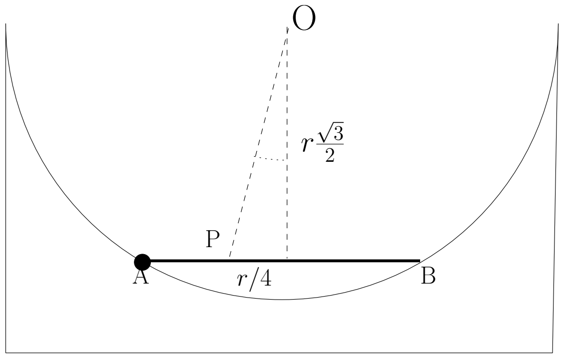
Problema 2



Una particella di massa $m = 1\text{kg}$ è vincolata a muoversi sopra un cono liscio di semiapertura $\theta = \pi/6$. Al vertice del cono è fissata un'altra particella di uguale massa: le due particelle interagiscono gravitazionalmente.

1. Calcolare il periodo di un'orbita circolare di raggio $\rho = 1\text{m}$ (la costante gravitazionale vale $G = 6.67 \times 10^{-11}\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$)
2. Determinare le costanti del moto del sistema e discutere le caratteristiche delle orbite sulla base dei loro valori.
3. Dire se tutte le orbite limitate sono chiuse, motivando la risposta. Suggerimento: studiare la traiettoria determinando un'equazione differenziale per il parametro $u = 1/r$ in funzione di ϕ.

Soluzione primo problema



Domanda 1

Il centro di massa del sistema si trova nel punto P posto a una distanza $r/4$ dal punto A, e la posizione di equilibrio si avrà quando l'energia potenziale gravitazionale è minima, cioè quando P si troverà sotto O. Questo significa che l'asta avrà ruotato di un angolo θ dato da

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{4}r}{\frac{\sqrt{3}}{2}r} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Domanda 2

Immediatamente prima dell'urto la velocità della particella vale ($h = r\sqrt{3}/2$ è l'altezza da cui cade)

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{gr\sqrt{3}}$$

Durante l'urto si conserva il momento angolare rispetto al punto O, perchè le uniche forze impulsive esterne (le reazioni vincolari) hanno momento nullo. Questo vale immediatamente prima

$$mv_0\frac{r}{2} = m\frac{r}{2}\sqrt{gr\sqrt{3}}$$

e immediatamente dopo $I\omega$ dove I è il momento di inerzia del sistema rispetto ad O:

$$I = \left(\frac{1}{12}mr^2 + \frac{3}{4}mr^2\right) + mr^2 = \frac{11}{6}mr^2$$

Nell'espressione precedente il termine tra parentesi è il momento di inerzia della sbarra, calcolato tramite il teorema di Steiner, e l'altro il contributo della particella. Abbiamo quindi

$$\omega^2 = \left(\frac{mr}{2I}\right)^2 gr\sqrt{3}$$

L'energia cinetica del sistema dopo l'urto vale quindi

$$E_f = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{3\sqrt{3}}{44}mgr$$

mentre prima valeva

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}mgr$$

l'energia dissipata è quindi

$$\Delta E = E_i - E_f = \frac{19}{44}\sqrt{3}mgr$$

Domanda 3

Il centro di massa raggiungerà la sua altezza massima rispetto alla quota iniziale quando tutta l'energia cinetica si sarà convertita in energia potenziale. Quindi

$$\frac{3\sqrt{3}}{44}mgr = 2mg\Delta h$$

ossia

$$\Delta h = \frac{3\sqrt{3}}{88}r$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Per un'orbita circolare le equazioni del moto nella direzione dell'asse del cono danno

$$0 = N\sin\theta - \frac{Gm^2}{r^2}\cos\theta$$

mentre nella direzione radiale deve essere

$$-m\frac{v^2}{r\sin\theta} = -N\cos\theta - \frac{Gm^2}{r^2}\sin\theta$$

da cui

$$v^2 = \sqrt{\frac{Gm}{r}}$$

Il periodo è quindi

$$T = \frac{2\pi r \sin\theta}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho^3}{Gm\sin\theta}} = 1.1 \times 10^6 \mathrm{s}$$

circa dodici giorni e mezzo.

Domanda 2

Si conserva la componente del momento angolare L_z parallela all'asse del cilindro, valutata rispetto a un punto qualsiasi di questo, e l'energia E. Utilizzando un sistema di coordinate sferiche centrate nel vertice del cono abbiamo

$$L_z = mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta$$

e

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta - \frac{Gm^2}{r}$$

Se scriviamo l'energia in funzione del potenziale efficace

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$$

abbiamo

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L_z^2}{2mr^2\sin^2\theta} - \frac{Gm^2}{r}$$

che è identico al potenziale efficace del problema di Keplero, ridefinendo

$$L_z' = \frac{L_z}{\sin\theta}$$

Avremo quindi orbite circolare quando l'energia totale è uguale al minimo del potenziale effettivo, orbite limitate per $E < 0$, orbite illimitate per $E \geq 0$. Si può avere caduta nel vertice solo se $L_z = 0$.

Domanda 3

Se usiamo come parametro ϕ invece del tempo possiamo scrivere

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{d\phi}\frac{L_z}{mr^2\sin^2\theta}\right)^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2\sin^2\theta} - \frac{Gm^2}{r}$$

e introducendo

$$r = \frac{1}{u}$$

otteniamo

$$E = \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{m\sin^4\theta}\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{m\sin^2\theta}u^2 - Gm^2 u$$

Derivando rispetto a ϕ abbiamo

$$\frac{L_z^2}{m\sin^4\theta}\frac{d^2u}{d\phi^2} + \frac{L_z^2}{m\sin^2\theta}u - Gm^2 = 0$$

che è l'equazione di un oscillatore su cui agisce una forza costante. Possiamo scrivere la soluzione generale nella forma

$$u = \frac{1}{r} = A\cos\left(\phi\sin\theta + \beta\right) + \frac{Gm^3}{L_z^2}\sin^2\theta$$

cioè

$$r = \frac{\frac{Gm^3}{L_z^2}\sin^2\theta}{1 + \frac{AL_z^2}{Gm^3}\cos\left(\phi\sin\theta + \beta\right)}$$

Si hanno orbite limitate quando il denominatore non si annulla, cioè

$$\frac{AL_z^2}{Gm^3} < 1$$

in questo caso r è una funzione periodica di ϕ, di periodo

$$T = \frac{2\pi}{\sin\theta} = 2\times 2\pi$$

quindi le orbite si chiudono sempre, più precisamente dopo aver fatto due giri del cilindro.