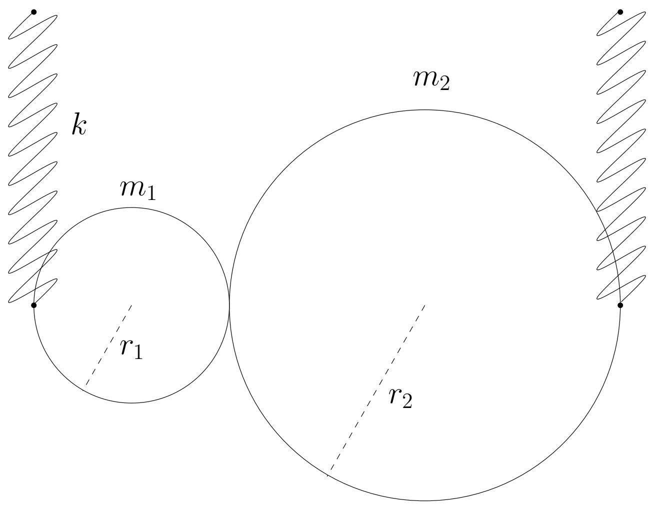
## 6.5. 20 marzo 2013

### Problema 1 (15 punti)



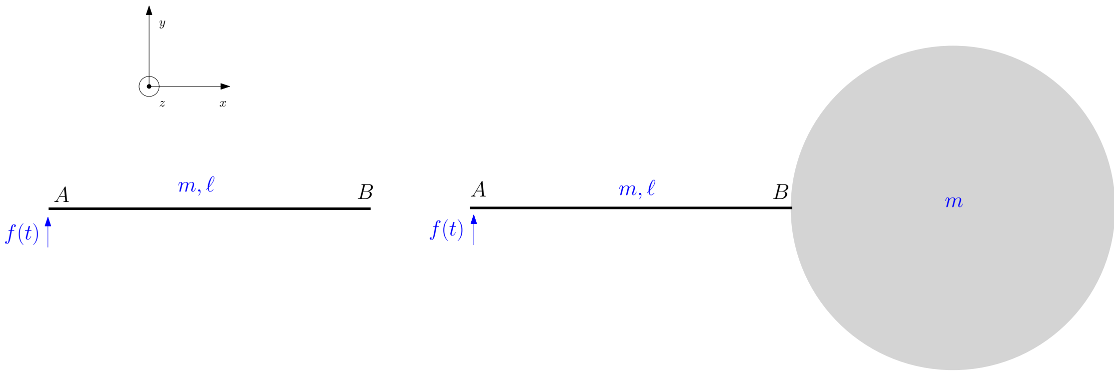

Siano due dischi di massa $m_1$ e $m_2$ e rispettivi raggi $r_1$, $r_2 > r_1$. I dischi sono nel medesimo piano, sono a contatto tra loro e ruotano senza strisciare l'uno rispetto all'altro attorno al rispettivo centro. Alla periferia di ciascun disco vi è una molla in direzione della tangente collegata a un punto fisso con costante elastica $k$. Ciascuna molla è a riposo nella configurazione iniziale mostrata in figura.

1. Si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni del sistema.

2. Sul disco più piccolo agisce ora un momento di attrito viscoso $M_v = -\gamma\omega_1$, dove $\omega_1$ è la velocità angolare del disco più piccolo. Si stimi il tempo $\tau_1$ necessario affinché l'energia del sistema messo in moto diminuisca di un fattore 2, assumendo che l'approssimazione di piccole oscillazioni sia valida e che per il fattore di qualità dell'oscillatore valga $Q \gg 1$.

3. Sempre supponendo di rimanere in regime di piccole oscillazioni si applica ora sempre sul disco più piccolo un momento periodico $N(t) = N_0 \cos \Omega t$. Quali saranno le ampiezze angolari di oscillazione dei due dischi a regime?

## Problema 2 (15 punti)




Una sbarra omogenea di massa $m$, lunghezza $\ell$ e dimensioni trasversali trascurabili è colpita perpendicolarmente a una estremità $A$ da una forza tale che

$$\int f(t)\mathrm{d}t = I_F$$

con $I_F$ dato. Si consiglia di utilizzare un sistema di riferimento con assi orientati come in figura, e origine nel centro di massa del sistema.

1. Determinare il moto del centro di massa e dell'estremità opposta $B$ della sbarra dopo il colpo.
2. Alla sbarra viene saldato un disco di uguale massa e raggio $\ell/2$. Come si muove adesso l'estremo $B$ della sbarra e il centro di massa del sistema?
3. Dove è possibile colpire il sistema sbarra+disco, sempre nella direzione perpendicolare alla sbarra, per evitare che una parte di esso si muova in direzione opposta?

## Soluzione primo problema

### Prima domanda

Indicando con $\theta_1$, $\theta_2$ gli angoli di cui ruotano i due dischi rispetto alla posizione di equilibrio abbiamo per il puro rotolamento

$$\theta_1 r_1 = -\theta_2 r_2$$

Le equazioni cardinali per i due dischi sono

$$I_1\ddot{\theta}_1 = M_1 + F r_1$$
$$I_2\ddot{\theta}_2 = M_2 + F r_2$$

dove $F$ è la componente tangenziale della forza di contatto che il disco 2 esercita sul disco 1, uguale e opposta a quelle che il disco 1 esercita sul disco 2. Abbiamo indicato con $M_1$ e con $M_2$ i momenti applicati esternamente sul sistema. Moltiplicando la prima equazione per $r_2$, la seconda per $r_1$ e sottraendo membro a membro otteniamo

$$I_1 r_2 \ddot{\theta}_1 - I_2 r_1 \ddot{\theta}_2 = r_2 M_1 - r_1 M_2$$

e utilizzando il vincolo di puro rotolamento abbiamo

$$\left(I_1 r_2 + I_2 \frac{r_1^2}{r_2}\right) \ddot{\theta}_1 = r_2 M_1 - r_1 M_2 \tag{6.5.1}$$

Per quanto riguarda i momenti abbiamo $M_1 = -k r_1^2 \theta_1$ e $M_2 = -k r_2^2 \theta_2 = k r_1 r_2 \theta_1$, quindi

$$\left(I_1 + I_2 \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) r_2 \ddot{\theta}_1 = -2k r_1^2 r_2 \theta_1$$

La frequenza delle piccole oscillazioni è dunque

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k r_1^2}{\left(I_1 + I_2 \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)}}$$

ossia, sostituendo i momenti di inerzia,

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{(m_1 + m_2)}}$$

## Seconda domanda

Aggiungendo il momento di attrito viscoso possiamo sostituire nella (6.5.1) $M_1 = -k_1 r_1^2 \theta_1 - \gamma \dot{\theta}_1$ e $M_2 = k r_1 r_2 \theta_1$, ottenendo

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) r_1^2 r_2 \ddot{\theta}_1 = -\gamma r_2 \dot{\theta}_1 - 2k r_1^2 r_2 \theta_1 \tag{6.5.2}$$

ossia

$$\ddot{\theta}_1 + \Gamma \dot{\theta}_1 + \omega_0^2 \theta_1 = 0$$

con

$$\Gamma = \frac{2\gamma}{(m_1 + m_2) r_1^2}$$

Il fattore di qualità dell'oscillatore è dunque

$$Q = \frac{\omega_0}{\Gamma}$$

e dato che

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}$$

dove $\Delta E$ è l'energia dissipata in un periodo abbiamo che dopo $n$ oscillazioni

$$E_n = \left[1 - \left(\frac{2\pi}{Q}\right)\right]^n E_0 \simeq e^{-\frac{2\pi n}{Q}} E_0$$

ossia

$$E(t) \simeq E(0) e^{-\frac{\omega_0}{Q} t}$$

Di conseguenza deve essere

$$e^{-\frac{\omega_0}{Q}\tau_1} = e^{-\log 2}$$

cioè

$$\tau_1 = \frac{Q}{\omega_0} \log 2$$

### Terza domanda

In questo caso $M_1 = -k_1 r_1^2 \theta_1 - \gamma \dot{\theta}_1 + N_0 \cos \Omega t$ e $M_2 = k r_1 r_2 \theta_1$. La (6.5.1) diviene quindi

$$\left(I_1 r_2 + I_2 \frac{r_1^2}{r_2}\right) \ddot{\theta}_1 = -2k r_1^2 r_2 \theta_1 - \gamma r_2 \dot{\theta}_1 + r_2 N_0 \cos \Omega t \tag{6.5.3}$$

ossia

$$\ddot{\theta}_1 + \Gamma \dot{\theta}_1 + \omega_0^2 \theta_1 = A \cos \Omega t$$

con

$$A = \frac{2N_0}{r_1^2 (m_1 + m_2)}$$

La soluzione a regime è

$$\theta_1(t) = \mathrm{Re} \frac{A e^{i\Omega t}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\Gamma\Omega}$$

cioè un'oscillazione angolare di ampiezza

$$\mathcal{A}_1 = \frac{A}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$$

L'ampiezza angolare per l'oscillazione del secondo disco sarà, dalla condizione di puro rotolamento,

$$\mathcal{A}_2 = \frac{r_2}{r_1} \mathcal{A}_1$$

## Soluzione secondo problema

### Prima domanda

Dalle equazioni cardinale otteniamo dopo l'urto

$$m\vec{v}_{cm} = I_F\hat{y}$$
$$\frac{1}{12}m\ell^2\vec{\omega} = -\frac{\ell}{2}I_F\hat{z}$$

La prima equazione da direttamente la velocità del centro di massa,

$$\vec{v}_{cm} = \frac{I_F}{m}\hat{y}$$

$$\vec{\omega} = -\frac{6I_F}{m\ell}\hat{z}$$

Per la velocità di $B$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\vec{v}_B &= \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{\ell}{2}\hat{x}\right) \\
&= \frac{I_F}{m}\hat{y} - \frac{3I_F}{m}\hat{z} \wedge \hat{x} \\
&= -\frac{2I_F}{m}\hat{y}
\end{aligned}$$

### Seconda domanda

In questo caso abbiamo

$$2m\vec{v}_{cm} = I_F\hat{y}$$

e quindi

$$\vec{v}_{cm} = \vec{v}_B = \frac{I_F}{2m}\hat{y}$$

dato che il punto $B$ coincide con il centro di massa.

### Terza domanda

La seconda equazione cardinale da in questo caso

$$\left(\frac{1}{3}m\ell^2 + \frac{3}{8}m\ell^2\right)\vec{\omega} = xI_F\hat{z}$$

dove $x$ è la posizione del punto in cui viene colpita la sbarra rispetto al centro di massa $B$. La velocità di un punto di coordinate $X$, $Y$ appartenente al corpo sarà

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \wedge (X\hat{x} + Y\hat{y}) \\ &= \frac{I_F}{2m}\hat{y} + \frac{24}{17}\frac{xI_F}{m\ell^2}(X\hat{y} - Y\hat{x})\end{aligned}$$

Per non andare all'indietro dovrà essere

$$v_y = \frac{I_F}{2m} + \frac{24}{17}\frac{xI_F}{m\ell^2}X \geq 0$$

se $x \leq 0$ il caso più sfavorevole si ha per $X = \ell$, ossia

$$\frac{1}{2} + \frac{24}{17}\frac{x}{\ell} \geq 0$$

da cui

$$x \geq -\frac{17}{48}\ell$$

Invece per $x \geq 0$ il caso più sfavorevole è $X = -\ell$. In conclusione deve essere

$$\frac{17}{48}\ell \geq x \geq -\frac{17}{48}\ell$$