6.8. 9 marzo 2016

Un disco rigido omogeneo di massa M e raggio R si muove su un piano verticale ed è vincolato a rotolare senza strisciare su una guida orizzontale. Al bordo della ruota è rigidamente unito un punto materiale P di massa m (vedi Figura 6.6). All'istante iniziale la ruota è abbandonata ferma nella configurazione in cui P si trova alla stessa quota del centro O della ruota.

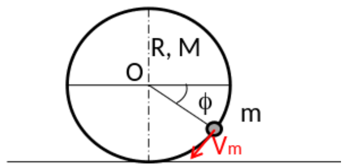

Figura 6.6.:

1. Calcolare l'energia cinetica della massa m in funzione dell'angolo ϕ che definisce la posizione della massa m sul bordo della ruota, rispetto alla linea orizzontale passante per il centro (vedi Figura 6.6).

2. Calcolare la velocità angolare ω del sistema in funzione dell'angolo ϕ.

3. Si collega al centro O del disco una molla di massa trascurabile e costante elastica k. L'altro estremo è fissato in modo che la molla risulti orizzontale e non deformata nella configurazione iniziale che prevede la massa m alla stessa altezza del centro O, come mostrato in Figura 6.7. Determinare il valore di k affinche' il sistema compia esattamente 1/4 di giro prima di invertire il suo moto.

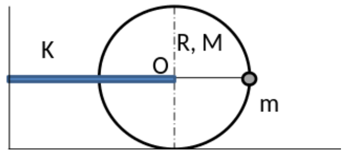

Figura 6.7.:

4. Il disco viene ora posto su di un piano di lunghezza 2ℓ con $\ell = 2\pi n R$, inclinato sull'orizzontale di un angolo α. Il piano presenta per la metà in alto una superficie ruvida, per la metà in basso una superficie liscia. Si consideri il caso $m = M$. In Figura 6.8 la posizione generica del sistema è individuata dalle coordinate x del centro del disco e dall'angolo ϕ per il punto materiale. Nel punto più alto del piano la massa è nel punto più alto del disco ($\phi = 0$). L'attrito statico μ tra il disco e la prima metà del piano inclinato è tale che il disco possa solo rotolare senza strisciare. Limitatamente al primo tratto (ruvido) del piano inclinato, e tenendo conto della condizione di rotolamento puro, rispondere alle seguenti domande:

4.1 Determinare l'andamento dell'energia potenziale del sistema $U(\phi)$.

4.2 Determinare la condizione per cui si hanno punti di equilibrio stabile.

4.3 Determinare almeno una posizione di equilibrio stabile.

4.4 Calcolare il minimo valore del coefficiente d'attrito statico μ che consenta di avere la posizione di equilibrio.

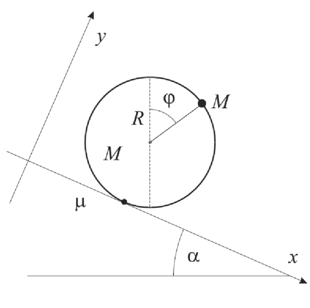

Figura 6.8.:

5. Si lascia libero il disco da fermo, nella posizione iniziale $x_0 = 0$, $\phi_0 = 0$; si supponga anche che l'angolo α sia tale che il disco non si stacchi mai dal piano. Il disco viene lasciato scendere fino alla fine del piano inclinato.

5.1 Determinare lo stato di moto (velocità di traslazione v_1 e rotazione ω_1) del sistema a metà del piano inclinato.

Soluzione

Domanda 1

L'energia si conserva, e si può scrivere come somma della energia del disco e della massa. Per quanto riguarda il disco possiamo scrivere

$$E_D = \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 = \frac{3}{4} M R^2 \dot{\phi}^2$$

dove abbiamo utilizzato la condizione di puro rotolamento per scrivere tutta l'energia cinetica come energia dovuta alla rotazione attorno al punto di appoggio. Abbiamo inoltre omesso l'energia potenziale gravitazionale, perché è una costante indipendente da ϕ. Per quanto riguarda il punto materiale abbiamo

$$E_P = \frac{1}{2} m d^2 \dot{\phi}^2 - mgr \sin\phi = mR^2 \left(1 - \sin\phi\right) \dot{\phi}^2 - mgR \sin\phi$$

dove $d = 2R^2(1 - \sin\phi)$ è la distanza tra il punto e il punto fisso. Ponendo l'energia totale uguale al suo valore iniziale abbiamo

$$K - mgR \sin\phi = 0$$

dove l'energia cinetica vale

$$K = \left[\frac{3}{4} M R^2 + mR^2 (1 - \sin\phi)\right] \dot{\phi}^2$$

e quindi

$$\dot{\phi}^2 = \frac{mgR \sin\phi}{\frac{3}{4} M R^2 + mR^2 (1 - \sin\phi)}$$

Possiamo adesso calcolare l'energia cinetica della particella:

$$\boxed{K_P = mR^2 (1 - \sin\phi) \dot{\phi}^2 = \frac{mgR(1 - \sin\phi) \sin\phi}{1 + \frac{3}{4} \frac{M}{m} - \sin\phi}}$$

Domanda 2

Dato che $\omega = -\dot{\phi}$ abbiamo

$$\left[\frac{3}{4} M R^2 + mR^2 (1 - \sin\phi)\right] \omega^2 = mgR \sin\phi$$

da cui, scegliendo opportunamente il segno,

$$\boxed{\omega = -\sqrt{\frac{g}{R} \frac{4m \sin\phi}{3M + 4m(1 - \sin\phi)}}}$$

Domanda 3

Aggiungiamo all'energia determinata precedentemente l'energia potenziale della molla. Tenendo conto che possiamo scrivere l'allungamento di quest'ultima come $\Delta\ell = R\phi$ abbiamo

$$E = \left[\frac{3}{4}MR^2 + mR^2(1-\sin\phi)\right]\dot{\phi}^2 - mgR\sin\phi + \frac{k}{2}R^2\phi^2$$

Ponendo l'energia iniziale uguale a quella finale, se nella configurazione finale $\dot{\phi} = 0$ (punto di inversione) abbiamo

$$-mgR\sin\frac{\pi}{2} + \frac{k}{2}R^2\frac{\pi^2}{4} = 0$$

da cui

$$\boxed{k = \frac{8mg}{R\pi^2}}$$

Domanda 4.1

Rispetto all'energia potenziale determinata precedentemente, dobbiamo tenere conto che sia il punto materiale che il disco hanno uno spostamento verticale addizionale di $\Delta h = -R\varphi\sin\alpha$, da cui ponendo $M = m$ abbiamo

$$\boxed{U(\varphi) = mgR\left(\cos\varphi - 2\varphi\sin\alpha\right)}$$

Domanda 4.2

Per avere equilibrio stabile deve essere $dU/d\varphi = 0$ e $d^2U/d\varphi^2 > 0$. Dai calcoli segue che

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{d\varphi} &= -mgR\left(\sin\varphi + 2\sin\alpha\right) = 0\\
\frac{d^2U}{d\phi^2} &= -mgR\cos\varphi > 0
\end{aligned}$$

La prima equazione ha soluzioni sono se

$$-1 < 2\sin\alpha < 1$$

che nell'intervallo $0 < \alpha < \pi/2$ significasin $\alpha < \frac{1}{2}$ e quindi

$$\boxed{\alpha < \frac{\pi}{6}}$$

Domanda 4.3

Le soluzioni si ripetono con periodo 2π. Nell'intervallo $-\pi < \varphi < \pi$ abbiamo

$$\varphi = -\arcsin(2\sin\alpha)$$
$$\varphi = -\pi + \arcsin(2\sin\alpha)$$

. La soluzione stabile è quella con $\cos\varphi < 0$, cioè la seconda. Abbiamo in conclusione

$$\boxed{\varphi_{eq} = \arcsin(2\sin\alpha) + (2k-1)\pi}$$

Per una derivazione geometrica vedere la Figura 6.9. Dall'uguaglianza dei tratti in verde segue che

$$\frac{R}{2}\sin(\varphi - \pi) = R\sin\alpha$$

e quindi si ottiene nuovamente la relazione $\sin\varphi + 2\sin\alpha = 0$ determinata precedentemente.

Domanda 4.4

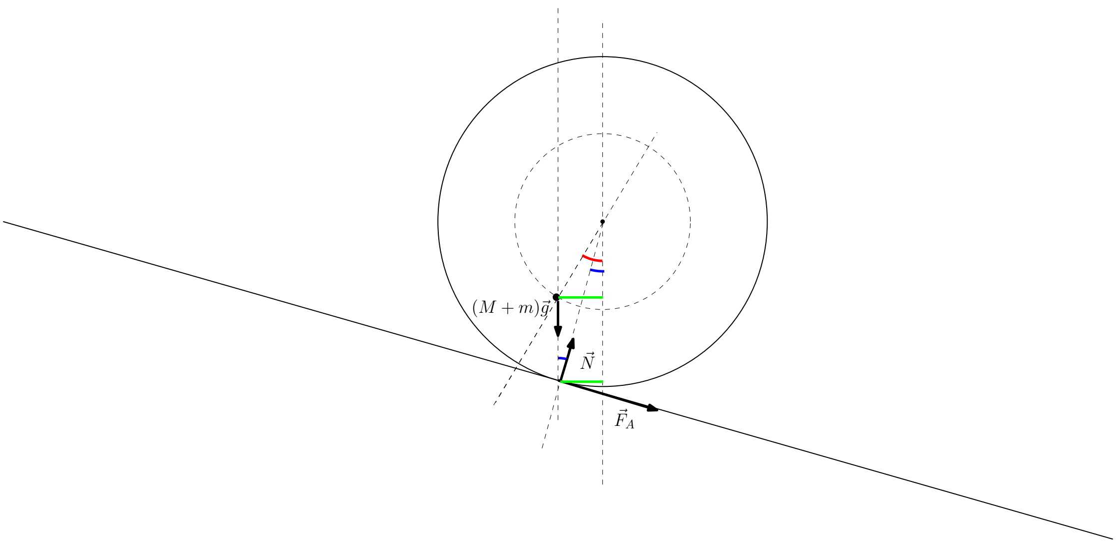

Figura 6.9.: Determinazione geometrica della posizione di equilibrio. Prendendo come polo il punto di contatto con il piano, la somma dei momenti delle forze deve essere nulla. Dato che le forze di contatto hanno braccio nullo, lo stesso deve valere anche per la forza peso applicata al centro di massa. Quindi il centro di massa deve essere sulla verticale del punto di contatto. In rosso è indicato l'angolo $\varphi - \pi$, in blu l'angolo α.

Nella condizione di equilibrio la somma delle forze deve essere nulla. Prendendo le componenti perpendicolari e parallele al piano abbiamo

$$N - 2mg\cos\alpha = 0$$
$$F_A + 2mg\sin\alpha = 0$$

Dato che deve essere $|F_A| \leq \mu N$ troviamo

$$2mg\sin\alpha \leq \mu 2mg\cos\alpha$$

e quindi

$$\boxed{\tan\alpha \leq \mu}$$

Domanda 5.1

Usiamo la conservazione dell'energia. A metà del piano inclinato il disco ha fatto un numero intero di giri, quindi la variazione dell'energia potenziale è

$$\Delta U = -2mgR\,(2\pi n)\sin\alpha$$

Per l'energia cinetica finale abbiamo quindi $K_f = -\Delta U$, dato che inizialmente $K = 0$. Ma

$$K_f = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} + 2\,(1+\cos\alpha)\right] mR^2\omega_1^2$$

e quindi

$$\boxed{\omega_1 = -\sqrt{\frac{8\pi n\sin\alpha}{\frac{7}{2}+2\cos\alpha}\frac{g}{R}}}$$

Dalla condizione di puro rotolamento segue che

$$\boxed{v_1 = -R\omega_1 = \sqrt{\frac{8\pi n\sin\alpha}{\frac{7}{2}+2\cos\alpha}gR}}$$