6.9. 17 marzo 2017

Primo problema

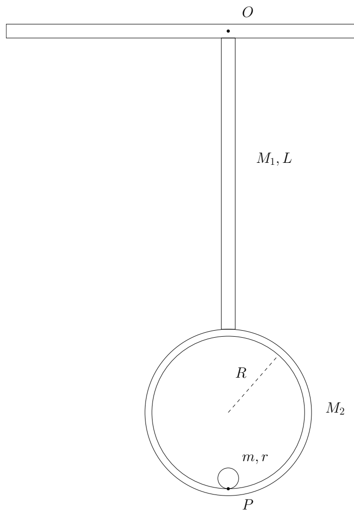

Figura 6.10.: L'anello sospeso dalla sbarra.

Un anello di massa M_2, raggio R e spessore trascurabile è sospeso tramite una sbarra di massa M_1, lunghezza L e larghezza trascurabile. All'interno dell'anello si trova un cilindro di massa m e raggio $r < R$, posto nel punto più basso. La sbarra e l'anello sono solidali, il cilindro è vincolato ad un moto di rotolamento puro rispetto all'anello.

1. Se la sbarra è fissata rigidamente al soffitto, calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni del cilindro nell'anello.

2. Il cilindro è ora fissato all'anello nel punto P. Calcolare, per il sistema formato da anello, sbarra e cilindro la posizione del centro di massa e il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il punto O e perpendicolare al piano della figura quando la sbarra sia perfettamente verticale e il cilindro nella posizione più bassa dell'anello.

3. Il sistema con il cilindro fissato all'anello nel punto P viene lasciato libero di oscillare attorno ad O. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni del sistema.

Secondo problema

Un punto materiale è libero di muoversi vincolato ad una superficie curva (un "imbuto") descritta in coordinate cilindriche dall'equazione $z = -k\rho^{-\alpha}$ con $\alpha > 0$, in presenza di un campo gravitazionale $-g\hat{z}$.

1. Scelte come coordinate ρ e ϕ scrivere l'energia cinetica e l'energia potenziale. Determinare il potenziale efficace U_{eff}, in modo da poter scrivere l'energia meccanica totale nella forma $E = \frac{1}{2}M(\rho)\dot{\rho}^2 + U_{\text{eff}}(\rho)$, dove M e U_{eff} sono opportune funzioni.

2. Trovare il periodo dell'orbita circolare in funzione del suo raggio.

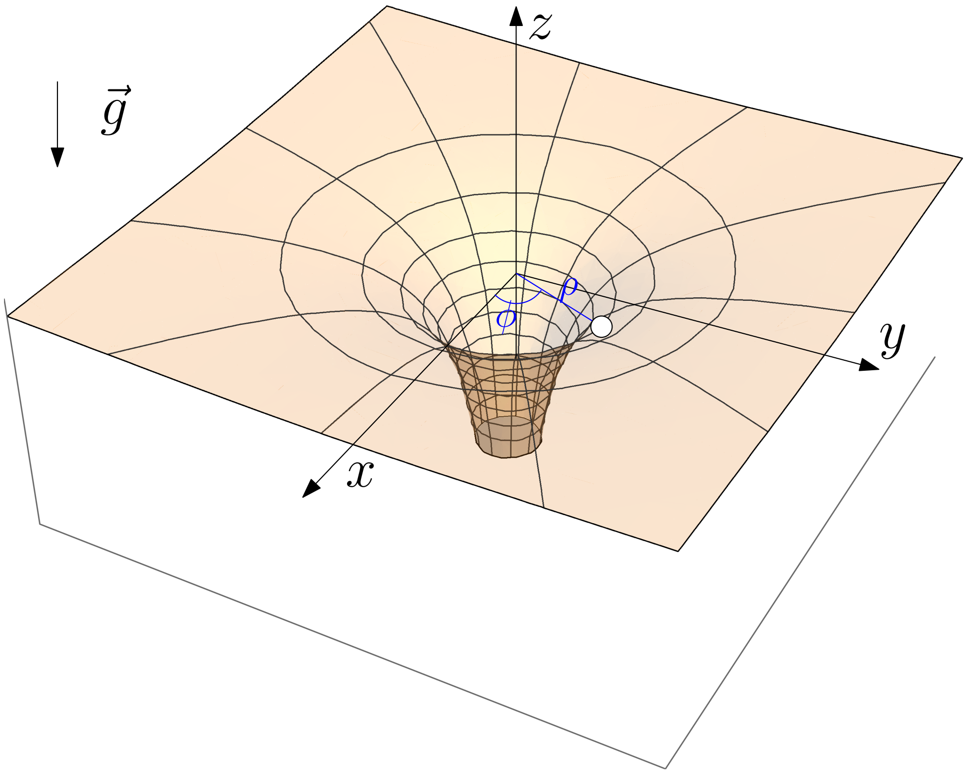

Figura 6.11.: Rappresentazione della superficie sulla quale avviene il moto.

3. Partendo da una condizione iniziale in cui $\dot{\phi} \neq 0$, dire per quali valori di α il punto materiale può cadere nel centro dell'imbuto, giustificando la risposta.

Soluzioni

Domanda 1.1

Utilizzando come coordinata l'angolo θ tra la verticale e il segmento che congiunge il centro dell'anello e il centro del cilindro possiamo trovare il legame tra $\dot{\theta}$ e la velocità angolare ω del cilindro calcolando in due modi diversi la velocità del suo centro di massa. Dato che il moto è circolare con raggio $R - r$ abbiamo

$$v_{cm} = (R - r)\dot{\theta}$$

ma d'altra parte dato che il punto di contatto tra cilindro e anello è in quiete

$$v_{cm} = -r\omega$$

da cui

$$\omega = \left(1 - \frac{R}{r}\right)\dot{\theta}$$

Possiamo adesso scrivere l'energia nella forma

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mr^2\right)\omega^2 - mg(R-r)\cos\theta$$

cioè, sostituendo ω e approssimando per piccole oscillazioni $\cos\theta = 1 - \theta^2/2$

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mr^2\right)\left(1 - \frac{R}{r}\right)^2\theta^2 + \frac{1}{2}mg(R-r)\theta^2$$

Questa è l'energia di un oscillatore armonico con

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg(R-r)}{\left(\frac{3}{2}mr^2\right)\left(r - \frac{R}{r}\right)^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{(R-r)}}$$

Domanda 1.2

La distanza del centro di massa del sistema da O è data da

$$d = \frac{M_1\frac{L}{2} + M_2\left(L+R\right) + m\left(L+2R-r\right)}{M_1+M_2+m}$$

e per il momento di inerzia

$$\begin{aligned} I = {} & \left[\frac{1}{12}M_1L^2 + M_1\left(\frac{L}{2}\right)^2\right] + \left[M_2R^2 + M_2\left(L+R\right)^2\right] \\ & + \left[\frac{1}{2}mr^2 + m\left(L+2R-r\right)^2\right] \end{aligned}$$

Domanda 1.3

Abbiamo un pendolo fisico, la cui energia vale

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 - Mgd\cos\phi$$

dove ϕ è l'angolo tra la verticale e la sbarra, d ed I i valori della distanza tra centro di massa e O e del momento di inerzia calcolati precedentemente e $M = M_1 + M_2 + m$ la massa totale. Per piccole oscillazioni a meno di una costante irrilevante

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}Mgd\phi^2$$

e quindi

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mgd}{I}}$$

Domanda 2.1

Per l'energia cinetica abbiamo in generale, in coordinate cilindriche,

$$K = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right)$$

Imponendo il vincolo di appartenenza del punto materiale alla superficie deve essere

$$z = -\frac{k}{\rho^\alpha}$$

e quindi

$$\dot{z} = \alpha\frac{k}{\rho^{\alpha+1}}\dot{\rho}$$

da cui

$$K = \frac{1}{2}m\left[\left(1 + \frac{\alpha^2k^2}{\rho^{2\alpha+2}}\right)\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2\right]$$

Per il potenziale similmente

$$U = mgz = -\frac{mgk}{\rho^\alpha}$$

La componente z del momento angolare si conserva: infatti sia la forza peso che la reazione vincolare della superficie non hanno componenti $\hat{e}_\phi$, cioè $\vec{F} = A\hat{e}_z + B\hat{e}_\rho$ mentre $\vec{r} = z\hat{e}_z + \rho\hat{e}_\rho$, di conseguenza il momento

$$\vec{r}\wedge\vec{F} = \left(z\hat{e}_z + \rho\hat{e}_\rho\right)\wedge\left(A\hat{e}_z + B\hat{e}_\rho\right) = \left(Bz - A\rho\right)\hat{e}_\phi$$

non ha componenti verticali. Dato che

$$L_z = m\rho^2\dot{\phi}$$

possiamo scrivere

$$E = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{\alpha^2k^2}{\rho^{2\alpha+2}}\right)\dot{\rho}^2 + \frac{L_z^2}{2m\rho^2} - \frac{mgk}{\rho^\alpha}$$

e quindi

$$M(\rho) = m\left(1 + \frac{\alpha^2k^2}{\rho^{2\alpha+2}}\right)$$

$$U_{eff}(\rho) = \frac{L_z^2}{2m\rho^2} - \frac{mgk}{\rho^\alpha}$$

Domanda 2.2

L'orbita corrisponde al minimo del potenziale efficace. Quindi deve essere

$$\frac{dU_{eff}}{d\rho} = -\frac{L_z^2}{m\rho^3} + \frac{\alpha mgk}{\rho^{\alpha+1}} = 0$$

da cui

$$L_z^2 = \frac{\alpha m^2 gk}{\rho^{\alpha-2}}$$

ma

$$L_z^2 = m^2\rho^4\dot{\phi}^2 = 4\pi^2 m^2\rho^4\frac{1}{T^2}$$

e quindi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho^{\alpha+2}}{\alpha gk}}$$

Domanda 2.3

Dato che $\dot{\phi} \neq 0$ avremo $L_z \neq 0$. La caduta nel centro è possibile solo se il potenziale efficace non tende a $+\infty$ per $\rho \to 0$. Abbiamo

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{L_z^2}{2m\rho^2} - \frac{mgk}{\rho^\alpha} = +\infty$$

se $\alpha < 2$ oppure se $\alpha = 2$ e

$$L_z^2 > 2m^2 gk$$

In tutti gli altri casi la caduta nel centro è possibile.