7.10. 26 maggio 2017

Problema

Un elastico di lunghezza ℓ può essere descritto per piccoli allungamenti dall'equazione di stato

$$\tau = \alpha T \left(\ell - \ell_0\right)$$

dove τ è la tensione, T la temperatura ℓ_0 la lunghezza a riposo e α una costante positiva dalle opportune dimensioni. L'energia interna è indipendente dalla lunghezza, e supporremo

$$U = \beta T$$

dove β è un'altra costante positiva.

1. L'elastico viene allungato quasistaticamente a temperatura costante, passando da $\ell = \ell_0$ a $\ell = 2\ell_0$. Calcolare il lavoro che è stato fatto su di esso.

2. Calcolare la relazione tra τ e ℓ che caratterizza una trasformazione adiabatica reversibile.

3. In una espansione adiabatica reversibile, per $\ell > \ell_0$, la temperatura aumenta o diminuisce?

4. Calcolare la capacità termica C_ℓ dell'elastico a ℓ fissata e quella C_τ a tensione costante.

5. Esprimere l'entropia dell'elastico in funzione di ℓ e U, a meno di una costante arbitraria. In un allungamento isotermo dell'elastico (sempre per $\ell > \ell_0$), che si può ottenere mantenendo l'elastico in equilibrio con l'ambiente, l'entropia aumenta o diminuisce?

6. L'elastico si trova inizialmente a una temperatura T_0 ed è appeso ad un estremo in assenza di tensione. Si appende adesso all'altro estremo una massa M e si attende che si ristabilisca l'equilibrio. Assumendo che la trasformazione sia adiabatica, calcolare la temperatura e la variazione della lunghezza.

Soluzioni

Domanda 1

Il lavoro fatto sull'elastico vale

$$W = \int \tau d\ell$$

di conseguenza abbiamo

$$\begin{aligned} W &= \alpha T \int_{\ell_0}^{2\ell_0} (\ell - \ell_0)\, d\ell \\ &= \frac{1}{2} \alpha T \ell_0^2 \end{aligned}$$

Domanda 2

Per il sistema considerato il primo principio si può scrivere nella forma

$$\delta Q = dU + \delta L = \beta dT - \tau d\ell$$

Per un'adiabatica reversibile $\delta Q = 0$, quindi

$$\beta dT = \alpha T (\ell - \ell_0)\, d\ell \tag{7.10.1}$$

che si integra direttamente scrivendo

$$\beta \frac{dT}{T} = \alpha (\ell - \ell_0)\, d\ell$$

e quindi

$$\log T = \frac{\alpha}{2\beta} (\ell - \ell_0)^2 + K$$

dove K è una costante di integrazione. Infine

$$T = \frac{\tau}{\alpha (\ell - \ell_0)} = K' e^{\frac{\alpha}{2\beta}(\ell-\ell_0)^2}$$

cioè

$$\tau = A (\ell - \ell_0)\, e^{\frac{\alpha}{2\beta}(\ell-\ell_0)^2}$$

Domanda 3

Possiamo utilizzare direttamente l'equazione (7.10.1). Dato che per $\ell > \ell_0$ il fattore di proporzionalità tra dT e $d\ell$ è positivo

$$dT = \frac{\alpha}{\beta} T (\ell - \ell_0)\, d\ell \tag{7.10.2}$$

la temperatura aumenterà al crescere di ℓ.

Domanda 4

Se ℓ è fissato

$$\delta Q = \beta dT$$

e quindi

$$C_\ell = \beta$$

Invece a tensione costante

$$\begin{aligned}\delta Q &= \beta dT - \tau d\ell \\ d\tau &= \alpha\left(\ell - \ell_0\right) dT + \alpha T d\ell = 0\end{aligned}$$

Dalla seconda equazione si ottiene

$$d\ell = -\frac{dT}{T}\left(\ell - \ell_0\right)$$

e sostituendo nella prima

$$\delta Q = \left[\beta + \alpha\left(\ell - \ell_0\right)^2\right] dT$$

In conclusione

$$C_\tau = \beta + \alpha\left(\ell - \ell_0\right)^2$$

Domanda 5

Abbiamo

$$dS = \beta\frac{dT}{T} - \alpha\left(\ell - \ell_0\right) d\ell$$

Integrando otteniamo

$$\begin{aligned}S &= \beta \log\frac{T}{T_0} - \frac{\alpha}{2}\left(\ell - \ell_0\right)^2 \\ &= \beta \log\frac{U}{U_0} - \frac{\alpha}{2}\left(\ell - \ell_0\right)^2\end{aligned}$$

dove T_0 o U_0 giocano il ruolo di una costante di integrazione. Vediamo anche che a temperatura costante

$$dS = -\alpha\left(\ell - \ell_0\right) d\ell$$

e quindi l'entropia dell'elastico diminuisce durante l'allungamento isotermo.

Domanda 6

Possiamo considerare l'energia totale del sistema composto dall'elastico e dalla massa. Dato che nello stato di equilibrio iniziale e finale l'energia cinetica è nulla, l'energia potenziale deve essere la stessa. Quindi

$$\beta T_0 = \beta T_f - Mg\left(\ell_f - \ell_0\right)$$

D'altra parte nello stato finale

$$\tau = \alpha T_f\left(\ell_f - \ell_0\right) = Mg$$

e sostituendo troviamo

$$\beta T_0 = \beta T_f - \frac{M^2 g^2}{\alpha T_f}$$

Risolvendo l'equazione abbiamo

$$T_f = \frac{1}{2}\left[T_0 + \sqrt{T_0^2 + \frac{4M^2 g^2}{\alpha\beta}}\right]$$

e

$$\ell_f - \ell_0 = \frac{Mg}{\alpha T_f} = \frac{2Mg}{\alpha}\frac{1}{T_0 + \sqrt{T_0^2 + \frac{4M^2g^2}{\alpha\beta}}}$$