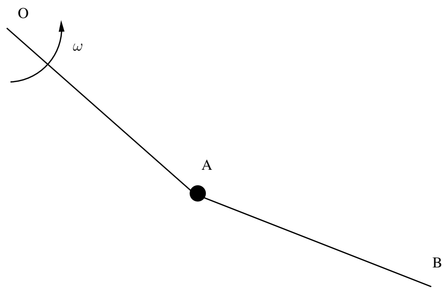
7.2. 29 maggio 2009

Problema 1 (15 punti)



La sbarra OA in figura, di lunghezza ℓ, viene mantenuta in rotazione attorno ad un suo estremo con velocità angolare constante ω. All'estremo opposto è incernierata una sbarra di AB identica lunghezza e massa m. Il moto avviene in un piano orizzontale senza attrito.

1. Si conserva il momento angolare totale del sistema rispetto al polo O? E rispetto al polo A?

2. Per quali condizioni iniziali il punto B, si muove di moto circolare uniforme (nel sistema inerziale)?

3. Se all'istante iniziale le due sbarre sono allineate, dire per quali velocità $v_B(t=0)$ dell'estremo B questo riesce a compiere (nel sistema rotante con OA) un giro completo.

Problema 2 (15 punti)

Un corpo di capacità termica costante C_1 si trova inizialmente ad una temperatura $T_{1,0}$. In un recipiente separato si trova invece una massa m di ghiaccio ad una temperatura $T_{2,0}$.

1. Si pone il recipiente in contatto termico con il corpo. Per quale temperatura minima $T_{1,0}^{min}$ il ghiaccio si scioglie completamente?

2. Calcolare, per $T_{1,0} > T_{1,0}^{min}$, la temperatura finale delline sistema e la variazione di entropia dell'universo.

3. Se lo scambio di calore avviene per mezzo di una macchina termica reversibile calcolare nuovamente $T_{1,0}^{min}$.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Se in O viene applicato al sistema un momento $M(t)$, questo svilupperà una potenza

$$W = M(t)\omega$$

di conseguenza il momento angolare rispetto ad O e l'energia varieranno nel tempo secondo le leggi

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= M\omega\\ \frac{dL_O}{dt} &= M\end{aligned}$$

Da queste equazioni segue che

$$\frac{d}{dt}\left(E-\omega L_O\right)=0$$

cioè $E-\omega L_O$ è una costante del moto. Indicando con θ l'angolo tra le direzioni delle due aste ($\theta=0$ corrisponde al caso in cui $\overline{AB}$ è il prolungamento di $\overline{OA}$) possiamo scrivere

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2\omega^2+\frac{1}{2}\left(I+m\frac{\ell^2}{4}\right)\left(\dot\theta+\omega\right)^2+\frac{1}{2}m\ell^2\omega\left(\dot\theta+\omega\right)\cos\theta \tag{7.2.1}$$

$$L_O = m\ell^2\omega+\left(I+m\frac{\ell^2}{4}\right)\left(\dot\theta+\omega\right)+m\frac{\ell^2}{2}\left(\dot\theta+2\omega\right)\cos\theta \tag{7.2.2}$$

da cui

$$E-\omega L_O+\frac{1}{2}\left(I+\frac{5}{4}m\ell^2\right)\omega^2=\frac{1}{2}\left(I+m\frac{\ell^2}{4}\right)\dot\theta^2-\frac{1}{2}m\ell^2\omega^2\cos\theta \tag{7.2.3}$$

e derivando rispetto al tempo otteniamo una equazione del moto per θ

$$\left(I+m\frac{\ell^2}{4}\right)\ddot\theta+\frac{1}{2}m\ell^2\omega^2\sin\theta=0$$

Dalla Equazione (7.2.3) è possibile determinare $\dot\theta$ in funzione di θ. Sostituendo nell'espressione di L_O (Equazione (7.2.2)) vediamo che per avere L_O costante deve essere θ costante. Inoltre in questo caso

$$\begin{aligned}\frac{2E}{m\ell^2\omega^2} &= \frac{4}{3}+\cos\theta\\ \frac{L_O}{m\omega\ell^2} &= \frac{4}{3}+\cos\theta\end{aligned}$$

e dall'equazione del moto segue che θ rimane costante solo se $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, e quindi le condizioni iniziali devono essere scelte in modo da avere

$$\frac{2E}{m\ell^2\omega^2} = \frac{4}{3} \pm 1$$
$$\frac{L_O}{m\omega\ell^2} = \frac{4}{3} \pm 1$$

In tutti gli altri casi L_O non è costante, ed al sistema è applicato un momento esterno non nullo $M(t)$.

Per quanto riguarda il momento angolare rispetto ad A possiamo ragionare come segue. Chiaramente non si hanno momenti applicati all'asta AB, però il polo è mobile e quindi

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = -m\vec{v}_A \wedge \vec{v}_{cm}$$

Il momento angolare si conserverà quindi solo se la velocità del polo sarà parallela a quella del centro di massa. Questo accadrà solo se l'angolo tra le due sbarre rimane costante: le condizioni perché questo avvenga sono già state discusse.

Domanda 2

Il moto di B sarà circolare uniforme, ancora una volta, se l'angolo tra le due aste rimarrà costante.

Domanda 3

Nel sistema rotante l'energia totale si conserva, e può essere scritta nella forma

$$E = \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\ell^2\left(\frac{5}{4} + \cos\theta\right)$$

dove abbiamo tenuto conto del potenziale centrifugo. Per compiere un giro completo dovrà essere

$$\frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\left(\frac{v_B}{\ell}\right)^2 - \frac{9}{8}m\omega^2\ell^2 > -\frac{1}{8}m\omega^2\ell^2$$

ossia

$$v_B > \omega\ell\sqrt{6}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

É necessario fornire al ghiaccio un calore totale

$$Q = \lambda m + c_g m\left(T_f - T_{2,0}\right)$$

per portarlo alla temperatura di fusione e a scioglierlo completamente (abbiamo indicato con c_g il calore specifico del ghiaccio, e con λ il suo calore latente di fusione). Questo deve provenire dal corpo, e quindi deve essere anche

$$-Q = C_1 \left(T_f - T_{1,min}\right)$$

Segue che

$$T_{1,min} = T_f + \frac{\lambda m + c_g m \left(T_f - T_{2,0}\right)}{C_1}$$

Domanda 2

La temperatura finale del sistema sarà adesso $T^* > T_f$. La variazione di entropia del ghiaccio sarà (c_a è il calore specifico dell'acqua)

$$\begin{aligned}\Delta S_g &= \int_{T_{2,0}}^{T_f} \frac{m c_g dT}{T} + \int_0^{\lambda m} \frac{dQ}{T_f} + \int_{T_f}^{T^*} \frac{m c_a dT}{T} \\ &= m c_g \log \frac{T_f}{T_{2,0}} + m c_a \log \frac{T^*}{T_f} + \frac{\lambda m}{T_f}\end{aligned}$$

e quella del corpo

$$\Delta S_c = \int_{T_{1,0}}^{T^*} \frac{C_1 dT}{T} = C_1 \log \frac{T^*}{T_{1,0}}$$

Per determinare la tempertura finale di deve eguagliare il calore assorbito dal ghiaccio

$$Q = \lambda m + c_g m \left(T_f - T_{2,0}\right) + c_a m \left(T^* - T_f\right)$$

a quello ceduto dal corpo

$$Q = C_1 \left(T_{1,0} - T^*\right)$$

ottenendo

$$T^* = \frac{C_1 T_{1,0} + c_g m T_{2,0} + m \left(c_a - c_g\right) T_f - \lambda m}{c_a m + C_1}$$

Sostituendo in

$$\Delta S = \Delta S_c + \Delta S_g$$

si ottiene il risultato cercato.

Domanda 3

La variazione di entropia del ghiaccio sarà

$$\Delta S_g = \frac{\lambda m}{T_f} + m c_g \log \frac{T_f}{T_{2,0}}$$

e quella del corpo

$$\Delta S_c = C_1 \log \frac{T_f}{T_{1,0}^{min}}$$

Se operiamo reversibilmente dovrà essere $\Delta S_g + \Delta S_c = 0$, quindi

$$\frac{\lambda m}{T_f} + m c_g \log \frac{T_f}{T_{2,0}} + C_1 \log \frac{T_f}{T_{1,0}^{min}} = 0$$

da cui

$$T_{1,0}^{min} = T_f \left(\frac{T_f}{T_{2,0}} \right)^{\frac{m c_g}{C_1}} \exp \left(\frac{\lambda m}{C_1 T_f} \right)$$