7.4. 8 giugno 2011

Problema 1 (15 punti)

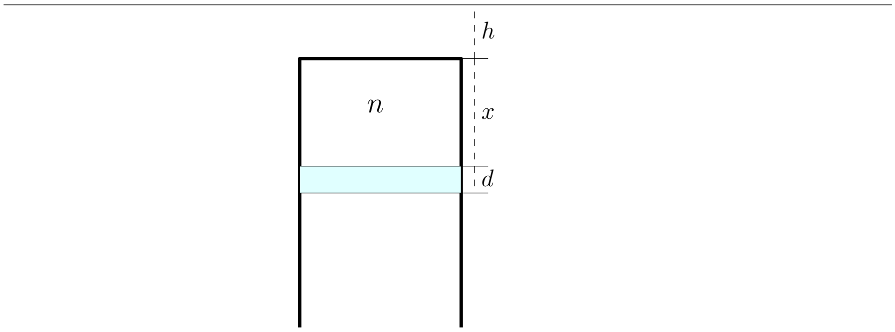
Una macchina termica è costituita da n moli di gas perfetto biatomico sottoposto al seguente ciclo di trasformazioni:

- $A \to B$ compressione isoterma reversibile;
- $B \to C$ espansione isobara reversibile;
- $C \to A$ trasformazione isocora reversibile.

Si sa che la temperatura lungo l'isoterma vale T_A e il rapporto tra il volume del gas in B e in A vale x (cioè $V_B/V_A = x$ con $x < 1$). Disegnare il ciclo di trasformazioni sul piano PV e determinare:

1. il lavoro totale fatto dal sistema nel ciclo;
2. il rendimento della macchina termica, ignorando la possibilità di restituire in modo reversibile parte del calore assorbito alle sorgenti;
3. la variazione di entropia in $A \to B$.

Problema 2 (15 punti)

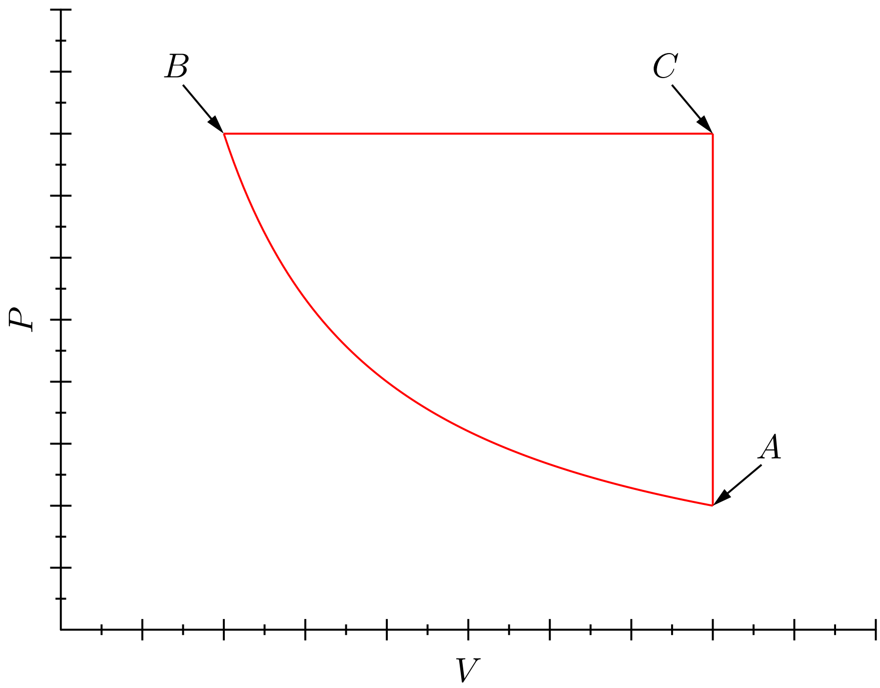


Il recipiente in figura è costituito da un cilindro di sezione S di massa e volume trascurabili, trasparente al calore, e da un pistone scorrevole di spessore d e densità ρ_p. Il cilindro contiene n moli di un gas perfetto. Il tutto è immerso in un liquido di densità ρ e temperatura T_0. Si può considerare la densità del gas trascurabile rispetto a quella del liquido, e $\rho_p > \rho$.

1. Inizialmente la parte superiore del recipiente si trova al pelo dell'acqua (cioè $h = 0$), Determinare il volume del gas, trascurando la pressione atmosferica.
2. Se $h = h^*$ il recipiente è in equilibrio. Calcolare h^*.
3. A partire dalla posizione di equilibrio si dà una leggera spinta verso l'alto al recipiente, e dopo un certo tempo si ha $h = 0$. Supponendo che il moto sia stato abbastanza lento da poter considerare istante per istante il gas all'equilibrio termodinamico, calcolare la sua variazione di entropia.

Soluzione primo problema

Domanda 1



Il ciclo è rappresentato in figura. Per il lavoro totale abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{AB} + \mathcal{L}_{BC} \\
&= \int_A^B P dV + P_B (V_A - V_B) \\
&= nRT_A \log \frac{V_B}{V_A} + nRT_A \left(\frac{V_A}{V_B} - 1 \right) \\
&= nRT_A \left[\log x + \left(\frac{1-x}{x} \right) \right]
\end{aligned}$$

Domanda 2

Il rendimento vale

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_{BC}}$$

dove $\mathcal{L}$ è il lavoro calcolato in precedenza. Per Q_{BC} abbiamo

$$\begin{aligned}
Q_{BC} &= U_C - U_B + \mathcal{L}_{BC} \\
&= nc_v\left(T_C - T_A\right) + nRT_A\left(\frac{1-x}{x}\right) \\
&= nc_vT_A\left(\frac{T_C}{T_B} - 1\right) + nRT_A\left(\frac{1-x}{x}\right) \\
&= nc_vT_A\left(\frac{V_A}{V_B} - 1\right) + nRT_A\left(\frac{1-x}{x}\right) \\
&= nc_pT_A\left(\frac{1-x}{x}\right)
\end{aligned}$$

e quindi

$$\eta = \frac{R}{c_p}\left[1 + \frac{x}{1-x}\log x\right]$$

Domanda 3

Abbiamo

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{dQ}{T_A} = \frac{1}{T_A}\int_A^B PdV = nR\log\frac{V_B}{V_A} = nR\log x$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che il pistone deve essere in equilibrio meccanico,

$$\rho g\left(x_0 + d\right) - \rho_p g d - P_0 = 0$$

dove x_0 è l'altezza della parte del cilindro occupata dal gas e $P_0 = nRT_0/(Sx_0)$ la sua pressione. Otteniamo un'equazione di secondo grado

$$x_0^2 + x_0 d\left(1 - \frac{\rho_p}{\rho}\right) - \frac{nRT_0}{\rho g S} = 0$$

da cui

$$\frac{x_0}{d} = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1\right)^2 + \frac{nRT_0}{\rho g S d^2}}$$

e quindi

$$V_0 = dS\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{\rho_p}{\rho}\right)^2 + \frac{nRT_0}{\rho g S d^2}}\right]$$

Domanda 2

Per l'equilibrio meccanico del pistone deve essere questa volta

$$\rho g \left(x_{h^*} + d + h^*\right) - \rho_p g d - \frac{nRT_0}{S x_{h^*}} = 0$$

e per il cilindro

$$\frac{nRT_0}{S x_{h^*}} - \rho g h^* = 0$$

Ricaviamo x_{h^*}

$$x_{h^*} = \frac{nRT_0}{S \rho g h^*}$$

e sostituendo nella prima relazione troviamo

$$h^* = \frac{nRT_0}{dS\rho g} \frac{1}{\left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1\right)}$$

che è positivo dato che $\rho_p > \rho$.

Domanda 3

Il volume occupato dal gas all'inizio sarà

$$V_h = S x_{h^*} = dS \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1\right)$$

e all'arrivo alla superficie avremo nuovamente V_0. La variazione di entropia del gas sarà

$$\Delta S_g = nR \log \frac{V_0}{V_h} = nR \log \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{nRT_0}{\rho g S d^2} \left(\frac{\rho}{\rho_p - \rho}\right)^2}\right]$$