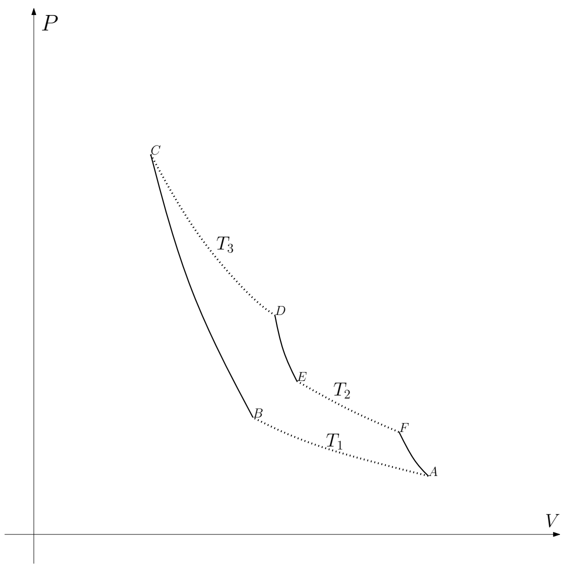
7.6. 28 maggio 2013

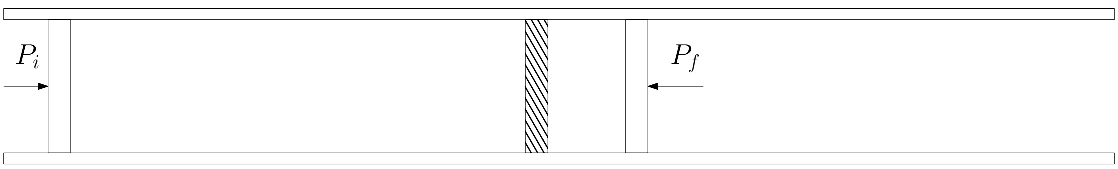
Problema 1 (15 punti)



Si esegue su una mole di un gas perfetto monoatomico la trasformazione ciclica reversibile rappresentata in figura nel piano $P - V$. Il ciclo è composto dalle tre trasformazioni adiabatiche BC, DE, FA (linea continua) e dalle tre isoterme AB, CD, EF (linea punteggiata). Si conoscono le tre temperature $T_1 < T_2 < T_3$ e si conoscono le entropie S_A e $S_B < S_A$ degli stati A e B

1. Rappresentare il ciclo nel piano $T - S$, per un valore generico dell'entropia dello S_D dello stato D nell'intervallo $S_B \leq S_D \leq S_A$
2. Per quale valore di S_D il rendimento del ciclo è massimo?
3. Calcolare il rendimento del ciclo in funzione delle tre temperature e della variabile $x = (S_D - S_B) / (S_A - S_B)$.

Problema 2 (15 punti)



Il cilindro in figura è diviso in due parti da un setto poroso. Il cilindro è poi chiuso ai due estremi da due pistoni mobili. Pistoni e cilindro sono impermeabili al calore. Il pistone di sinistra è sottoposto ad una pressione esterna costante P_i, quello di destra ad una pressione esterna anche essa costante $P_f < P_i$. Inizialmente una mole di un gas non ideale caratterizzato dalla equazione di stato

$$P = \frac{RT}{V}\left(1 + \frac{\beta}{V}\right)$$

con $\beta > 0$ e dalla energia interna

$$U = c_V T$$

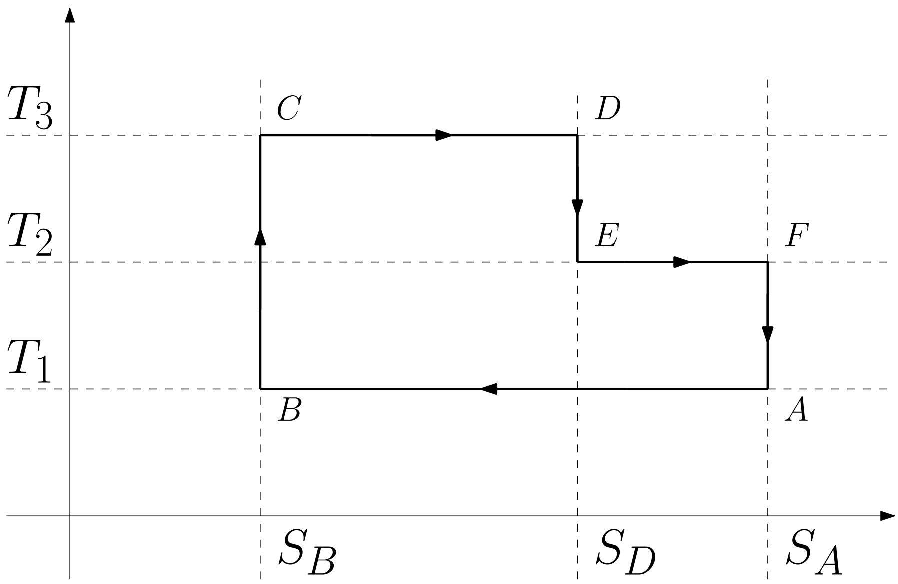
si trova interamente nello scomparto di sinistra. Il setto è sigillato, ed il gas è in equilibrio alla temperatura T_i.

1. Calcolare il volume iniziale del gas.
2. Determinare l'espressione generale dell'entalpia del gas considerato, ed esprimerla in funzione di P e T.
3. Si toglie il sigillo al setto, permettendo al gas si attraversarlo. Calcolare la sua temperatura nello stato finale di equilibrio, assumendo che β sia abbastanza piccolo da poter trascurare effetti $O\left(\beta^2\right)$. Può essere utile ricordare l'approssimazione valida per $x \ll 1$ $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + O(x^2)$.

Soluzione primo problema

Prima domanda

Nel piano $T - S$ le adiabatiche sono rette verticali, le isoterme rette orizzontali. La rappresentazione del ciclo è quindi la seguente



Seconda domanda

Il rendimento massimo si ottiene per $S_D = S_A$, in questo caso infatti ci riduciamo a un ciclo di Carnot tra le temperature estreme T_1 e T_3.

Terza domanda

Tenuto conto che il lavoro compiuto dal sistema è l'area all'interno del ciclo, e il calore assorbito quella sotto la spezzata CDE, possiamo scrivere l'efficienza nella forma

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{T_3\left(S_D-S_B\right)+T_2\left(S_A-S_D\right)-T_1\left(S_A-S_B\right)}{T_3\left(S_D-S_B\right)+T_2\left(S_A-S_D\right)} \\
&= 1-\frac{T_1\left(S_A-S_B\right)}{\left(T_3-T_2\right)S_D+T_2S_A-T_3S_B} \\
&= 1-\frac{T_1\left(S_A-S_B\right)}{T_3\left(S_D-S_B\right)+T_2\left(S_A-S_B+S_B-S_D\right)} \\
&= 1-\frac{T_1}{xT_3+\left(1-x\right)T_2}
\end{aligned}$$

L'efficienza massima nell'intervallo considerato si ottiene per $x=1$, come nella prima domanda. Quella minima per $x=0$.

Soluzione secondo problema

Prima domanda

Dall'equazione di stato abbiamo

$$P_i=\frac{RT_i}{V_i}\left(1+\frac{\beta}{V_i}\right)$$

$$\frac{1}{V_i^2}+\frac{1}{\beta}\frac{1}{V_i}-\frac{P_i}{\beta RT_i}=0$$

e risolvendo per $\frac{1}{V_i}$ troviamo

$$\frac{1}{V_i}=-\frac{1}{2\beta}+\sqrt{\frac{1}{4\beta^2}+\frac{P_i}{\beta RT_i}}$$

Seconda domanda

Dalla definizione di entalpia abbiamo

$$\begin{aligned}
H &= U+PV=c_VT+RT\left(1+\frac{\beta}{V}\right) \\
&= \left(c_V+\frac{R}{2}\right)T+RT\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\beta P}{RT}}
\end{aligned}$$

Terza domanda

Dal primo principio abbiamo

$$U_f - U_i = P_i V_i - P_f V_f$$

e quindi $H_i = H_f$. Usando l'espressione determinata precedentemente otteniamo

$$\left(c_V + \frac{R}{2}\right) T_i + RT_i \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\beta P_i}{RT_i}} = \left(c_V + \frac{R}{2}\right) T_f + RT_f \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\beta P_f}{RT_f}}$$

che sarebbe possibile risolvere esplicitamente in T_f. Trascurando termini $O\left(\beta^2\right)$ si può approssimare l'espressione precedente nella forma

$$\left(c_v + R\right) T_i + \beta P_i = \left(c_v + R\right) T_f + \beta P_f$$

da cui

$$T_f = T_i + \frac{\beta}{c_v + R} \left(P_i - P_f\right)$$

e quindi la temperatura aumenta.