7.8. 22 Maggio 2015

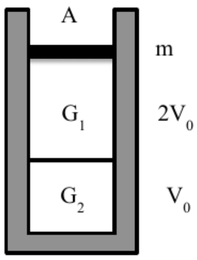

Figura 7.1.: Il sistema termodinamico considerato nel problema.

Un sistema termodinamico è costituito da n moli di gas ideale biatomico G_2 e n moli di gas ideale monoatomico G_1. I gas sono contenuti in un cilindro verticale con sezione di area A e sono separati da un setto mobile orizzontale di massa trascurabile (e area A), permeabile al calore. Un pistone di massa m chiude in alto il cilindro. G_1 occupa lo spazio tra il pistone e il setto, inizialmente di volume $2V_0$, mentre G_2 occupa lo spazio tra il setto e il fondo del cilindro, inizialmente di volume V_0. Un meccanismo permette di esercitare dall'esterno una forza verticale sul setto di separazione. L'atmosfera esterna, a temperatura T_{atm}, costituisce l'unica sorgente termica disponibile. Nel seguito si trascuri completamente la pressione atmosferica sul pistone. Sia il setto che il pistone possono scorrere senza attrito lungo il cilindro. Inizialmente il sistema è mantenuto in equilibrio termodinamico mediante una opportuna forza esterna applicata al setto.

Si supponga che il cilindro e il pistone siano isolanti termici ideali.

1. Determinare la forza esterna (vettore) applicata inizialmente al setto.
2. Improvvisamente si lascia andare il setto (forza nulla applicata dall'esterno). Determinare la temperatura finale del sistema quando si raggiunge il nuovo equilibrio termodinamico.
3. Calcolare la variazione di entropia dell'universo causata dalla trasformazione del punto precedente 2.
4. Determinare il lavoro massimo che potrebbe essere ottenuto, portando il sistema allo stesso stato finale del punto 2, con opportune macchine termiche cicliche che usino l'unica sorgente termica disponibile.
5. Descrivere schematicamente un apparato, e il suo funzionamento, necessario per ottenere il lavoro del punto precedente 4.
6. Si supponga ora che, al contrario, il cilindro sia permeabile al calore e che, anche in questo caso, il sistema sia inizialmente in equilibrio termodinamico. Determinare la variazione di entropia dell'universo quando si lascia improvvisamente libero il setto e si raggiunge il nuovo equilibrio.

Soluzione

Prima domanda

Dall'equilibrio meccanico del pistone nella direzione verticale segue che

$$P_1 A - mg = 0$$

e da quello del setto intermedio

$$-P_1 A + F_y + P_2 A = 0$$

dove F_y è la componente verticale della forza applicata. Dato che la temperatura dei due gas è la stessa, abbiamo inoltre

$$P_1 2V_0 = P_2 V_0$$

e quindi

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{mg}{A} \\ P_2 &= 2P_1 = \frac{2mg}{A} \end{aligned}$$

Infine

$$F_y = \frac{P_1 - P_2}{A} = -mg$$

Seconda domanda

Si conserva l'energia totale del sistema, data dalla somma dell'energia interna dei due gas e dell'energia potenziale gravitazionale del pistone. Allora

$$nc_{V1}T_0 + nc_{V2}T_0 + mg\frac{3V_0}{A} = nc_{V1}T_f + nc_{V2}T_f + mg\frac{V_1 + V_2}{A}$$

Dall'equazione di stato applicata a G_1 nello stato iniziale abbiamo

$$2V_0 P_1 = nRT_0$$

ossia

$$\frac{mgV_0}{A} = \frac{nRT_0}{2}$$

Nello stato finale la pressione dei due gas è la stessa, dato che sul setto intermedio non è applicata alcuna forza esterna, e vale mg/A. Quindi

$$V_1\frac{mg}{A} = V_2\frac{mg}{A} = nRT_f$$

Sostituendo nella conservazione dell'energia otteniamo

$$n\left(c_{V1}+c_{V2}+\frac{3}{2}R\right)T_0 = n\left(c_{V1}+c_{V2}+2R\right)T_f$$

e quindi

$$T_f = \frac{\frac{3}{2}R+\frac{5}{2}R+\frac{3}{2}R}{\frac{3}{2}R+\frac{5}{2}R+2R}T_0 = \frac{11}{12}T_0$$

Terza domanda

Abbiamo

$$\Delta S_{sys} = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

dove

$$\begin{aligned}
\Delta S_1 &= nc_{V1}\log\frac{T_f}{T_0} + nR\log\frac{V_1}{2V_0}\\
\Delta S_1 &= nc_{v2}\log\frac{T_f}{T_0} + nR\log\frac{V_2}{V_0}
\end{aligned}$$

Sommando i due termini otteniamo

$$\begin{aligned}
\Delta S_{sys} &= n\left(c_{V1}+c_{V2}\right)\log\frac{11}{12} + nR\log\frac{V_1V_2}{2V_0^2}\\
&= 4nR\log\frac{11}{12} + nR\log\frac{V_1V_2}{2V_0^2}
\end{aligned}$$

Dato che

$$V_1 = V_2 = \frac{A}{mg}nRT_f = \frac{11}{12}\frac{A}{mg}nRT_0 = \frac{11}{6}V_0$$

abbiamo infine

$$\Delta S_{sys} = nR\log\left[\frac{1}{2}\left(\frac{11}{6}\right)^2\left(\frac{11}{12}\right)^4\right] = 6nR\log\left(\frac{11}{12}\sqrt[6]{2}\right)$$

Quarta domanda

Indicando con Q_{sys} il calore assorbito dal sistema costituito dai due gas e dal pistone e con L_{sys} il lavoro fatto da esso abbiamo

$$Q_{sys} = \Delta U_{sys} + L_{sys}$$

Indichiamo con Q_{atm} il calore ceduto alla sorgente termica. Gli scambi di calore sono controllati da una macchina termica ciclica che produce un lavoro

$$W_m = -Q_{sys} - Q_{atm}$$

Il lavoro totale che si ottiene è dato da

$$W = W_m + L_{sys} = -Q_{atm} - \Delta U_{sys}$$

Detta ΔS la variazione totale di entropia dell'universo, abbiamo

$$\Delta S = \Delta S_{sys} + \frac{Q_{atm}}{T_{atm}}$$

cioè

$$Q_{atm} = T_{atm}\Delta S - T_{atm}\Delta S_{sys}$$

e sostituendo troviamo

$$W = -T_{atm}\Delta S + T_{atm}\Delta S_{sys} - \Delta U_{sys}$$

Il lavoro massimo si ottiene procedento in modo reversibile: in questo caso $\Delta S = 0$ e

$$W = T_{atm}\Delta S_{sys} - \Delta U_{sys}$$

La variazione di entropia è stata calcolata precedentemente, e come abbiamo visto $\Delta U_{sys} = 0$, quindi

$$W = T_{atm}\Delta S_{sys}$$

Quinta domanda

Dapprima si fa un'espansione di G_2 (e, simultaneamente e automaticamente, una compressione di G_1) riducendo lentamente il modulo della forza esterna sul setto fino a zero senza scambi termici con l'esterno, ottenendone un lavoro L_1. Poi si fa lavorare una macchina termica reversibile tra T_{atm} e i gas G_i (motore o frigorifero a seconda che la temperatura dei gas sia minore o, rispettivamente, maggiore di T_{atm}) finché l'energia restituita ai gas sotto forma di calore sia pari a L_1e la temperatura dei gasi sia pari a T. Poiché in questo caso la variazione di entropia dell'universo è nulla (reversibilità), complessivamente sarà stata estratta dall'atmosfera una quantità di calore $Q_{max} = T_{atm}\Delta S_{sys}$, tutta convertita in lavoro.

Sesta domanda

In questo caso $T_{atm} = T_0$ e lo stato finale di G_1 coincide con quello iniziale, con variazione di entropia nulla. Per G_2, invece, lo stato finale diventa uguale a quello di G_1, partendo da un volume metà, con variazione di entropia

$$\Delta S_2 = nR\log\frac{2V_0}{V_0} = nR\log 2$$

Infine l'atmosfera subisce una variazione di entropia determinata dal calore Q ceduto ai gas:

$$\Delta S_{atm} = -\frac{Q}{T_{atm}} = -\frac{Q}{T_0}$$

Il calore ceduto ai gas è esattamente pari al lavoro fatto sul pistone, dato che $\Delta U_{gas} = 0$, quindi

$$Q = mg\Delta z = mg\frac{V_0}{A}$$

In conclusione

$$\Delta S_{atm} = -\frac{Q}{T_0} = -mg\frac{V_0}{A}\frac{nRA}{2mgV_0} = -\frac{1}{2}nR$$

e

$$\Delta S = \Delta S_2 + \Delta S_{atm} = nR\left(\log 2 - \frac{1}{2}\right) > 0$$