7.9. 23 maggio 2016

Problema 1

Su n moli di un gas perfetto monoatomico viene eseguita la seguente trasformazione ciclica:

- Una compressione isoterma reversibile $A \to B$, alla temperatura T_1, fino al volume finale noto V^*.
- Una trasformazione isocora $B \to C$ ottenuta mettendo il gas in contatto con un bagno termico alla temperatura $T_2 > T_1$. Il calore viene fatto fluire lentamente in modo che istante per istante lo stato termodinamico del gas sia ben definito e si attende l'equilibrio.
- Una trasformazione adiabatica reversibile $C \to A$.

1. Determinare il volume V_A, in funzione delle quantità note T_1, T_2 e V^*.
2. Calcolare il rendimento del ciclo.
3. Calcolare la variazione dell'entropia dell'universo ΔS_u dopo un ciclo.

Problema 2

Un sistema termodinamico è costituito da due corpi con capacità termiche dipendenti linearmente dalla temperatura, e uguali rispettivamente a $C_1 = \beta T$ e $C_2 = 3\beta T$, dove β è una opportuna costante. Inizialmente il primo corpo si trova alla temperatura T_0, ed il secondo ad una temperatura doppia.

1. Se i due corpi vengono messi a contatto tra di loro, determinare la temperatura finale del sistema.
2. Determinare la massima temperatura che è possibile far raggiungere al secondo corpo operando sul sistema. Si possono utilizzare altri sistemi termodinamici durante la trasformazione, ma alla fine l'energia e l'entropia di questi deve essere invariata.
3. Seguendo le stesse regole, determinare la massima temperatura che è possibile far raggiungere al primo corpo.

Soluzione problema 1

Domanda 1

Dato che lo stato A è collegato allo stato B da una isoterma deve essere

$$P_A V_A = nRT_1$$

CC BY NC SA

mentre per lo stato C avremo

$$P_C (V^*)^\gamma = P_A V_A^\gamma$$

e

$$P_C V^* = nRT_2$$

Utilizzando la prima e la terza equazione per eliminare le pressioni nella seconda troviamo

$$nRT_2 (V^*)^{\gamma-1} = nRT_1 V_A^{\gamma-1}$$

e quindi

$$\boxed{V_A = V^* \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$

Domanda 2

Il calore viene assorbito dal sistema nella trasformazione isocora. Il totale vale

$$Q_{ass} = nc_V (T_2 - T_1)$$

Il gas fa un lavoro positivo durante la trasformazione adiabatica uguale a

$$L_{ad} = -\Delta U = nc_V (T_2 - T_1)$$

e negativo durante l'isoterma, uguale a

$$L_{iso} = \int P dV = nRT_1 \log \left(\frac{V^*}{V_A}\right)$$

Abbiamo in tutto

$$\eta = \frac{L_{ad} + L_{iso}}{Q_{ass}} = 1 - \frac{RT_1 \log \left(\frac{V_A}{V^*}\right)}{c_V (T_2 - T_1)}$$

cioè

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2 - T_1} \log \left(\frac{T_2}{T_1}\right)}$$

Domanda 3

Dato che dopo un ciclo l'entropia del gas non è cambiata, è sufficiente calcolare la variazione dell'entropia delle sorgenti. Durante l'isocora

$$\Delta S_{sorgenti,isocora} = -\frac{Q_{ass}}{T_2} = -nc_V \frac{T_2 - T_1}{T_2}$$

Durante l'isoterma

$$\Delta S_{sorgenti,isoterma} = -\Delta S_{gas,isoterma} = -nR\log\frac{V^*}{V_A} = nc_V\log\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Abbiamo quindi

$$\boxed{\Delta S_u = nc_V\left[\log\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{T_1}{T_2} - 1\right]}$$

Soluzione problema 2

Calcoliamo preliminarmente la forma dell'entropia e dell'energia interna dei corpi. Per il primo abbiamo

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{\beta T}{T}dT$$

da cui, a meno di una costante, abbiamo

$$S = \beta T$$

In modo analogo si ottiene $S = 3\beta T$ per il secondo corpo. Per quanto riguarda l'energia interna

$$dU = dQ = \beta T dT$$

e quindi, sempre a meno di una costante

$$U = \frac{1}{2}\beta T^2$$

Per il secondo corpo sarà $U = \frac{3}{2}\beta T^2$.

Domanda 1

Si conserva l'energia del sistema, che è data da

$$U = \frac{1}{2}\beta T_1^2 + \frac{3}{2}\beta T_2^2$$

Di conseguenza

$$\beta T_0^2 + 12\beta T_0^2 = 4\beta T_f^2$$

e

$$\boxed{T_f = \sqrt{\frac{13}{4}}T_0}$$

CC BY NC SA

Domanda 2

Il secondo corpo è quello che si trova alla temperatura più alta inizialmente. Non è quindi possibile far salire ulteriormente la sua temperatura, e quindi

$$\boxed{T_{2,max} = 2T_0}$$

Domanda 3

Alla fine delle trasformazione l'energia del sistema non sarà cambiata, quindi

$$\frac{1}{2}\beta\left(T_1^2 - T_0^2\right) = \frac{3}{2}\beta\left(4T_0^2 - T_2^2\right)$$

cioè

$$(T_1 - T_0)(T_1 + T_0) = 3(2T_0 - T_2)(2T_0 + T_2)$$

Operando reversibilmente avremo inoltre $\Delta S = 0$, quindi

$$\beta(T_1 - T_0) = 3\beta(2T_0 - T_2)$$

Dividendo membro a membro le equazioni precedenti otteniamo infine

$$\begin{aligned} (T_1 - T_0) &= 3(2T_0 - T_2) \\ (T_1 + T_0) &= (2T_0 + T_2) \end{aligned}$$

Risolvendo abbiamo

$$\boxed{T_{1,max} = \frac{5}{2}T_0}$$

BY NC SA