8.1. 23 ottobre 2013

Attenzione: in alcuni degli esercizi seguenti i dati o i risultati potrebbero essere forniti con una precisione eccessiva (in genere 3 cifre significative) rispetto a valori realistici. Ciò serve solo allo scopo di aumentare il livello di confidenza nella risposta che coincida numericamente con una di quelle proposte. Quando il testo propone delle risposte alternative tra le quali scegliere, un'eventuale risposta sbagliata comporta una penalizzazione sul voto finale; non rispondere affatto (cioè se non si pone nessuna crocetta) non comporta invece alcuna penalizzazione.

1. Un'automobile di massa 954kg percorre la prima metà di un rettilineo lungo 10.4km alla velocità di 81.1km/h e la seconda metà a una velocità pari a 1/4 della precedente. Determinare la velocità media in km/h.
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{14.4}$ C $\boxed{32.4}$ D $\boxed{50.4}$ E $\boxed{68.4}$ F $\boxed{86.4}$

2. Un punto materiale percorre 128m lungo un'orbita circolare a velocità di modulo costante pari a 19.7m/s, compiendo complessivamente 3 giri e mezzo. Determinare il modulo, in cm/s, della velocità media.
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{179}$ C $\boxed{359}$ D $\boxed{539}$ E $\boxed{719}$ F $\boxed{899}$

3. Da una grande altezza si lasciano cadere dei sassi, da fermi, a intervalli di tempo regolari pari a 3.65s. Si trascuri l'attrito dell'aria. Determinare dopo quanto tempo, in secondi e a partire dal primo lancio, la distanza tra i primi due sassi è doppia di quella tra il secondo e il terzo. (Valore standard dell'accelerazione di gravità: $g = 9.80665\text{m/s}^2$)
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{1.93}$ C $\boxed{3.73}$ D $\boxed{5.53}$ E $\boxed{7.33}$ F $\boxed{9.13}$

4. In un prefissato sistema di coordinate cartesiane, due particelle si muovono di moto rettilineo uniforme, partendo contemporaneamente dall'origine O. La velocità della prima particella, in m/s, è $\boldsymbol{v}_1 = -2\hat{\boldsymbol{\imath}} - 3\hat{\boldsymbol{\jmath}}$. La velocità della seconda particella, in m/s, è $\boldsymbol{v}_2 = 3\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 3\hat{\boldsymbol{k}}$. Determinare la distanza, in metri, tra le particelle dopo 35.1s dalla partenza.
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{246}$ C $\boxed{426}$ D $\boxed{606}$ E $\boxed{786}$ F $\boxed{966}$

5. Una ruota rotola senza scivolare su un piano orizzontale. La legge oraria di un punto della ruota (con distanza dall'asse minore del raggio della ruota), in un sistema di riferimento solidale con il piano orizzontale, è:
$$\begin{cases} x &= v\left(2t + \frac{1}{\omega}\cos\omega t\right) \\ y &= \frac{v}{\omega}\left(2 - \sin\omega t\right) \end{cases}$$
   dove $v = 3.11\text{m/s}$ e $\omega = 36.0\text{rad/s}$. Determinare il raggio della ruota, in centimetri.
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{17.3}$ C $\boxed{35.3}$ D $\boxed{53.3}$ E $\boxed{71.3}$ F $\boxed{89.3}$

6. In un prefissato sistema di coordinate cartesiane, un punto materiale di massa 62.7g percorre una traiettoria elicoidale di legge oraria:

$$\begin{cases} x &= b\cos\omega t \\ y &= b\sin\omega t \\ z &= vt \end{cases}$$

dove $b = 1.09\text{m}$, $\omega = 21.3\text{rad/s}$, $v = 15.5\text{m/s}$. Determinare il modulo della velocità del punto materiale, in m/s, all'istante $t = 69.7\text{s}$.
A $\boxed{0}$ B $\boxed{27.9}$ C $\boxed{45.9}$ D $\boxed{63.9}$ E $\boxed{81.9}$ F $\boxed{99.9}$

7. Nella situazione del problema (6), determinare il modulo della forza, in newton, agente sul punto materiale allo stesso istante t.
A $\boxed{0}$ B $\boxed{13.0}$ C $\boxed{31.0}$ D $\boxed{49.0}$ E $\boxed{67.0}$ F $\boxed{85.0}$

8. Nella situazione del problema (6), determinare il raggio di curvatura della traiettoria, in cm.
A $\boxed{0}$ B $\boxed{158}$ C $\boxed{338}$ D $\boxed{518}$ E $\boxed{698}$ F $\boxed{878}$

9. Un'asta rigida di lunghezza h = 78.0 cm cade scivolando su un piano orizzontale senza attrito sul quale un suo estremo è appoggiato (e rimane appoggiato durante tutto il moto). Il moto dell'asta si svolge tutto su un piano verticale. Si osserva che il centro G dell'asta percorre una traiettoria rettilinea verticale. A un certo istante di tempo $t_1 = 0.701\text{s}$ il punto G si trova a una quota pari a $\frac{3}{10}h$ rispetto al suolo e ha una velocità di modulo 79.6cm/s. Allo stesso istante di tempo t_1, determinare il modulo della velocità, in cm/s, dell'estremo dell'asta appoggiato al suolo.
A $\boxed{0}$ B $\boxed{23.7}$ C $\boxed{41.7}$ D $\boxed{59.7}$ E $\boxed{77.7}$ F $\boxed{95.7}$

10. Un proiettile di cannone, sferico di raggio 12.2cm, viene sparato in pianura con un alzo tale da ottenere la massima gittata. Si trascuri la resistenza dell'aria. La massa del proiettile è 21.9kg, il valore standard dell'accelerazione di gravità è $g = 9.80665\text{m/s}^2$, la massima quota a cui arriva il proiettile è 542m. Determinare il rapporto tra il massimo e il minimo raggio di curvatura della traiettoria (estremi inclusi).
A $\boxed{0}$ B $\boxed{1.03}$ C $\boxed{2.83}$ D $\boxed{4.63}$ E $\boxed{6.43}$ F $\boxed{8.23}$

Soluzione

Domanda 1

La massa dell'automobile non ha alcun ruolo. La velocità media è data da

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

dove $\Delta s = 10.4\text{km}$ è lo spazio totale percorso e Δt il tempo totale impiegato. Per quest'ultimo abbiamo

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{2}\frac{1}{v_1} + \frac{\Delta s}{2}\frac{4}{v_1}$$

con $v_1 = 81.1\text{km/h}$. Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned}\overline{v} &= \left(\frac{\Delta s}{2}\frac{1}{v_1} + \frac{\Delta s}{2}\frac{4}{v_1}\right)^{-1}\Delta s \\ &= \left(\frac{1}{2v_1} + \frac{2}{v_1}\right)^{-1} \\ &= \frac{2}{5}v_1 = 32.44\text{km/h}\end{aligned}$$

La risposta corretta è dunque la C.

Domanda 2

La velocità media è data da

$$|\overline{\boldsymbol{v}}| = \frac{|\Delta \boldsymbol{s}|}{\Delta t}$$

Se il punto materiale percorre tre giri e mezzo il tempo impiegato sarà

$$\Delta t = \frac{\ell}{v}$$

dove $\ell = 128\text{m}$ e $v = 19.7\text{ms}^{-1}$. Lo spostamento totale sarà uguale ad un diametro, ossia

$$|\Delta \boldsymbol{s}| = 2\frac{\ell}{\frac{7}{2}\times 2\pi} = \frac{2\ell}{7\pi}$$

Quindi

$$|\overline{\boldsymbol{v}}| = \frac{2\ell}{7\pi}\frac{v}{\ell} = 1.79\text{ms}^{-1} = 179\text{cms}^{-1}$$

La risposta corretta è quindi la B.

Domanda 3

Detto τ l'intervallo tra un lancio e il successivo, avremo le leggi orarie per i primi tre sassi

$$\begin{aligned}s_1 &= \frac{1}{2}gt^2 \\ s_2 &= \frac{1}{2}g\left(t-\tau\right)^2 \\ s_3 &= \frac{1}{2}g\left(t-2\tau\right)^2\end{aligned}$$

Dato che tutte le distanze sono proporzionali a g la risposta non dipende dall'accelerazione di gravità. Le distanze da confrontare saranno

$$\begin{aligned} d_{12} &= s_1 - s_2 = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}g(t-\tau)^2 = \frac{g}{2}\left(2\tau t - \tau^2\right) \\ d_{23} &= s_2 - s_3 = \frac{1}{2}g(t-\tau)^2 - \frac{1}{2}g(t-2\tau)^2 = \frac{g}{2}\left(2t\tau - 3\tau^2\right) \end{aligned}$$

La condizione richiesta si verificherà quando

$$d_{12} = 2d_{23}$$

cioè

$$t = \frac{5}{2}\tau = 9.13\mathrm{s}$$

La risposta corretta è dunque la F.

Domanda 4

La posizione relativa delle particelle sarà

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s} &= (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)\,t \\ &= \left(3\hat{\boldsymbol{j}} + 3\hat{\boldsymbol{k}} + 2\hat{\boldsymbol{i}} + 3\hat{\boldsymbol{j}}\right)t \\ &= \left(2\hat{\boldsymbol{i}} + 6\hat{\boldsymbol{j}} + 3\hat{\boldsymbol{k}}\right)t \end{aligned}$$

e quindi la distanza

$$d = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2}35.1\mathrm{m} = 245.7\mathrm{m}$$

La risposta corretta è quindi la B.

Domanda 5

Per un punto ad una distanza ρ dal centro della ruota la legge oraria è

$$\begin{cases} x &= x_0 + v_c t + \rho\cos(\Omega t + \phi) \\ y &= y_0 + \rho\sin(\Omega t + \phi) \end{cases}$$

e per la condizione di puro rotolamento deve essere $v_c = -\Omega R$, dove R è il raggio della ruota e Ω la sua velocità angolare. Confrontando con la legge specificata troviamo

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{v}{\omega} \\
v_c &= 2v \\
x_0 &= 0 \\
y_0 &= \frac{2v}{\omega} \\
\phi &= 0 \\
\Omega &= -\omega
\end{aligned}$$

da cui

$$R = -\frac{v_c}{\Omega} = \frac{2v}{\omega} = \frac{2 \times 3.11}{36.0} \mathrm{m} = 17.3 \mathrm{cm}$$

La risposta corretta è quindi la B.

Domanda 6

Derivando una volta le leggi orarie abbiamo

$$\begin{cases}
\dot{x} &= -b\omega \sin \omega t \\
\dot{y} &= b\omega \cos \omega t \\
\dot{z} &= v
\end{cases}$$

Per il modulo della velocità abbiamo quindi

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{b^2\omega^2 + v^2} = 27.9156 \mathrm{ms}^{-1}$$

Notare che il modulo della velocità è costante. La risposta corretta è quindi la B.

Domanda 7

Derivando un'altra volta rispetto al tempo le leggi orarie otteniamo l'accelerazione

$$\begin{cases}
\ddot{x} &= -b\omega^2 \cos \omega t \\
\ddot{y} &= -b\omega^2 \sin \omega t \\
\ddot{z} &= 0
\end{cases}$$

e quindi il modulo della forza

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{F}| &= m\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = mb\omega^2 \\
&= 62.7 \times 10^{-3} \times 1.09 \times (21.3)^2 \,\mathrm{N} = 31.0065 \mathrm{N}
\end{aligned}$$

La risposta corretta è quindi la C.

Domanda 8

L'accelerazione è perpendicolare alla velocità, come si verifica direttamente:

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} = \ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z} = 0$$

Di consequenza

$$|\boldsymbol{a}| = \frac{v^2}{\rho}$$

e quindi

$$\rho = \frac{(27.9)^2}{1.09\times(21.3)^2}\mathrm{m} = 157.58\mathrm{cm}$$

La risposta corretta è quindi la B.

Domanda 9

etta y_G l'ordinata del punto G e x_E l'ascissa dell'estramo appoggiato al suolo, in un sistema di coordinate con $x_G = 0$ e $y_E = 0$ deve essere

$$x_E^2 + y_G^2 = \frac{h^2}{4}$$

e quindi derivando rispetto al tempo

$$x_E\dot{x}_E + y_G\dot{y}_G = 0$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
\dot{x}_E &= -\frac{y_G}{x_E}\dot{y}_G \\
&= -\frac{y_G}{\sqrt{\frac{h^2}{4} - y_G^2}}\dot{y}_G \\
&= -\frac{\frac{3}{10}h}{\sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{9}{100}h^2}}\dot{y}_G \\
&= -\frac{3}{4}\dot{y}_G = 59.7\mathrm{cms}^{-1}
\end{aligned}$$

La risposta corretta è quindi la D.

Domanda 10

Le leggi orarie sono

$$
\begin{aligned}
x &= v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} t \\
y &= v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} t - \frac{1}{2} g t^2
\end{aligned}
$$

Dato che la traiettoria è una parabola il minimo raggio di curvatura si avrà al vertice, il massimo ad un estremo. Nel primo caso

$$\rho_{min} = \frac{v_x^2}{g}$$

e nel secondo

$$\rho_{max} = \frac{v_0^2}{g \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

quindi

$$\frac{\rho_{max}}{\rho_{min}} = \frac{v_0^2}{v_x^2 \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2.83$$

La risposta corretta è quindi la C.