8.2. 18 dicembre 2013

Attenzione: in alcuni degli esercizi seguenti i dati o i risultati potrebbero essere forniti con una precisione eccessiva (in genere 3 cifre significative) rispetto a valori realistici. Ciò serve solo allo scopo di aumentare il livello di confidenza nella risposta che coincida numericamente con una di quelle proposte. Quando il testo propone delle risposte alternative tra le quali scegliere, un'eventuale risposta sbagliata comporta una penalizzazione sul voto finale; non rispondere affatto (cioè se non si pone nessuna crocetta) non comporta invece alcuna penalizzazione. Per l'accelerazione di gravità, usare il valore standard: $g = 9.80665\text{m/s}^2$.

1. Un pendolo ideale è costituito da un corpo di massa 139g e da un filo inestensibile di lunghezza 171cm. Nel sistema di riferimento del laboratorio, che può essere considerato inerziale, il punto di sospensione viene mantenuto in oscillazione armonica (sinusoidale) lungo una direzione orizzontale, grazie all'applicazione di un'opportuna forza F. Nel sistema del laboratorio si scelgono delle coordinate cartesiane X, Y, Z, dove Z è l'asse verticale rivolto verso l'alto e X è un asse orizzontale nella direzione del moto del punto di sospensione. Le condizioni iniziali in cui viene posto il pendolo assicurano che il suo moto avvenga sempre sul piano X, Z, pertanto, nel seguito, non si farà riferimento all'asse Y. Nel sistema di coordinate citato, la legge oraria del punto di sospensione è: $X(t) = X_0 \cos(\omega t)$, dove $X_0 = 0.530\text{cm}$ e $\omega = 1.80\text{rad/s}$. L'attrito è trascurabile. Nel seguito ogni grandezza o relazione è intesa nel sistema di riferimento S non inerziale, solidale col punto di sospensione del pendolo e assi cartesiani x, z rispettivamente paralleli e concordi agli assi X, Z. Sia φ l'angolo, con segno, che forma la direzione del filo con la verticale; nel seguito si consideri sempre il caso delle piccole oscillazioni (le espressioni riguardanti le forze sviluppate al prim'ordine in φ: $\sin\varphi \simeq \varphi$, $\cos\varphi \simeq 1$, eccetera). Determinare il valore massimo, in mN, del modulo della forza apparente esercitata sul corpo (nel sistema S).
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{2.39}$ C $\boxed{4.19}$ D $\boxed{5.99}$ E $\boxed{7.79}$ F $\boxed{9.59}$

2. Nella situazione del problema precedente (1) determinare la tensione del filo in newton (nel sistema S).
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{1.36}$ C $\boxed{3.16}$ D $\boxed{4.96}$ E $\boxed{6.76}$ F $\boxed{8.56}$

3. Nella situazione dei problemi precedenti (1,2) e nel caso in cui la velocità iniziale del pendolo sia nulla (al tempo $t = 0$ e nel sistema S), determinare quale deve essere l'angolo iniziale $\varphi(t = 0)$, in mrad, affinché il moto del pendolo sia armonico semplice.
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{2.23}$ C $\boxed{4.03}$ D $\boxed{5.83}$ E $\boxed{7.63}$ F $\boxed{9.43}$

4. Nella situazione dei problemi (1,2) si considerino ora le condizioni iniziali (al tempo $t = 0$) di velocità nulla e angolo φ nullo. Determinare l'angolo φ, in mrad, al tempo $t = \frac{2\pi}{\omega}$.
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{2.37}$ C $\boxed{4.17}$ D $\boxed{5.97}$ E $\boxed{7.77}$ F $\boxed{9.57}$

5. Un bambino si trova su una giostra di raggio r, che ruota con velocità angolare costante ω. La madre del bambino, di massa m, è ferma, in piedi, sul terreno immediatamente all'esterno della giostra. I coefficienti, rispettivamente statico e dinamico, di attrito radente per le suole delle scarpe sul terreno sono μ_s e μ_d. Le domande seguenti riguardano le grandezze fisiche misurate nel sistema di riferimento S solidale alla giostra e dotato di un sistema di coordinate polari (r, φ). Dal suo punto di vista, il bambino "vede" la madre percorrere un'orbita circolare con velocità uniforme. Determinare la forza di attrito sulla madre.

   a) A: $-\mu_d mg\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$
   b) B: 0
   c) C: $-\mu_s mg\hat{\boldsymbol{e}}_r$
   d) D: $-\mu_d mg\hat{\boldsymbol{e}}_r$
   e) E: Nessuna delle altre risposte proposte è corretta
   f) F: $\mu_d mg\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

   A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐ F [2]

6. Nella situazione del problema precedente (5) determinare (nel sistema S) la componente radiale F_r della risultante di tutte le forze (incluse quelle apparenti) agenti sulla madre.

   a) A: $mr\omega^2$
   b) B: $3mr\omega^2$
   c) C: $-2mr\omega^2$
   d) D: Nessuna delle altre risposte proposte è corretta
   e) E: $-mr\omega^2$
   f) $2mr\omega^2$

   A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐ F ☐

7. Un punto materiale di massa 491g si muove in una dimensione nel campo di una forza conservativa con energia potenziale:

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}kx^2 & x > 0 \\ 4kx^2 & x < 0 \end{cases}$$

   dove $k = 5.91\text{N/m}$. Determinare il periodo, in secondi, dell'oscillazione intorno alla posizione di equilibrio.

   A [0] B [1.23] C [3.03] D [4.83] E [6.63] F [8.43]

8. Una particella di massa 7.02g è vincolata a muoversi lungo una retta orizzontale e viene lanciata con velocità iniziale di 7.33m/s dalla posizione $x = 0$. La particella è soggetta a una forza di richiamo $F_x = -kx^3$, con $k = 0.446\text{N/m}^3$. A quale

distanza dall'origine, in metri, riesce ad arrivare?

A $\boxed{0}$ B $\boxed{1.14}$ C $\boxed{2.94}$ D $\boxed{4.74}$ E $\boxed{6.54}$ F $\boxed{8.34}$

9. Una massa di 0.552kg è appesa verticalmente a una molla di costante elastica 5.62N/m al soffitto di un ascensore. Il sistema è inizialmente in quiete, ma al tempo $t = 0$ l'ascensore inizia ad accelerare verso l'alto con accelerazione costante di modulo 0.480m/s^2. Determinare l'ampiezza delle oscillazioni, in cm, intorno alla posizione di equilibrio, nel sistema di riferimento solidale con l'ascensore.

   A $\boxed{0}$ B $\boxed{1.11}$ C $\boxed{2.91}$ D $\boxed{4.71}$ E $\boxed{6.51}$ F $\boxed{8.31}$

Soluzione

Domanda 1

La forza apparente applicata sula massa è data da

$$\vec{F} = -ma\hat{\boldsymbol{e}}_x$$

e

$$a = \ddot{X} = -X_0\omega^2 \cos\omega t$$

Il valore massimo del modulo della forza apparente sarà quindi

$$\begin{aligned}\left|\vec{F}\right|_{max} &= X_0\omega^2 m = 0.530\text{cm}\,(1.80\text{rad/s})^2\,139\text{g}\\ &= 0.530\times10^{-2}\,(1.80)^2\,139\times10^{-3}\text{N}\\ &= 2.39\times10^{-3}N\end{aligned}$$

La risposta corretta è quindi la (B).

Domanda 2

Dall'equazione del moto nella direzione del filo abbiamo

$$-m\frac{v^2}{\ell} = T - mg\cos\theta$$

Per piccole oscillazioni possiamo porre $\cos\theta \simeq 1$ e trascurare il contributo proporzionale alla velocità, quindi

$$\begin{aligned}T = mg &= 139\times10^{-3}\text{kg}\,9.80665\text{ms}^{-2}\\ &\simeq 1.36\text{N}\end{aligned}$$

La risposte corretta è quindi la (B).

Domanda 3

L'equazione del moto si scrive nella forma

$$m\ell^2\ddot{\varphi} + mg\ell\varphi = m\ell X_0\omega^2 \cos\omega t$$

ossia

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = \frac{X_0\omega^2}{\ell}\cos\omega t$$

La soluzione generale è data dalla somma di una soluzione particolare e della soluzione generale dell'omogenea,

$$\varphi(t) = A\cos\Omega_p t + B\sin\Omega_p t + \frac{X_0\omega^2}{\ell}\frac{1}{\Omega_p^2 - \omega^2}\cos\omega t$$

con $\Omega_p^2 = g/\ell$. Dato che Ω_p e ω sono differenti, l'unico modo per ottenere una soluzione monocromatica è avere $A = B = 0$. In questo caso $\dot{\varphi}(0)$ è automaticament nullo, e deve essere

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \frac{X_0}{\ell}\frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_p^2} = \frac{0.53\times 10^{-2}\text{cm}}{171\times 10^{-2}\text{cm}}\frac{(1.80\text{rad/s})^2}{\frac{9.80665}{171\times 10^{-2}}(\text{rad/s})^2 - (1.80\text{rad/s})^2}\\ &= 4.025\times 10^{-3}\text{rad}\end{aligned}$$

La risposta corretta è quindi la (C).

Domanda 4

Imponiamo le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= A + \frac{X_0}{\ell}\frac{\omega^2}{\Omega_p^2 - \omega^2} = 0\\ \dot{\varphi}(0) &= B\Omega_p = 0\end{aligned}$$

e quindi

$$\varphi(t) = \frac{X_0}{\ell}\frac{\omega^2}{\Omega_p^2 - \omega^2}(\cos\omega t - \cos\Omega_p t)$$

Abbiamo infine

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) &= \frac{X_0}{\ell}\frac{\omega^2}{\Omega_p^2 - \omega^2}\left(1 - \cos\frac{2\pi\Omega_p}{\omega}\right)\\ &= 4.025\times 10^{-3}\text{rad}1.484\\ &= 5.97\text{rad}\end{aligned}$$

La risposta corretta è quindi la (D).

Domanda 5

La forza di attrito non dipende dal sistema di riferimento, quindi quella che agisce sulla madre è nulla. Di conseguenza la risposta corretta è la (B).

Domanda 6

Dato che nel sistema considerato la madre compie un moto circolare uniforme, abbiamo che la somma delle forze radiali ad essa applicata deve essere uguale alla sua massa per la sua accelerazione centripeta, quindi

$$F_r = -mr\omega^2$$

Notare che questa è la somma della forza centrifuga ($mr\omega^2$) e di quella di Coriolis ($-2mr\omega^2$).

La risposta corretta è dunque la (E).

Domanda 7

Per $x > 0$ si ha un moto armonico con $\omega_1 = \sqrt{k/m}$, per $x < 0$ un moto armonico con $\omega_2 = \sqrt{8k/2}$. Per il periodo di una oscillazione completa avremo

$$\begin{aligned} T &= \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} = \frac{\pi}{\omega_1} + \frac{\pi}{\omega_2} \\ &= \pi\sqrt{\frac{m}{k}}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{8}}\right) \\ &= 1.2256\text{s} \end{aligned}$$

La risposta corretta è quindi la (B).

Domanda 8

Dal teorema delle forze vive abbiamo

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_0^X \left(-kx^3\right) dx$$

dove X è la massima distanza dall'origine. Quindi

$$X = \left(\frac{2mv_0^2}{k}\right)^{1/4} \simeq 1.14\text{m}$$

la risposta corretta è quindi la (B).

Domanda 9

Nel sistema di riferimento dell'ascensore per $t < 0$ abbiamo

$$m\ddot{y} = -ky - mg$$

quindi il sistema è un oscillatore armonico con posizione di equilibrio

$$y_{0,-} = -\frac{mg}{k}$$

Per $t > 0$ occorre aggiungere la forza apparente dovuta all'accelerazione, e l'equazione del moto diviene

$$m\ddot{y} = -ky - m(g+a)$$

Abbiamo quindi ancora un oscillatore armonico, ma la posizione di equilibrio è diventata

$$y_{0,+} = -\frac{m(g+a)}{k}$$

La soluzione generale di questa equazione è

$$y = -\frac{m(g+a)}{k} + A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

con $\omega^2 = k/m$. Imponiamo le condizioni iniziali. A $t = 0$ la massa è ferma nella posizione di equilibrio precedente $y_{0,-}$, quindi

$$\begin{aligned} y(0) &= -\frac{m(g+a)}{k} + A = -\frac{mg}{k} \\ \dot{y}(0) &= B\omega = 0 \end{aligned}$$

Segue che

$$\begin{aligned} A &= \frac{ma}{k} \\ B &= 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$y = y = -\frac{m(g+a)}{k} + \frac{ma}{k}\cos\omega t$$

L'ampiezza delle oscillazioni è chiaramente data da

$$\frac{ma}{k} = \frac{0.552\mathrm{kg}0.480\mathrm{m/s}^2}{5.62\mathrm{N/m}} = 4.71459\mathrm{cm}$$

La risposta corretta è quindi la D.