8.4. 5 novembre 2014

Negli esercizi seguenti le coordinate polari sferiche vengono indicate con i simboli r,θ,ϕ, dove r è la distanza dall'origine O, θ è l'angolo polare (colatitudine) e ϕ è l'azimut; le coordinate cilindriche vengono indicate con i simboli ρ,ϕ,z, dove ρ è la distanza dall'asse polare, ϕ è l'azimut e z è la quota; le coordinate cartesiane vengono indicate con i simboli x,y,z. Quando più tipi di coordinate sono usati nello stesso esercizio, salvo avviso contrario i diversi sistemi sono associati nel modo usuale: origini coincidenti, assi polari coincidenti tra loro e coincidenti con l'asse z, origine degli azimut coincidente con il semiasse $x > 0$, ecc.

1. Una particella elementare è dotata di una massa $m = 1.01 \times 10^{-31}$ kg e di una carica elettrica $q = 6.35 \times 10^{-10}$ u.e.s. Sapendo che 1 u.e.s. = 1 $\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{s}^{-1}$ e che la velocità della luce è $c = 299\,792$ km/s, stimare il suo raggio r, in cm, sulla base di pure considerazioni dimensionali (si usi una formula del tipo $r = m^\alpha q^\beta c^\gamma$, con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$).

A $\boxed{0}$ B $\boxed{2.64 \times 10^{-12}}$ C $\boxed{4.44 \times 10^{-12}}$ D $\boxed{6.24 \times 10^{-12}}$ E $\boxed{8.04 \times 10^{-12}}$ F $\boxed{9.84 \times 10^{-12}}$

2. Un'automobile percorre un tratto rettilineo di lunghezza 3.74 km, sia all'andata che al ritorno. All'andata mantiene una velocità di modulo costante pari a 58.2 km/h, mentre al ritorno mantiene una velocità di modulo costante pari a 92.7 km/h. Determinare il modulo della velocità (vettoriale) media, in dm/s.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{205}$ C $\boxed{385}$ D $\boxed{565}$ E $\boxed{745}$ F $\boxed{925}$

3. Nel caso del problema precedente (2), determinare la velocità scalare media (media del modulo della velocità), in m/s.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{19.9}$ C $\boxed{37.9}$ D $\boxed{55.9}$ E $\boxed{73.9}$ F $\boxed{91.9}$

4. Date le grandezze $F = 37.4$ N, $m = 30.0$ g, $a = 4.19$ m/s^2, $v = 46.2$ km/h e $h = 77.6$ cm, determinarne una corretta espressione adimensionale.
   a) A: $Fv^9 \log(v^2/(ah))/(m\,a^5h^4)$
   b) B: $Fv^2e^{(v/a\,h)}/(m\,a^2h)$
   c) C: $\pi F^{3/2}v^6/\sqrt{m^3a^9h^6}$
   d) D: Nessuna delle espressioni proposte è una corretta espressione adimensionale
   e) E: $F^2v^6/(m^2a^5h^2)$
   f) F: $2Fv^7/(m\,a^5h^3)$

A $\square$ B $\square$ C $\square$ D $\square$ E $\square$ F $\square$

5. Un cannone spara proiettili con velocità iniziale di modulo 15.7 m/s e alzo (angolo rispetto all'orizzontale) di 0.759 rad. Determinare di che fattore aumenta la gittata, se la velocità di espulsione del proiettile aumenta di un fattore 3.

6. Sul piano, si considerino i due punti A e B di coordinate polari rispettive: $\rho_A = 1.84$ m, $\phi_A = 2.81$ rad e $\rho_B = 3.80$ m, $\phi_B = 4.20$ rad. Un punto materiale P si muove da A a B, con velocità di modulo 4.42 m/s, seguendo due linee coordinate polari, una radiale e l'altra azimutale (in un ordine non predefinito). Determinare la lunghezza della traiettoria più breve, in metri.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{2.72}$ C $\boxed{4.52}$ D $\boxed{6.32}$ E $\boxed{8.12}$ F $\boxed{9.92}$

7. Un punto P, nella posizione di coordinate cartesiane ($x = \sqrt{3}$ m, $y = 1$ m, $z = 2.12$ m), ha una velocità $\mathbf{v} = v_\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho$, con $v_\rho = 4.78$ m/s, e un'accelerazione $\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{e}}_x + a_y \hat{\mathbf{e}}_y$, con $a_x = a_y = 6.01$ m/s^2. Determinare $\frac{d v_\rho}{d t}$ in m/s^2, nella posizione data.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{1.01}$ C $\boxed{2.81}$ D $\boxed{4.61}$ E $\boxed{6.41}$ F $\boxed{8.21}$

8. Nel caso del problema precedente (7), determinare il modulo dell'accelerazione centripeta (cioè normale alla traiettoria), in m/s^2.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{2.20}$ C $\boxed{4.00}$ D $\boxed{5.80}$ E $\boxed{7.60}$ F $\boxed{9.40}$

9. Uno studente vuole verificare la validità di una teoria in cui la seconda legge di Newton, nel caso di moti unidimensionali, sia sostituita da $f = m + a$, dove a è l'accelerazione definita nel modo tradizionale, mentre f e m rappresentano, rispettivamente, nuove definizioni di forza e di massa (con le dimensioni di un'accelerazione). Per effettuare una verifica sperimentale, lo studente prepara un meccanismo che può mettere in movimento piccoli oggetti mediante lo scatto di una molla. Lo studente fa anche l'ipotesi che la (nuova) forza, impressa dalla molla a un oggetto al momento dello scatto, dipenda solo dalla compressione della molla e non dal tipo di oggetto accelerato. Lo studente effettua dapprima due esperimenti, con la stessa compressione della molla, misurando l'accelerazione iniziale di due oggetti diversi detti A e B. Il modulo dell'accelerazione misurata di A vale 0.439 m/s^2, mentre quello dell'accelerazione misurata di B vale 2.94 m/s^2. In un terzo esperimento lo studente cambia la compressione della molla e misura il modulo della nuova accelerazione iniziale ottenuta per A: 2.39 m/s^2. Infine lo studente si accinge a compiere un quarto esperimento, con la molla compressa come nel terzo, ma misurando l'accelerazione iniziale ottenuta per B. Quale valore del modulo dell'accelerazione iniziale di B, in m/s^2, confermerebbe la teoria?

A $\boxed{0}$ B $\boxed{1.29}$ C $\boxed{3.09}$ D $\boxed{4.89}$ E $\boxed{6.69}$ F $\boxed{8.49}$

10. Lo studente del problema precedente (9) effettua infine il quarto esperimento. Quale risultato ottiene, nelle stesse unità? (Si continui a supporre che la forza dipenda solo dalla compressione della molla.)

A $\boxed{0}$ B $\boxed{16.0}$ C $\boxed{34.0}$ D $\boxed{52.0}$ E $\boxed{70.0}$ F $\boxed{88.0}$

Soluzione

Domanda 1

Gli esponenti della corretta formula da usare si ottengono imponendo che la quantità abbia le dimensioni di una lunghezza. Dato che

$$\begin{aligned}[m] &= M \\ [q] &= M^{1/2}L^{3/2}T^{-1} \\ [c] &= LT^{-1}\end{aligned}$$

abbiamo che

$$[m^\alpha q^\beta c^\gamma] = M^{\alpha+\frac{1}{2}\beta}L^{\frac{3}{2}\beta+\gamma}T^{-\beta-\gamma}$$

e quindi deve essere

$$\begin{aligned}\alpha+\frac{1}{2}\beta &= 0 \\ \frac{3}{2}\beta+\gamma &= 1 \\ \beta+\gamma &= 0\end{aligned}$$

Questo sistema ha per soluzione

$$\begin{aligned}\alpha &= -1 \\ \beta &= 2 \\ \gamma &= -2\end{aligned}$$

e quindi

$$r = \frac{q^2}{mc^2} = \frac{\left(6.35\times10^{-10}\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{s}^{-1}\right)^2}{1.01\times10^{-28}\mathrm{g}\,(299792\times10^5\mathrm{cm}\,\mathrm{s}^{-1})^2} = 4.44\times10^{-12}\mathrm{cm}$$

La risposta corretta è dunque la C.

Domanda 2

La definizione di velocità vettoriale media è

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$$

dove $\Delta\vec{s}$ è il vettore spostamento. Dato che nel nostro caso il punto di partenza e il punto di arrivo coincidono, $\Delta\vec{s}=0$ e quindi $\vec{v}_m = 0$. La risposta corretta è dunque la A.

Domanda 3

La velocità scalare media è definita da

$$v_s = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

dove Δs è lo spazio percorso in totale. Indicando con ℓ la lunghezza del tratto rettilineo vale $\Delta s = 2\ell$. Inoltre

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{\ell}{v_1} + \frac{\ell}{v_2}$$

dove v_1 e v_2 sono le velocità all'andata e al ritorno. Quindi

$$v_s = \frac{2\ell}{\frac{\ell}{v_1} + \frac{\ell}{v_2}} = 2\frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 2\frac{58.2 \times 92.7}{58.2 + 92.7}\text{km/h} = 71.5062\text{km/h}$$

In $\mathrm{m\,s^{-1}}$ questo significa $v_s = 71.5062/3.6\text{ms}^{-1} = 19.8268\text{ms}^{-1}$. La risposta corretta è dunque la B.

Domanda 4

Abbiamo anzitutto

$$\begin{aligned}
[F] &= MLT^{-2} \\
[v] &= LT^{-1} \\
[a] &= LT^{-2} \\
[h] &= L
\end{aligned}$$

Possiamo anzitutto escludere la B, dato che l'argomento dell'esponenziale non è adimensionale

$$\left[\frac{v}{ah}\right] = \frac{LT^{-1}}{LT^{-2}L} = L^{-1}T$$

L'argomento del logaritmo nella espressione A è invece correttamente adimensionale:

$$\left[\frac{v^2}{ah}\right] = \frac{L^2T^{-2}}{LT^{-2}L}$$

ma il fattore rimanente non lo è

$$\left[\frac{Fv^9}{ma^5h^4}\right] = \frac{MLT^{-2} \times L^9T^{-9}}{M \times L^5T^{-10} \times L^4} = LT^{-1}$$

L'espressione C è invece adimensionale

$$\left[\frac{F^{3/2}v^6}{\sqrt{m^3a^9h^6}}\right] = \frac{M^{3/2}L^{3/2}T^{-3} \times L^6T^{-6}}{M^{3/2} \times L^{9/2}T^{-9} \times L^3} = M^0L^0T^0$$

ed è quindi la risposta corretta. Verifichiamo che la E e la F sono espressioni non adimensionali. Per risparmiare tempo, sfruttiamo il fatto che $[F] = [ma]$. Per la E abbiamo

$$\left[\frac{F^2 v^6}{m^2 a^5 h^2}\right] = \left[\frac{v^6}{a^3 h^2}\right] = \frac{L^6 T^{-6}}{L^3 T^{-6} L^2} = L$$

e per la F

$$\left[\frac{F v^7}{m a^5 h^3}\right] = \left[\frac{v^7}{a^4 h^3}\right] = \frac{L^7 T^{-7}}{L^4 T^{-8} L^3} = T$$

Domanda 5

La gittata dipende quadraticamente dalla velocità iniziale. Questo si può ricavare da semplici considerazioni dimensionali, dato che una grandezza fisica ℓ con le dimensioni di una lunghezza deve dipendere dai parametri rilevanti come

$$\ell = \frac{v_0^2}{g} F(\theta)$$

dove F è una funzione arbitraria, v_0 è la velocità iniziale e g l'accelerazione di gravità. Alternativamente si può ricordare o ricavare l'espressione esatta

$$\ell = \frac{2 v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g}$$

che chiaramente è della forma richiesta. Segue che se v_0 aumenta di un fattore 3, la gittata aumenterà di un fattore 9.

Domanda 6

Il tratto radiale deve essere necessariamente lungo $\ell_r = |\rho_A - \rho_B|$. Se si esegue prima il tratto azimutale, questo sarà lungo $\ell_a = \rho_A \Delta\phi$, con

$$\Delta\phi = \begin{cases} |\phi_A - \phi_B| & \text{se } |\phi_A - \phi_B| < \pi \\ \pi - |\phi_A - \phi_B| & \text{se } |\phi_A - \phi_B| < \pi \end{cases}$$

Se si esegue per secondo sarà invece $\ell_a = \rho_B \Delta\phi$. Per rendere minimo $\ell_a + \ell_b$ dobbiamo quindi scegliere il tratto azimutale più breve, e dato che nel nostro caso $\rho_B > \rho_A$ dovremo prima muoverci lungo la linea azimutale. Di conseguenza

$$\begin{aligned} \ell_r + \ell_a &= |\rho_A - \rho_B| + \rho_A \Delta\phi \\ &= 3.80 - 1.84 + 1.84\,(4.20 - 2.81)\,\text{m} \\ &= 4.5176\text{m} \end{aligned}$$

La risposta corretta è dunque la C.

Domanda 7

Dato che

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

e che

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_\rho \hat{e}_\rho\right) = \frac{dv_\rho}{dt}\hat{e}_\rho + v_\rho \frac{d\hat{e}_\rho}{dt}$$

abbiamo

$$a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y = \frac{dv_\rho}{dt}\hat{e}_\rho + v_\rho \frac{d\hat{e}_\rho}{dt}$$

Calcoliamo il prodotto scalare di ambo i membri con $\hat{e}_\rho$. Otteniamo

$$a_x \hat{e}_x \cdot \hat{e}_\rho + a_y \hat{e}_y \cdot \hat{e}_\rho = \frac{dv_\rho}{dt}\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\rho + v_\rho \frac{d\hat{e}_\rho}{dt} \cdot \hat{e}_\rho \tag{8.4.1}$$

Notiamo adesso che

$$\hat{e}_\rho = \frac{x\hat{e}_x + y\hat{e}_y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{e}_x + \frac{1}{2}\hat{e}_y$$

dove x e y sono le prime due coordinate cartesiane del punto P. Inoltre la derivata di un versore è perpendicolare la versore stesso, come si dimostra facilmente notando che

$$0 = \frac{d}{dt}(1) = \frac{d}{dt}\left(\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\rho\right) = 2\hat{e}_\rho \cdot \frac{d\hat{e}_\rho}{dt}$$

Dalla (8.4.1) segue allora che

$$\frac{dv_\rho}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}a_x + \frac{1}{2}a_y = 8.20981\mathrm{ms}^{-1}$$

La risposta corretta è quindi la F.

Domanda 8

Possiamo scomporre l'accelerazione in componente normale e tangente alla traiettoria

$$\vec{a} = a_\perp \hat{n} + a_\parallel \hat{\tau}$$

Ma nel nostro caso $\hat{\tau} = \hat{e}_\rho$, e quindi $a_\parallel$ è la quantità determinata precedentemente, $a_\parallel = \frac{dv_\rho}{dt}$. Calcolando il modulo quadro abbiamo dunque

$$|\vec{a}|^2 = a_\perp^2 + \left(\frac{dv_\rho}{dt}\right)^2$$

e quindi

$$a_\perp = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 - \left(\frac{dv_\rho}{dt}\right)^2} = 2.1998\mathrm{ms}^{-2}$$

La risposta corretta è quindi la B.

Domanda 9

Notiamo che eseguendo due esperimenti a forza fissata vale

$$a_1 - a_2 = m_2 - m_1$$

Dal risultato del primo e secondo esperimento possiamo quindi determinare la differenza tra le due "masse"

$$m_A - m_B = a_2 - a_1 = (2.94 - 0.439)\,\mathrm{ms}^{-2} = 2.501\mathrm{ms}^{-2}$$

Possiamo adesso predire la differenza di accelerazioni che avremo nel terzo e quarto esperimento

$$a_4 - a_3 = m_A - m_B$$

e dall'esito del terzo predire il risultato del quarto

$$a_4 = m_A - m_B + a_3 = (2.501 + 2.39)\,\mathrm{ms}^{-2} = 4.891\mathrm{ms}^{-2}$$

La risposta corretta è dunque la D.

Domanda 10

Utilizzando la corretta legge della dinamica abbiamo per due esperimenti a forza fissata

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{a_2}{a_1}$$

e dal risultato del primo e secondo esperimento possiamo determinare il rapporto delle masse

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{2.94}{0.439} = 6.69704$$

Possiamo adesso predire il rapporto delle accelerazioni che avremo nel terzo e quarto esperimento

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{m_A}{m_B}$$

e dall'esito del terzo predire il risultato del quarto

$$a_4 = \frac{m_A}{m_B} a_3 = 6.69704 \times 2.39\mathrm{ms}^{-2} = 16.0059\mathrm{ms}^{-2}$$

La risposta corretta è dunque la B.