Testo e soluzione delle prove scritte e delle prove in itinere del corso di Fisica 1
Dipartimento di Fisica dell'Università di Pisa

Fisica 1: Prove Scritte

Dario Buttazzo, Giancarlo Cella, Mauro Dell'Orso, Francesco Fidecaro

Versione del 22 marzo 2018

Commento introduttivo

Questa raccolta di esercizi, problemi e soluzioni è stata elaborata principalmente dal dott. Giancarlo Cella, con il contributo degli altri co-docenti dell'insegnamento di Fisica 1 per il Corso di Laurea in Fisica (classe L-30) dell'Università di Pisa, a partire dai testi effettivamente proposti agli studenti fin dal primo anno di istituzione del nuovo Corso di Laurea (riforma universitaria solitamente identificata col Decreto Ministeriale 17 del 2010).

Il lavoro del dott. Cella è di grande valore didattico e, già dopo aver sfogliato poche pagine, ci si rende conto facilmente che la raccolta è permeata dalla pluriennale esperienza diretta di insegnamento a fianco del prof. Francesco Fidecaro. Chiarezza, sinteticità e completezza sono sostantivi che ben descrivono non solo la qualità delle soluzioni, ma spesso anche quella dei testi dei problemi.

Certamente lo studente che userà questa raccolta come strumento per esercitarsi, oltre che per verificare il proprio grado di preparazione, ne trarrà soddisfazione e grande giovamento.

È mio fermo auspicio che l'insegnamento di Fisica 1 continui nel solco già tracciato in passato e questo strumento costituisce una delle garanzie più importanti che l'esperienza precedente sia correttamente valorizzata.

Mauro Dell'Orso

Indice

Parte I.

Prove Scritte

1. Prove Scritte

1.1. 11 settembre 2008

Problema 1 (15 punti)

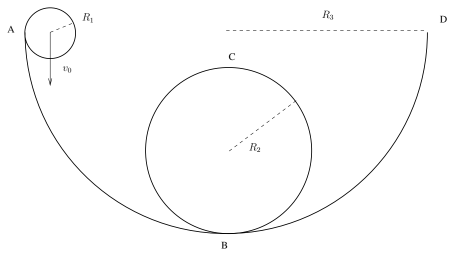


Figura 1.1.: La guida composta dai tratti $A - B$, $B - C$, $C - B$ e $B - D$.

La guida in Figura 1.1 è formata da settori di circonferenza, di raggio R_2 e $R_3 > R_2$ come in figura, che sono collegati nella sequenza $A - B$, $B - C$, $C - B$ e $B - D$. Un disco di raggio $R_1 < R_2$ e massa m rotola senza strisciare sulla guida, partendo dal punto A con velocità del centro di massa $v_{cm} = v_0$.

1. Calcolare in modulo, direzione e verso la reazione vincolare della guida immediatamente prima e immediatamente dopo il primo passaggio per il punto B e dire se essa è impulsiva al momento del passaggio.

2. Ponendo $v_0 = 0$ determinare il massimo valore di R_2 per il quale la guida viene percorsa completamente, considerando il vincolo monolatero.

3. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno al punto B.

Problema 2 (15 punti)

Il recipiente in Figura 1.2 è chiuso da un setto scorrevole $\mathcal{S}$. Recipiente e setto sono impermeabili al calore, ed il setto ha massa trascurabile. Il volume interno è ulteriormente diviso in due parti da una parete rigida, che permette invece il contatto termico tra le due parti. Nella parte inferiore si trova una massa M di ghiaccio a $0\,°C$, in quella superiore n moli di un gas perfetto. L'esterno del recipiente si trova a pressione atmosferica.

1. Determinare il volume V del gas nella condizione iniziale.

2. Si comprime adesso il setto superiore fino a portare la temperatura del gas a $20\,°C$ in modo reversibile. Determinare la dipendenza della pressione del gas dal suo volume per questa trasformazione, e rappresentarla su un grafico. Di quanto è variata l'entropia del sistema?

3. Supponendo di utilizzare il sistema come sorgente fredda, e che l'ambiente esterno possa essere considerato un bagno termico a temperatura $T = 20\,°C$, trasferendo calore mediante una macchina termica, determinare il massimo lavoro estraibile.

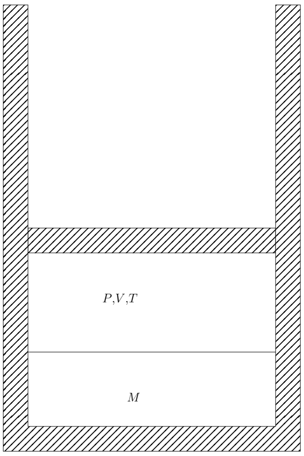


Figura 1.2.:

Soluzione primo problema

Domanda 1

Dato che l'energia totale si conserva

$$E = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + mgz \tag{1.1.1}$$

e che velocità del centro di massa e velocità angolare del disco sono legate da $v_{cm} = -R_1\omega$ segue che

$$E = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I_{cm}}{R_1^2}\right)v_{cm}^2 + mgz = \frac{3}{4}mv_{cm}^2 + mgz \tag{1.1.2}$$

Questo significa che la velocità del centro di massa dipende solo dalla sua posizione z. Quindi immediatamente prima e immediatamente dopo B v_{cm} non sarà cambiata (nemmeno in direzione, dato che sarà sempre orizzontale) e quindi non è presente nessuna forza impulsiva.

Il centro di massa percorre una traiettoria circolare, per cui immediatamente prima di B sarà

$$m\frac{v_{cm}^2}{R_3 - R_1} = N - mg \tag{1.1.3}$$

e immediatamente dopo

$$m\frac{v_{cm}^2}{R_2 - R_1} = N - mg \tag{1.1.4}$$

da cui si deduce che la reazione normale della guida è diversa.

Si può osservare che in B l'accelerazione tangenziale del centro di massa è nulla: questo si ricava direttamente scrivendo l'energia nella forma

$$E = \frac{3}{4}m\left(R_3 - R_1\right)^2\dot{\theta}^2 + mg\left(R_3 - R_1\right)\left(1 - \cos\theta\right) \tag{1.1.5}$$

valida prima di B e derivando rispetto al tempo

$$\dot{E} = \frac{3}{2} m \left(R_3 - R_1\right)^2 \dot{\theta}\ddot{\theta} + mg \left(R_3 - R_1\right) \dot{\theta} \sin\theta = 0 \tag{1.1.6}$$

si ottengono le equazioni del moto

$$\frac{3}{2} m \left(R_3 - R_1\right)^2 \ddot{\theta} + mg \left(R_3 - R_1\right) \sin\theta = 0 \tag{1.1.7}$$

che permettono di concludere $\ddot{\theta} = 0$ in $\theta = 0$. Analogamente si può derivare l'equazione del moto valida dopo B

$$\frac{3}{2} m \left(R_2 - R_1\right)^2 \ddot{\theta} + mg \left(R_2 - R_1\right) \sin\theta = 0 \tag{1.1.8}$$

in entrambi i casi si è utilizzata come coordinata l'angolo tra la direzione verticale e la normale alla guida.

Dato che non c'è accelerazione tangenziale, non si avranno forze orizzontali, e la reazione ha la sola componente normale discontinua calcolata precedentemente.

Domanda 2

La velocità nel punto C si calcola dalla conservazione dell'energia:

$$mgR_3 = \frac{3}{4} m v_{cm}^2 + mg \left(2R_2 - R_1\right) \tag{1.1.9}$$

da cui

$$v_{cm}^2 = \frac{4}{3} g \left(R_1 + R_3 - 2R_2\right) \tag{1.1.10}$$

ma per poter passare deve essere

$$m \frac{v_{cm}^2}{\left(R_2 - R_1\right)} \geq mg \tag{1.1.11}$$

da cui

$$\frac{4}{3} \left(R_1 + R_3 - 2R_2\right) \geq \left(R_2 - R_1\right) \tag{1.1.12}$$

e quindi

$$R_2 \leq \frac{7R_1 + 4R_3}{11} \tag{1.1.13}$$

Domanda 3

Il periodo è la somma di un semiperiodo a sinistra di B più un semiperiodo a destra. Il primo è determinato dalla equazione del moto scritta in precedenza, sviluppata per piccole oscillazioni:

$$\frac{3}{2} m \left(R_3 - R_1\right)^2 \ddot{\theta} + mg \left(R_3 - R_1\right) \theta = 0 \tag{1.1.14}$$

da cui

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{3\left(R_3 - R_1\right)}{2g}} \tag{1.1.15}$$

e analogamente la seconda

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{3\left(R_2 - R_1\right)}{2g}} \tag{1.1.16}$$

quindi

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} = \pi\sqrt{\frac{3}{2g}}\left(\sqrt{R_3 - R_1} + \sqrt{R_2 - R_1}\right) \tag{1.1.17}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che il gas è in equilibrio termico con il ghiaccio deve essere

$$P_{atm}V_0 = nRT_0 \tag{1.1.18}$$

dove $T_0 = 0\,°C$, da cui

$$V = V_0 = \frac{nRT_0}{P_{atm}} \tag{1.1.19}$$

Domanda 2

Finchè del ghiaccio è presente, la temperatura del sistema è fissata a T_0. Quindi

$$P = \frac{nRT_0}{V} \tag{1.1.20}$$

Dal primo principio segue che

$$\delta Q = 0 = \lambda dm + PdV \tag{1.1.21}$$

dove dm è la massa di ghiaccio che si scioglie e λ il calore latente di fusione. Segue che

$$nRT_0\frac{dV}{V} + \lambda dm \tag{1.1.22}$$

e quindi quando tutto il ghiaccio si è sciolto il volume è diventato

$$V_1 = V_0 \exp\left(-\frac{\lambda M}{nRT_0}\right) \tag{1.1.23}$$

Da questo momento in poi vale

$$\delta Q = 0 = \left(C + nc_V\right) dT + PdV \tag{1.1.24}$$

dove C è la capacità termica dell'acqua. Abbiamo quindi

$$(C + nc_V)\int_{T_0}^{T}\frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V} nR\frac{dV}{V} = 0 \tag{1.1.25}$$

ossia

$$(C + nc_V)\log\frac{T}{T_0} + nR\log\frac{V}{V_1} = 0 \tag{1.1.26}$$

che si può esprimere nella forma

$$V^{nR}T^{C+nc_V} = \text{cost} \tag{1.1.27}$$

oppure

$$PV^{\beta} = \text{cost} \tag{1.1.28}$$

dove

$$\beta = \frac{c_P + C/n}{c_V + C/n} \tag{1.1.29}$$

Quindi la trasformazione si rappresenta come una isoterma per $V_1 < V < V_0$, e come una adiabatica con un esponente modificato per $V_f < V < V_1$. Il volume finale si ottiene dalla (1.1.27):

$$V_f = V_1\left(\frac{T_0}{T_f}\right)^{\frac{C+nc_V}{nR}} \tag{1.1.30}$$

con $T_f = 20\,°C$.

Dato che il sistema non scambia calore con l'esterno la sua variazione di entropia è nulla.

Domanda 3

Sia δQ_1 il calore assorbito dall'ambiente e δQ_2 quello ceduto al sistema. Chiaramente $W = Q_1 - Q_2$. Fino a quando è presente del ghiaccio le temperature sono fissate, e dato che l'entropia totale non varia deve essere

$$\frac{Q_2}{T_0} = \frac{Q_1}{T_f} \tag{1.1.31}$$

e d'altra parte $Q_2 = \lambda M$, quindi

$$W = \left(\frac{T_f}{T_0} - 1\right)\lambda M \tag{1.1.32}$$

sarà il lavoro prodotto in questa prima fase.

Appena tutto il ghiaccio si è sciolto deve essere

$$\delta Q_2 = (C + nc_V)\,dT + PdV \tag{1.1.33}$$

$$dS = (C + nc_V)\,\frac{dT}{T} + \frac{P}{T}dV - \frac{\delta Q_1}{T_f} = 0 \qquad (1.1.34)$$

Integrando la seconda relazione otteniamo, tenendo conto che la pressione è costante

$$Q_1 = T_f\,(C + nc_V + nR)\log\frac{T_f}{T_0} \qquad (1.1.35)$$

e dalla prima

$$Q_2 = (C + nc_V + nR)\,(T_f - T_0) \qquad (1.1.36)$$

da cui otteniamo il risultato finale

$$W = \left(\frac{T_f}{T_0} - 1\right)\lambda M + (C + nc_P)\left[T_f\log\frac{T_f}{T_0} - (T_f - T_0)\right] \qquad (1.1.37)$$

1.2. 12 febbraio 2009

Problema 1 (15 punti)

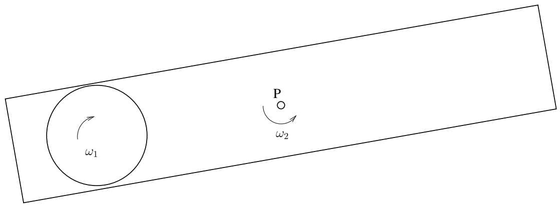


Figura 1.3.: La scatola rotante e il disco al suo interno considerati nel problema.

Il disco in Figura 1.3, di massa m e raggio R, è libero di ruotare e di scivolare all'interno della scatola rettangolare in figura, di lunghezza ℓ. La scatola può ruotare liberamente attorno al perno centrale P in figura, e il suo momento di inerzia rispetto ad esso è I. Si supponga inizialmente che non vi sia attrito, e che gli urti con le pareti siano elastici.

1. Trovare tre quantità conservate indipendenti per il sistema.
2. Discutere le possibili traiettorie per il centro di massa del disco.
3. Supporre adesso che vi sia attrito tra il disco e le pareti terminali corte della scatola, e che l'urto con esse non sia più elastico. Se inizialmente questa non ruota e il disco si trova al centro di essa con velocità v_0 e velocità angolare ω_0, calcolare le velocità angolari finali ω_1 e ω_2 dei due corpi.

Problema 2 (15 punti)

Una mole di gas perfetto è contenuta in un cilindro di sezione S chiuso da un pistone mobile. Tra pistone e cilindro è presente attrito, che si oppone al movimento del pistone con una forza costante F_a. Il gas è costantemente in equilibrio con un bagno termico a temperatura T_0.

1. Determinare il calore ceduto dal sistema gas+cilindro+pistone in un'espansione da un volume V_1 a un volume V_2.
2. Stessa domanda nella compressione da V_2 a V_1.
3. Determinare la variazione di entropia del gas e del bagno termico nelle due trasformazioni.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Dato che non vi sono attriti, l'energia cinetica del sistema si conserva. Inoltre le uniche forze esterne sono applicate al perno, e quindi si conserverà il momento angolare totale.

Infine, consideriamo il momento angolare del solo disco rispetto al suo centro di massa. Dato che le uniche forze che agiscono sul disco sono perpendicolari ad esso e quindi hanno braccio nullo, anche questo si conserverà.

Domanda 2

Scriviamo le tre quantità conservate determinate precedentemente. Per l'energia cinetica abbiamo

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}I_D\omega^2$$

dove abbiamo indicato con θ l'angolo di rotazione della scatola, con r la distanza del centro di massa del disco dal perno, con ω la velocità angolare del disco e con I_D il suo momento di inerzia.

Per quanto riguarda il momento angolare totale abbiamo

$$L = I\dot{\theta} + mr^2\dot{\theta} + I_D\omega$$

e per il momento angolare del disco

$$L_D = I_D\omega$$

Da questa ultima relazione segue che la velocità angolare ω è costante.

Possiamo ricavare $\dot{\theta}$ dalla conservazione del momento angolare

$$\dot{\theta} = \frac{L - I_D\omega}{I + mr^2} \tag{1.2.1}$$

e riscrivere la legge di conservazione dell'energia nella forma

$$E' \equiv E - \frac{1}{2}I_D\omega^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{(L - I_D\omega)^2}{I + mr^2} \equiv \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r) \tag{1.2.2}$$

che definisce il potenziale efficace $U_{eff}(r)$ e la costante E'. Possiamo adesso discutere le possibili orbite qualitativamente.

Per questo facciamo riferimento alla Figura 1.4, nella quale è riportato un grafico qualitativo del potenziale efficace. Sono state aggiunte due barriere infinite in $r = \pm(\ell/2 - R)$ che rappresentano le pareti terminali della scatola. Sono inoltre riportati alcuni possibili valori di E' (le linee orizzontali tratteggiate) che corrispondono alle seguenti possibilità:

1. Il centro di massa del disco può essere solo in $r = \ell/2 - R$, e quindi la relativa traiettoria sarà una circonferenza.

2. In questo caso sono l'orbita sarà limitata tra un valore minimo di r corrispondente alla intersezione tra la retta e la curva, e un valore massimo corrispondente alla parete in $r = \ell/2 - R$. L'orbita sarà limitata radialmente in tale intervallo. Il moto angolare sarà determinato dalla Equazione (1.2.1).

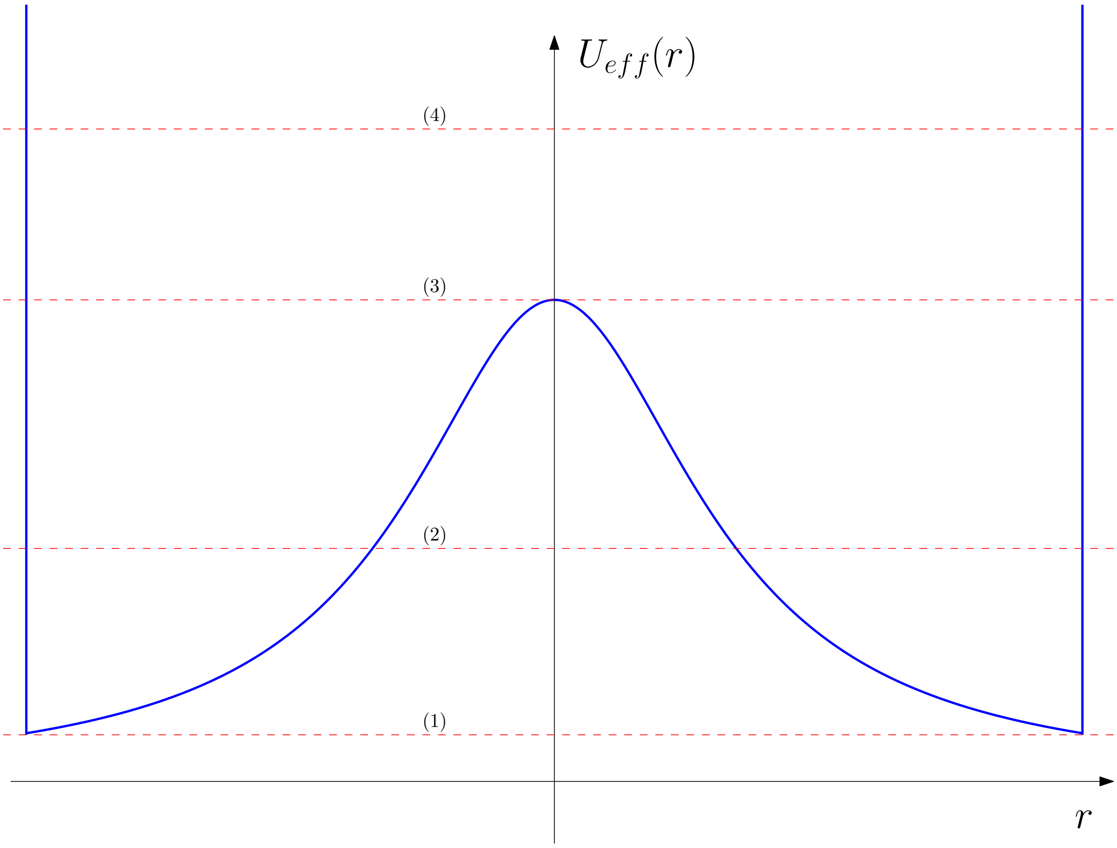


Figura 1.4.: Grafico qualitativo del potenziale efficace definito dall'Equazione (1.2.2). Le linee tratteggiate si riferiscono a diversi possibili valori della costante E'. La barriera di potenziale infinita alle estremità corrisponde alle pareti laterali della scatola.

3. In questo caso il valore minimo per r è $r = 0$, e quello massimo è uguale al precedente. A seconda della posizione e della velocità iniziali il disco si avvicinerà al perno (eventualmente dopo aver rimbalzato una volta su una parete esterna). Dato che la derivata del potenziale efficace nell'intersezione con la retta orizzontale è nulla, il disco impiegherà un tempo infinito per arrivare sul perno, e la traiettoria sarà quindi una spirale che si avvolgerà attorno al centro.

4. In questo caso il disco potrà attraversare la posizione del perno, e quindi si muoverà da un estremo all'altro della scatola, rimbalzando sulle pareti.

Domanda 3

Delle tre leggi di conservazione determinate precedentemente resta valida solo quella del momento angolare totale: infatti a causa dell'attrito viene dissipata energia e sul disco durante l'urto con le pareti agisce un momento.

La configurazione finale sarà quindi quella nella quale il disco si trova a contatto con una delle pareti. Dato che non deve strisciare su di esse dovrà essere $\omega_1 = \omega_2 = \omega_f$. Dalla conservazione del momento angolare totale segue immediatamente che

$$I_D\omega_0 = \left[I + I_D + m\left(\frac{\ell}{2} - R\right)^2\right]\omega_f$$

che permette di determinare ω_f

$$\omega_f = \frac{I_D}{I + I_D + m\left(\frac{\ell}{2} - R\right)^2}\omega_0$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che il gas rimane a temperatura costante, l'energia del sistema pistone+cilindro+gas non cambia e il lavoro fatto su di esso è uguale al calore ceduto. La forza esterna necessaria a mantenere istante per istante il pistone in equilibrio meccanico per una espansione è data da

$$F_{ext} = PS - F_a$$

e quindi

$$\begin{aligned} Q &= -\int_{V_1}^{V_2}\left(P - \frac{F_a}{S}\right)dV \\ &= -\int_{V_1}^{V_2}\left(\frac{RT_0}{V} - \frac{F_a}{S}\right)dV \\ &= RT_0 \log\frac{V_1}{V_2} + \frac{F_a}{S}(V_2 - V_1) \end{aligned}$$

Domanda 2

In questo caso la forza di attrito cambia verso, e quindi

$$\begin{aligned} Q &= -\int_{V_2}^{V_1}\left(P + \frac{F_a}{S}\right)dV \\ &= -\int_{V_2}^{V_1}\left(\frac{RT_0}{V} + \frac{F_a}{S}\right)dV \\ &= RT_0 \log\frac{V_2}{V_1} + \frac{F_a}{S}(V_2 - V_1) \end{aligned}$$

Domanda 3

Per il bagno termico la variazione di entropia nelle due trasformazioni è

$$\Delta S_1 = R \log \frac{V_1}{V_2} + \frac{F_a}{T_0 S}(V_2 - V_1)$$
$$\Delta S_2 = R \log \frac{V_2}{V_1} + \frac{F_a}{T_0 S}(V_2 - V_1)$$

e complessivamente

$$\Delta S = \frac{2F_a}{T_0 S}(V_2 - V_1)$$

Per il gas abbiamo invece due trasformazioni isoterme, e quindi

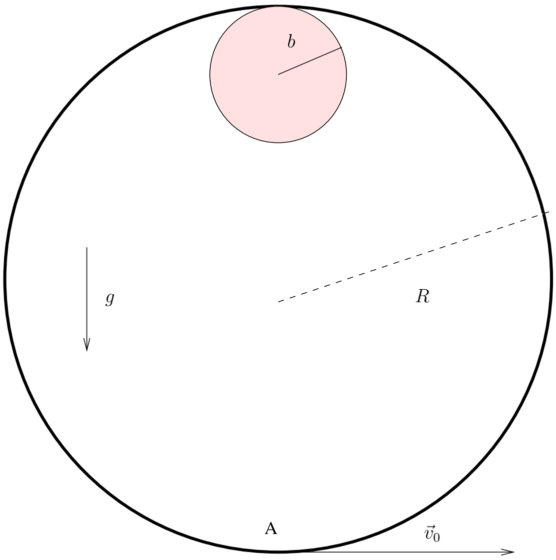
$$\Delta S'_1 = R \log \frac{V_2}{V_1}$$
$$\Delta S'_2 = R \log \frac{V_1}{V_2}$$

e quindi complessivamente

$$\Delta S' = 0$$

1.3. 21 gennaio 2010

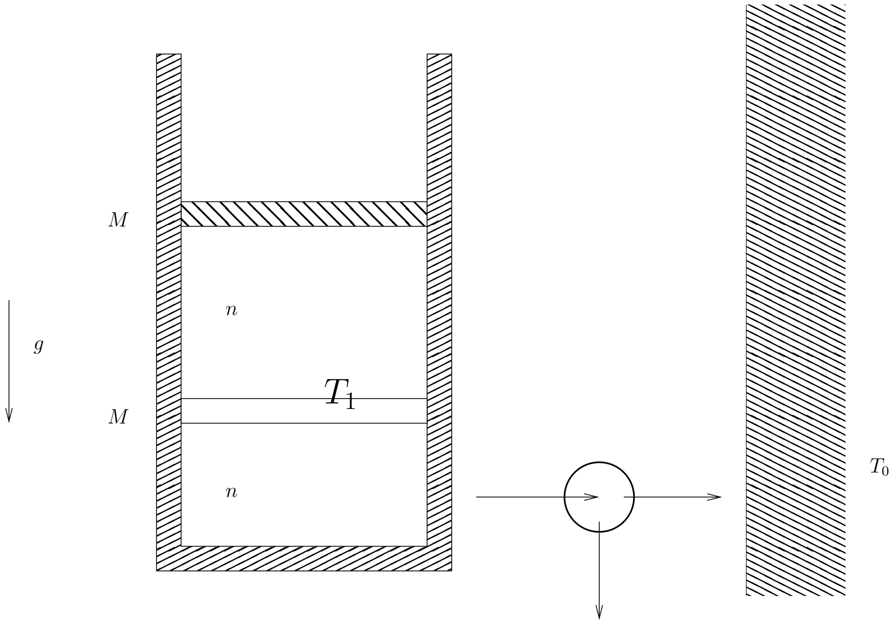
Problema 1 (15 punti)



L'anello sottile in figura, di massa M e raggio R, può ruotare senza strisciare su un perno circolare di raggio b sul quale è appoggiato, ed inizialmente si trova con il centro di massa nella posizione più bassa possibile, mentre il suo estremo inferiore (indicato in figura con A) si muove con velocità v_0 in modulo.

1. Per quale valore minimo di v_0 il centro di massa dell'anello riesce a compiere un giro completo?
2. Dopo tale giro completo dove si trova A?
3. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.

Problema 2 (15 punti)



Il recipiente cilindrico in figura di sezione S è diviso in due scomparti da dei setti scorrevoli senza attrito di massa M. Il setto intermedio permette scambi di calore, mentre recipiente e setto superiore sono termicamente isolanti. Ciascuno scomparto contiene n moli di gas perfetto, ad una temperatura iniziale T_1. Si trascuri la pressione atmosferica esterna.

1. Calcolare il volume dei due scomparti.

2. Una macchina ciclica reversibile usa il sistema come sorgente calda, e come sorgente fredda un bagno termico di temperatura $T_0 < T_1$. Determinare il massimo lavoro estraibile.

3. Mentre il sistema è nello stato iniziale si raddoppia istantaneamente la forza di gravità. Determinare la temperatura finale, all'equilibrio termodinamico.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Usiamo come coordinata l'angolo tra il segmento che congiunge il centro del perno al punto di contatto e la direzione verticale. Il centro di massa dell'anello compie un moto circolare attorno al centro del perno, di raggio $R - b$ e velocità angolare $\dot{\theta}$.

Detta ω la velocità angolare dell'anello, dovrà essere

$$R\omega = (R - b)\dot{\theta} \tag{1.3.1}$$

dato che esso ruota istante per istante attorno al punto di contatto. Potremo scrivere quindi l'energia del sistema nella forma

$$E = \frac{1}{2} I \left(\frac{R-b}{R} \right)^2 \dot{\theta}^2 - Mg\,(R-b)\cos\theta \tag{1.3.2}$$

Eguagliando l'energia iniziale a quella nell'istante in cui il centro di massa è nella posizione più alta troviamo

$$\frac{1}{2} I \left(\frac{R-b}{R} \right)^2 \dot{\theta}_i^2 - Mg\,(R-b) = \frac{1}{2} I \left(\frac{R-b}{R} \right)^2 \dot{\theta}_f^2 + Mg\,(R-b) \tag{1.3.3}$$

dove I è il momento di inerzia rispetto al punto di contatto e vale $I = 2MR^2$. Questo significa

$$\dot{\theta}_f^2 = \dot{\theta}_i^2 - \frac{4MgR^2}{I\,(R-b)} \tag{1.3.4}$$

D'altra parte dato che il centro di massa si muove di moto circolare dovremo

$$-M(R-b)\dot{\theta}_f^2 + Mg = -N < 0 \tag{1.3.5}$$

avere una accelerazione centripeta positiva

$$M\,(R-b)\,\dot{\theta}_f^2 - Mg = M\,(R-b)\,\dot{\theta}_i^2 - \frac{4M^2gR^2}{I} - Mg > 0 \tag{1.3.6}$$

e quindi

$$\theta_i^2 > \frac{3g}{(R-b)} \tag{1.3.7}$$

La velocità iniziale del punto A vale

$$v_0 = 2R\omega_i = 2(R-b)\dot{\theta}_i \tag{1.3.8}$$

e quindi

$$\frac{v_0^2}{4\,(R-b)^2} > \frac{3g}{(R-b)} \tag{1.3.9}$$

ossia

$$v_0 > \sqrt{12g\,(R-b)} \tag{1.3.10}$$

Domanda 2

In un giro completo θ varia di 2π. Dalla relazione tra ω e $\dot{\theta}$ segue che il corpo rigido avrà ruotato di un angolo

$$\alpha = \frac{2\pi\,(R-b)}{R} \tag{1.3.11}$$

e quindi il punto A si troverà ruotato dello stesso angolo rispetto alla posizione iniziale.

Domanda 3

Sviluppando l'energia per piccoli valori di θ si trova

$$E = \frac{1}{2} I \left(\frac{R-b}{R} \right)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M g (R-b) \theta^2 \tag{1.3.12}$$

da cui segue che la frequenza delle piccole oscillazioni vale

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{M g (R-b) \frac{R^2}{I (R-b)^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{2 (R-b)}} \tag{1.3.13}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

La pressione dello scomparto in alto vale $P_+ = Mg/S$, quella dello scomparto in basso $P_- = 2Mg/S$. Abbiamo quindi

$$V_{+,0} = \frac{nRT_1}{P_+} = \frac{nSRT_1}{Mg} \tag{1.3.14}$$

$$V_{-,0} = \frac{1}{2} V_{+,0} \tag{1.3.15}$$

Domanda 2

Detto Q_1 il calore estratto dal sistema e Q_0 quello ceduto al bagno termico avremo per la variazione di entropia

$$\Delta S = \frac{Q_0}{T_0} + 2nc_p \log \frac{T_0}{T_1} = 0 \tag{1.3.16}$$

da cui

$$Q_0 = 2nc_p T_0 \log \frac{T_1}{T_0} \tag{1.3.17}$$

Invece dal primo principio abbiamo

$$-Q_1 = 2nc_p (T_0 - T_1) \tag{1.3.18}$$

e quindi

$$W = Q_1 - Q_0 = 2nc_p (T_1 - T_0) \left[1 - \frac{T_0}{T_1 - T_0} \log \frac{T_1}{T_0} \right] \tag{1.3.19}$$

Domanda 3

L'energia del sistema si conserva, e vale

$$U = 2Mg \left(\frac{V_+ + V_-}{S} \right) + 2Mg \frac{V_-}{S} + 2nc_V T \tag{1.3.20}$$

dove T è la temperatura del gas. Appena la gravità raddoppia i volumi e la temperatura hanno il valore iniziale, quindi

$$U = 2n\left(2R + c_V\right)T_1 \tag{1.3.21}$$

mentre nella condizione di equilibrio finale avremo

$$V_+ = \frac{nSRT}{2Mg} \tag{1.3.22}$$

$$V_- = \frac{1}{2}V_+ \tag{1.3.23}$$

e quindi

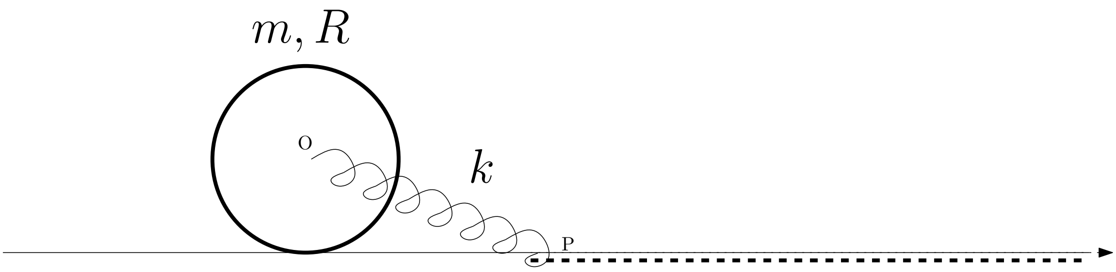
$$2n\left(2R + c_V\right)T_1 = 2n\left(R + c_V\right)T \tag{1.3.24}$$

da cui

$$T = \frac{2R + c_V}{R + c_V}T_1 \tag{1.3.25}$$

1.4. 23 giugno 2010

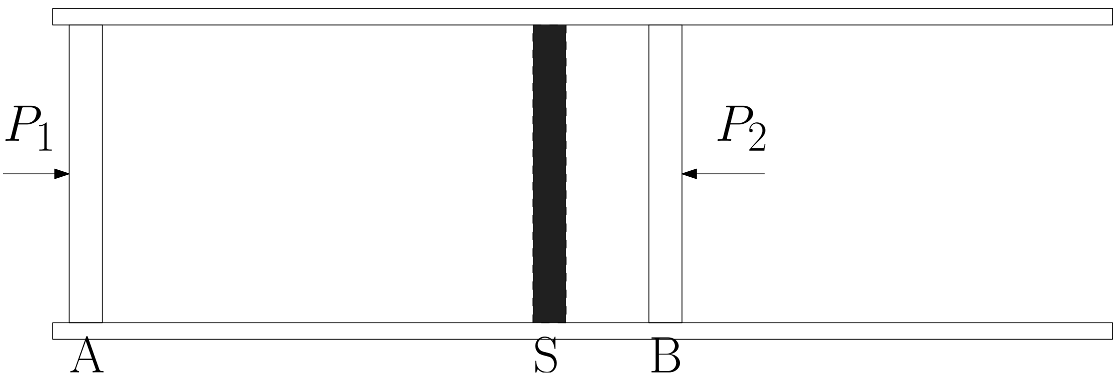
Problema 1



Un cilindro di massa m e raggio R è appoggiato su un piano orizzontale, e il suo centro O è collegato ad un punto P del piano da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Inizialmente il punto di appoggio del cilindro si trova a sinistra di P, ad una distanza a da esso. Nella regione a sinistra di P non vi sono attriti, mentre a destra di P il cilindro è vincolato a rotolare senza strisciare. Il cilindro è inizialmente fermo.

1. Determinare la velocità angolare del cilindro e quella del suo centro di massa quando il punto di contatto arriva in P (immediatamente prima).
2. Determinare il massimo allontanamento successivo del punto di contatto da P.
3. Sempre supponendo che il centro di massa del cilindro sia inizialmente immobile, trovare se possibile una velocità angolare iniziale ω_0 per la quale il cilindro ritorna nel punto di partenza dopo una oscillazione completa.

Problema 2



Un certo fluido è descritto dalle equazioni di stato

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{U}{V} \\
T &= 3B\left(\frac{1}{n}\frac{U^2}{V}\right)^{1/3}
\end{aligned}
$$

dove B è una costante positiva e P, V, T, U, n hanno il significato usuale.

1. Rappresentare un ciclo di Carnot nel piano $P - V$, dopo avere determinato le necessarie leggi di dipendenza della pressione dal volume.

2. Determinare l'entropia del fluido in funzione di P, V ed n.

3. n moli del fluido vengono poste inizialmente nello scomparto a sinistra in figura, ad una temperatura T_1. Sul pistone A agisce una pressione esterna costante P_1, che spinge il fluido nello scomparto a destra attraverso un setto poroso S intermedio. Durante tutto il processo sul pistone B agisce una pressione costante $P_2 < P_1$. Determinare la temperatura finale del fluido dopo che questo è completamente passato a destra, e si è raggiunto nuovamente l'equilibrio termodinamico.

Soluzione primo problema

Domanda 1 Le forze che agiscono sul cilindro sono quelle della molla e la forza peso (applicate al centro) e la reazione vincolare al punto di appoggio. Nessuna di queste ha momento rispetto al centro di massa, quindi il momento angolare rispetto ad esso (e quindi la velocità angolare) rimangono nulle.

Per quanto riguarda la velocità del centro di massa immediatamente a sinistra di P, $v_{cm,0}$, applichiamo la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}k\left(a^2+R^2\right)=\frac{1}{2}mv_{cm,0}^2+\frac{1}{2}kR^2$$

da cui troviamo

$$v_{cm,0}=a\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Domanda 2 Nel passaggio dal punto all'immediata sinistra a quello all'immediata destra di P si conserva il momento angolare del cilindro, valutato rispetto al punto di contatto. Questo perchè nessuna delle forze esterne (forza peso, forza della molla, reazione del piano) ha momento rispetto a P. Abbiamo quindi

$$-mv_{cm,0}R=I\omega_1$$

dove ω_1 è la velocità angolare del cilindro immediatamente a destra di P e $I=\frac{3}{2}mR^2$ il suo momento di inerzia (sempre relativo a P). Quindi

$$\omega_1=-\frac{mR}{I}v_{cm,0}=-\frac{2}{3}\frac{v_{cm,0}}{R}=-\frac{2}{3}\frac{a}{R}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Da questo momento si conserva l'energia, il massimo allontanamento ℓ si può determinare quindi scrivendo

$$\frac{1}{2}I\omega_1^2+\frac{k}{2}R^2=\frac{k}{2}\left(R^2+\ell^2\right)$$

ossia

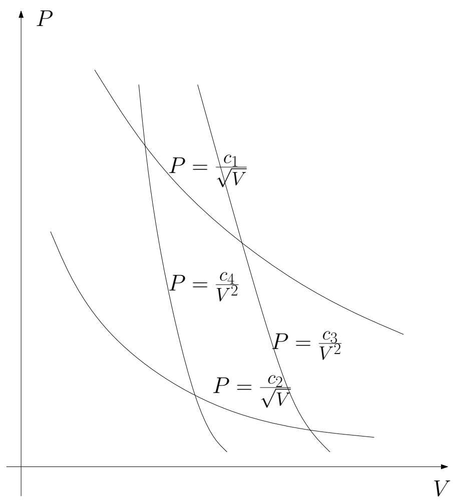
$$\ell = \sqrt{\frac{I}{k}}\omega_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}a$$

Domanda 3 Quando arriva alla immediata sinistra di P il centro di massa del cilindro avrà la velocità $v_{cm,0}$ determinata precedentemente. Per tornare al punto di partenza è necessario che non perda energia nel passaggio all'immediata destra. Questo accade se la reazione vincolare non compie lavoro, cioè se il punto di contatto è istantaneamente immobile. Quindi immediatamente a sinistra di P il cilindro deve essere già in condizioni di puro rotolamento, e questo accadrà se

$$\omega_0 = -\frac{v_{cm,0}}{R}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1



Ricavando l'energia dalla prima equazione di stato e sostituendo nella seconda troviamo

$$T = 3B\left(\frac{1}{n}P^2V\right)^{1/3}$$

quindi in un'isoterma

$$P^2V = n\left(\frac{T}{3B}\right)^3 = \text{costante}$$

In un'adiabatica abbiamo

$$dQ = dU + PdV = 0$$

e quindi

$$d(PV) + PdV = 2PdV + VdP = 0$$

Da questo segue che

$$2\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0$$

e integrando

$$PV^2 = \text{costante}$$

Per il ciclo di Carnot abbiamo quindi la rappresentazione in figura.

Domanda 2 Il differenziale dell'entropia si può scrivere

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dQ}{T} = \frac{n^{1/3}}{3B}\left(\frac{VdP + 2PdV}{P^{2/3}V^{1/3}}\right) \\ &= \frac{n^{1/3}}{3B}\left(\frac{V^{2/3}}{P^{2/3}}dP + 2\frac{P^{1/3}}{V^{1/3}}dV\right) \end{aligned}$$

ma dato che

$$dS = \frac{\partial S}{\partial P}dP + \frac{\partial S}{\partial V}dV$$

deve essere

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial P} &= \frac{1}{3}\frac{n^{1/3}}{B}\frac{V^{2/3}}{P^{2/3}} \\ \frac{\partial S}{\partial V} &= \frac{2}{3}\frac{n^{1/3}}{B}\frac{P^{1/3}}{V^{1/3}} \end{aligned}$$

Integrando la prima equazione otteniamo

$$S = \frac{n^{1/3}}{B}V^{2/3}P^{1/3} + A(V)$$

dove A è una funzione incognita del volume. Se integriamo la seconda troviamo invece

$$S = \frac{n^{1/3}}{B}P^{1/3}V^{2/3} + B(P)$$

dove B è una funzione incognita della pressione. Confrontando troviamo che deve essere $A(V) = B(P) = C$ con C costante. Quindi

$$S = \frac{1}{B}\left(nPV^2\right)^{1/3} + C$$

In accordo con quanto determinato precedentemente, vediamo che in una adiabatica reversibile l'entropia non cambia.

Domanda 3 Dal primo principio segue che

$$U_2 = U_1 + P_1V_1 - P_2V_2$$

quindi le entalpie dello stato iniziale e di quello finale sono le stesse. Per il fluido considerato

$$H = U + PV = 2PV$$

e quindi

$$P_1 V_1 = P_2 V_2$$

D'altra parte dalle equazioni di stato segue che

$$PV = \frac{n}{P} \left(\frac{T}{3B} \right)^3$$

e quindi

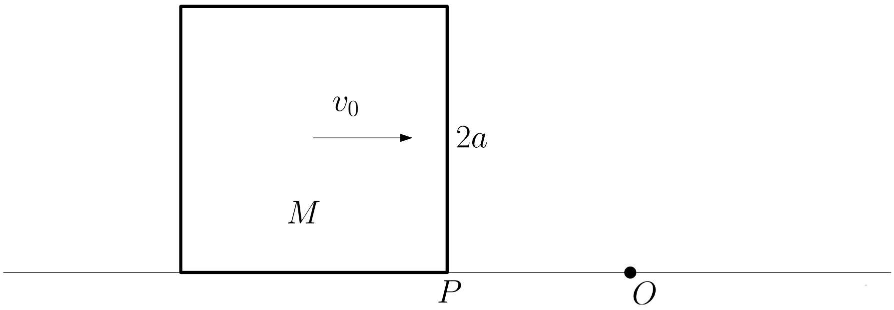
$$\frac{n}{P_1} \left(\frac{T_1}{3B} \right)^3 = \frac{n}{P_2} \left(\frac{T_2}{3B} \right)^3$$

cioè

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{1/3}$$

1.5. 14 luglio 2010

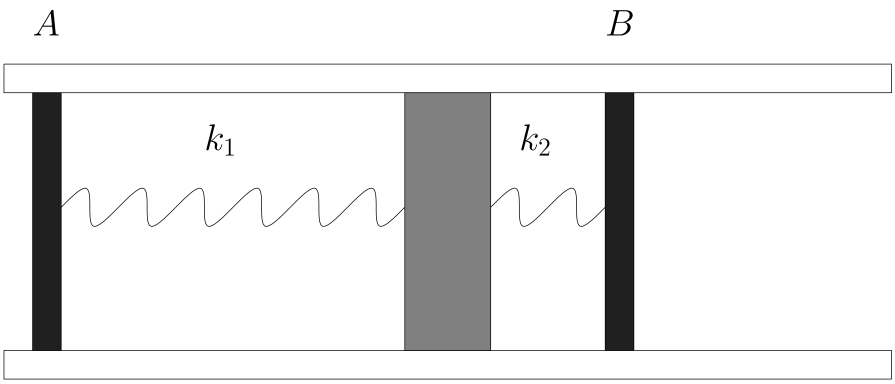
Problema 1



Il cubo in figura di lato $2a$ e massa M si muove con velocità iniziale v_0 su un piano privo di attrito. Può ruotare liberamente attorno al suo spigolo P, ma quest'ultimo non può staccarsi dal piano orizzontale. Nel punto O si trova un ostacolo che impedisce il passaggio di P.

1. Nell'ipotesi che P rimanga fissato ad O trovare una quantità conservata durante l'urto e calcolarne il valore immediatamente dopo questo. La quantità scelta continua a conservarsi anche successivamente?
2. Nella stessa ipotesi della domanda precedente, per quale valore di minimo di v_0 il cubo si capovolge in avanti.
3. Determinare le componenti della velocità del centro di massa del cubo immediatamente dopo l'urto.

Problema 2



Il cilindro in figura, di sezione S, è diviso un due parti da un setto intermedio poroso e chiuso da ambo i lati da pistoni mobili (A e B), collegati al setto intermedio da due molle di costanti elastiche k_1, k_2 e lunghezza a riposo nulla. Recipiente e pistoni sono impermeabili al calore. Inizialmente n moli di gas perfetto si trovano nello scomparto a sinistra, in equilibrio meccanico con il pistone ad una temperatura T_1, mentre il pistone B viene mantenuto aderente al setto poroso.

1. Determinare il volume dello scomparto a sinistra.
2. Si libera il pistone B, e si attende che si stabilisca l'equilibrio. Determinare la temperatura finale del gas.
3. Determinare la variazione di entropia nel processo precedente.

Soluzione

Domanda 1 Scegliendo come polo il punto O, vediamo che durante l'urto le uniche forze rilevanti sono quelle impulsive applicate in esso. Quindi non si hanno momenti impulsivi rispetto ad O, e il momento angolare si conserva. Dato che inizialmente il cubo non ruota si ha

$$\vec{L} = -Mv_0 a\hat{z}$$

con $\hat{z}$ scelto uscente dal piao della figura. Successivamente L non si conserva, poichè la forza di gravità ha momento non nullo rispetto ad O.

Domanda 2 Usando la conservazione di L determiniamo la velocità angolare ω_0 del cubo immediatamente dopo l'urto. Si ha

$$L = -Mv_0 a = I\omega_0$$

dove I è il momento di inerzia del cubo rispetto a P. Dato che da questo momento si conserva l'energia, affinchè il cubo si capovolga deve essere

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 + Mga > Mga\sqrt{2}$$

cioè

$$\omega_0^2 > \frac{2Mga}{I}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

e quindi

$$v_0^2 > \frac{2gI}{Ma}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Domanda 3 Dato che conosciamo un punto fisso, possiamo scrivere

$$\vec{v}_{cm} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{cm}$$

ossia

$$\vec{v}_{cm} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ -a & a & 0 \end{vmatrix} = -a\omega_0\hat{x} - a\omega_0\hat{y} = \frac{Ma^2 v_0}{I}\left(\hat{x}+\hat{y}\right)$$

Soluzione

Domanda 1 Imponiamo l'equilibrio meccanico:

$$k_1 \frac{V_1}{S} = P_1 S = \frac{nRT_1 S}{V_1}$$

da cui

$$V_1 = S\sqrt{\frac{nRT_1}{k_1}} \tag{1.5.1}$$

Domanda 2 Dalla conservazione dell'energia troviamo che

$$nc_V T_1 + \frac{k_1}{2}\frac{V_1^2}{S^2} = nc_V T_f + \frac{k_1}{2}\frac{\tilde{V}_1^2}{S^2} + \frac{k_2}{2}\frac{\tilde{V}_2^2}{S^2}$$

dove $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2$ sono i volumi dei due scomparti nello stato finale. Ma per l'equilibrio meccanico deve essere

$$k_1 \tilde{V}_1 = k_2 \tilde{V}_2 = PS^2 \tag{1.5.2}$$

ed inoltre

$$P\left(\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2\right) = nRT_f$$

da cui

$$\frac{P^2 S^2}{\chi} = nRT_f \tag{1.5.3}$$

dove si è posto

$$\chi = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Eliminando $\tilde{V}_1$, $\tilde{V}_2$ e V_1^2 tramite le equazioni (1.5.2), (1.5.1) otteniamo

$$n\left(c_V + \frac{R}{2}\right) T_1 = nc_V T_f + \frac{1}{2}\frac{P^2 S^2}{\chi}$$

ed utilizzando l'equazione (1.5.3) vediamo che la temperatura non è cambiata,

$$T_f = T_1$$

Domanda 3 L'entropia di un gas perfetto è data da

$$S = nc_V \log T + nR \log V$$

dato che la temperatura non cambia e il volume finale è dato da

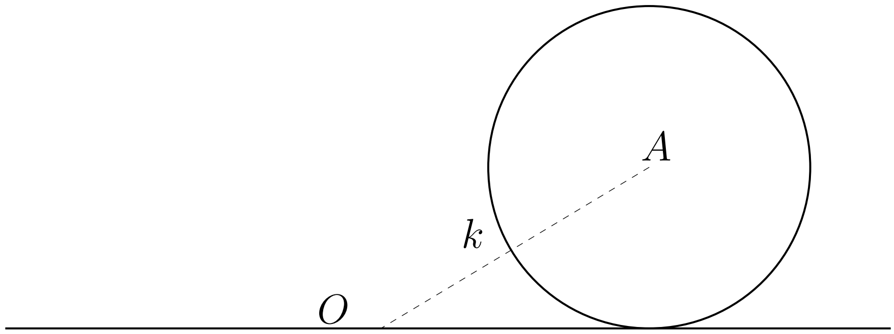
$$\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2 = S\sqrt{nRT_f\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)}$$

otteniamo

$$\Delta S = \frac{1}{2} nR \log \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right)$$

1.6. 10 settembre 2010

Problema 1 (15 punti)



Il cilindro in figura, di raggio R e massa M, rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Il suo centro A è fissato ad un punto O del piano da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Inizialmente A si trova sulla verticale di O.

1. Per quale valore minimo della velocità angolare iniziale il cilindro riesce a compiere un giro completo.
2. Scelta un'opportuna coordinata scrivere l'equazione del moto del cilindro.
3. Determinare la frequenza delle oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.

Problema 2 (15 punti)

Due corpi di capacità termica costante C sono inizialmente ad una temperatura T_i, e sono collegati mediante una macchina termica ciclica. Si vuole raffreddare il primo dei due corpi ad una temperatura finale $T_1 < T_i$, e si trova che per farlo è necessario fare un lavoro W.

1. Supponendo di conoscere W calcolare T_2.
2. Supponendo che la macchina termica sia reversibile, calcolare $W = W_R$.
3. Se in realtà il lavoro necessario è $W = kW_R$, dove k è una costante data, calcolare la variazione di entropia del sistema. Può accadere che $k < 1$?

Soluzione problema 1

Domanda 1 L'energia del sistema vale

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k\left[R^2 + R^2\theta^2\right]$$

dove θ è l'angolo di rotazione del cilindro e $I = \frac{3}{2}mR^2$ il suo momento di inerzia relativo ad un asse passante per il punto di appoggio sul piano. Abbiamo quindi

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = 2kR^2\pi^2$$

da cui

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4kR^2\pi^2}{I}} = \sqrt{\frac{8k\pi^2}{3m}}$$

Domanda 2 Dalla seconda equazione cardinale otteniamo

$$I\ddot{\theta} = -k\ell\frac{R\theta}{\sqrt{R^2+R^2\theta^2}}R$$

dove

$$\ell = \sqrt{R^2+R^2\theta^2}$$

è la lunghezza della molla. Sostituendo abbiamo

$$I\ddot{\theta} + kR^2\theta = 0$$

Domanda 3 Dall'equazione del moto precedente si trova immediatamente

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kR^2}{I}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

Soluzione problema 2

Domanda 1 Se Q_1 è il calore estratto dal primo corpo, e Q_2 quello fornito al secondo, dal primo principio abbiamo

$$Q_2 - Q_1 = W$$

ma d'altra parte

$$\begin{aligned} Q_2 &= C\,(T_2 - T_i) \\ Q_1 &= -C\,(T_1 - T_i) \end{aligned}$$

e quindi

$$W = C\,(T_1 + T_2 - 2T_i)$$

da cui

$$T_2 = \frac{W}{C} + 2T_i - T_1 \tag{1.6.1}$$

Domanda 2 Se la macchina è reversibile l'entropia del sistema non è cambiata. Quest'ultima si scrive come

$$dS = -\frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2}$$

ed integrando

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int_{T_i}^{T_1} \frac{CdT'}{T'} + \int_{T_i}^{T_2} \frac{CdT'}{T'} \\ &= C \log \frac{T_1 T_2}{T_i^2} \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

Quindi

$$T_2 = \frac{T_i^2}{T_1}$$

e

$$W_R = CT_i \left(\frac{T_1}{T_i} + \frac{T_i}{T_1} - 2 \right) \equiv CT_i \left(x + \frac{1}{x} - 2 \right) \tag{1.6.3}$$

con $x = T_1/T_i$.

Domanda 3 Mettendo insieme l'Equazione (1.6.1) e l'Equazione (1.6.2) otteniamo

$$x \left(\frac{kW_R}{CT_i} + 2 - x \right) = e^{\Delta S/C}$$

ossia

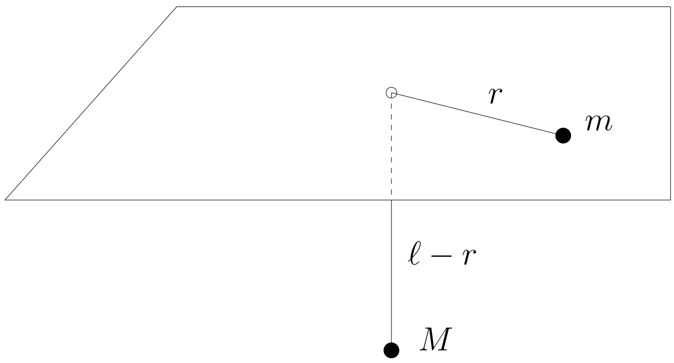
$$(k-1)(x-1)^2 = e^{\Delta S/C} - 1$$

Dato che $\Delta S \geq 0$, segue che $k \geq 1$. Infine

$$\Delta S = C \log \left[1 + (k-1)(x-1)^2 \right]$$

1.7. 10 febbraio 2011

Problema 1 (15 punti)



Una massa m si muove su un piano orizzontale privo di attrito, ed è collegata come in figura ad un'altra massa M mediante una fune inestensibile di lunghezza ℓ. La massa pende verticalmente ed il filo è libero di scorrere.

1. Inizialmente la massa m si muove su un'orbita circolare con $r = \ell/2$. Determinare il periodo.
2. Si prende la massa M e la si sposta molto lentamente verso il basso di un tratto $\ell/4$. Calcolare il periodo della nuova orbita circolare.
3. Si lascia andare improvvisamente la massa M. Determinare il valore massimo e minimo di r della nuova orbita.

Problema 2 (15 punti)

Tre corpi di uguale capacità termica C si trovano inizialmente alle temperature $T_1 = T_0$, $T_2 = 2T_0$ e $T_3 = 5T_0$.

1. Determinare la temperatura finale del sistema se i corpi sono posti in contatto e liberi di scambiarsi spontaneamente calore.
2. Determinare la variazione di entropia del sistema nel caso precedente.
3. Qual'è la massima temperatura a cui è possibile portare uno dei tre corpi se il sistema è isolato.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Ponendo la tensione uguale alla massa per l'accelerazione centripeta abbiamo

$$m\omega^2 \frac{\ell}{2} = Mg$$

e quindi

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell}{2Mg}}$$

Domanda 2

Durante il processo si conserva il momento angolare, e l'orbita resta circolare. Quindi

$$L = m\omega\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = m\omega'\left(\frac{\ell}{4}\right)^2$$

da cui

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\omega}\frac{\omega}{\omega'} = \frac{1}{4}T$$

Domanda 3

Utilizzando il potenziale efficace abbiamo ai punti di inversione

$$\frac{L^2}{2mr^2} + Mgr = \frac{L^2}{2mr_-^2} + Mgr_-$$

dove $r_- = \ell/4$ è la distanza iniziale. Quindi

$$\frac{L^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_-^2}\right) + Mg\left(r - r_-\right) = 0$$

Possiamo scrivere anche

$$\frac{L^2}{2m}\left(r_-^2 - r^2\right) + Mgr^2r_-^2\left(r - r_-\right) = 0$$

che ha per soluzione chiaramente $r = r_-$. Semplificando otteniamo infine

$$\frac{8L^2}{Mmg\ell^2}\left(r_- + r\right) - r^2 = 0$$

da cui

$$r = \frac{4L^2}{Mmg\ell^2} \pm \sqrt{\left(\frac{4L^2}{Mmg\ell^2}\right)^2 + \frac{8L^2r_-}{Mmg\ell^2}}$$

La soluzione accettabile corrisponde alla distanza di massimo allontanamento cercata

$$r = \frac{4L^2}{Mmg\ell^2} + \sqrt{\left(\frac{4L^2}{Mmg\ell^2}\right)^2 + \frac{2L^2}{Mmg\ell}}$$

con

$$L=\sqrt{\frac{mMg\ell^3}{8}}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dalla conservazione dell'energia abbiamo

$$C\left(T_1+T_2+T_3\right)=3CT_f$$

e quindi

$$T_f=\frac{8T_0}{3}$$

Domanda 2

Abbiamo5

$$\begin{aligned}
\Delta S &= C\log\frac{T_f}{T_1}+C\log\frac{T_f}{T_2}+C\log\frac{T_f}{T_3}\\
&= C\log\frac{T_f^3}{T_1T_2T_3}\\
&= C\log\left[\frac{1}{10}\left(\frac{8}{3}\right)^3\right]\simeq 0.64C
\end{aligned}$$

Domanda 3

Possiamo immaginare che nella situazione finale due corpi saranno alla stessa temperatura, dato che se così non fosse potremmo estrarre da essi del lavoro e impiegarlo per innalzare ulteriormente la temperatura del terzo. Abbiamo la conservazione dell'energia:

$$8CT_0=C\left(2T_-+T_+\right)$$

e per la variazione di entropia

$$\Delta S=C\log\frac{T_-^2T_+}{10T_0^3}=0$$

che abbiamo posto nulla dato che il risultato migliore si otterrà operando reversibilmente. Mettendo insieme le due equazioni abbiamo

$$\begin{aligned}
T_-^2T_+ &= 10T_0^3\\
T_- &= 4T_0-\frac{1}{2}T_+
\end{aligned}$$

ed eliminando T_-

$$T_+\left(4T_0-\frac{1}{2}T_+\right)^2=10T_0^3$$

ossia

$$\frac{1}{4}T_+^3-4T_0T_+^2+16T_0^2T_+-10T_0^3=0$$

Ponendo $x=T_+/T_0$

$$x^3-16x^2+64x-40=0$$

che si può scomporre

$$(x-10)\left(x^2-6x+4\right)=0$$

abbiamo quindi le soluzioni

$$\begin{aligned}
T_+ &= 10T_0\\
T_+ &= \left(3-\sqrt{5}\right)T_0\simeq 0.764T_0\\
T_+ &= \left(3+\sqrt{5}\right)T_0\simeq 5.24T_0
\end{aligned}$$

La prima non è accettabile, perchè

$$T_-=4T_0-\frac{1}{2}T_+=-T_0$$

Le altre due sono accettabili, ma quella cercata è la terza. Infatti si ha per essa

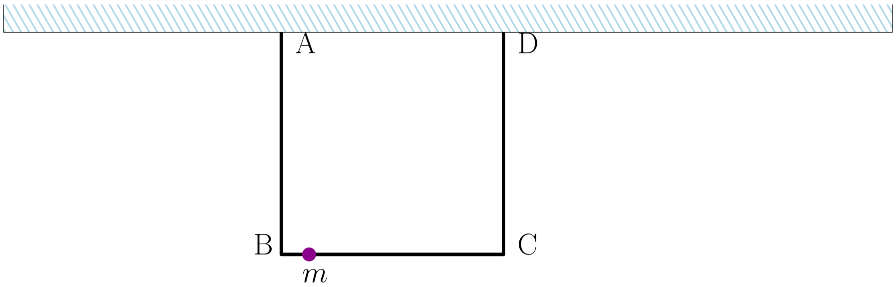
$$T_-=4T_0-\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)T_0\simeq 1.38T_0<T_+$$

mentre la seconda corrisponde a

$$T_-=4T_0-\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)T_0\simeq 3.62T_0>T_+$$

1.8. 27 giugno 2011

Problema 1 (15 punti)



La struttura in figura è composta da tre aste identiche di lunghezza ℓ e massa M. L'angolo delle giunzioni A, B, C e D è libero di variare, ed $\overline{AD} = \ell$. Inoltre una massa puntiforme m è fissata sulla barra BC ad una distanza x da B.

1. Determinare la posizione di equilibrio stabile del sistema.
2. Se il sistema si trova nella posizione di equilibrio precedentemente calcolata, per quale valore minimo dell'energia cinetica iniziale il sistema batte contro il soffitto?
3. Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio, e discuterne la dipendenza da x.

Problema 2 (15 punti)

Una macchina termica e realizzata con una mole di un gas perfetto sottoposto alla trasformazione ciclica che segue:

- Una compressione isoterma ($A \to B$) alla temperatura T_1, dal volume V_A al volume V_B, durante la quale il sistema rimane in contatto con una sorgente di temperatura $T_- < T_1$ tramite una sbarra di resistenza termica R_T.
- Una compressione adiabatica ($B \to C$) che porta il sistema alla temperatura $T_2 > T_1$.
- Una espansione isoterma ($C \to D$) alla temperatura T_2, durante la quale il sistema rimane in contatto con una sorgente di temperatura $T_+ > T_2$ tramite una sbarra identica alla precedente.
- Una espansione adiabatica ($D \to A$) che riporta il sistema alla temperatura T_1.

Si può assumere che lo stato termodinamico del gas sia ben definito istante per istante. Inoltre $T_+ = 9T_-$.

1. Rappresentare la trasformazione nel piano S-T e calcolare il tempo necessario per eseguire le due isoterme.

2. Scegliere le temperature T_1 e T_2 in modo da avere la massima efficienza, e calcolare quest'ultima.

3. Assumendo che la durata delle adiabatiche sia trascurabile rispetto a quello delle isoterme e sapendo che $T_1 = 2T_-$ scegliere le temperatura T_2 in modo da avere la massima potenza. Calcolare in questo caso l'efficienza.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Quando la struttura si piega la sbarra BC resta orizzontale. La posizione di equilibrio stabile è quella che rende minima la posizione del centro di massa del sistema. Detto θ l'angolo che la sbarra AB forma con la verticale sarà

$$y_{cm} = \frac{-2M\frac{\ell}{2}\cos\theta - (M+m)\,\ell\cos\theta}{3M+m}$$

che è minima per $\theta = 0$, cioè nella posizione in figura.

Domanda 2

L'energia cinetica deve essere uguale alla differenza tra energia potenziale iniziale e finale, quindi

$$E_C \geq 2M\frac{\ell}{2}g + (M+m)\ell g$$

Domanda 3

L'energia cinetica del sistema vale

$$E_C = \frac{1}{2}2I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(M+m)\,\ell^2\dot{\theta}^2$$

dove si è tenuto conto del fatto che la sbarra BC non ruota, ma trasla con velocità $\ell\dot{\theta}$. Il momento di inerzia I della sbarra è calcolato rispetto ad un suo estremo, $I = M\ell^2/3$. L'energia potenziale del sistema vale invece

$$U = (3M+m)gy_{cm} = -\left[2M+m\right]g\ell\cos\theta \simeq (2M+m)\,g\ell\left(-1+\frac{\theta^2}{2}\right)$$

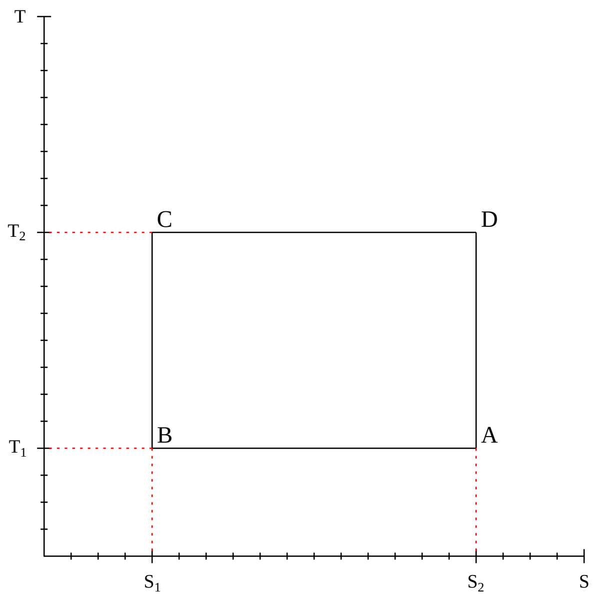
Abbiamo quindi

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(2M+m)\,g\ell}{2I+(M+m)\,\ell^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{6M+3m}{5M+3m}\right)\frac{g}{\ell}}$$

che è indipendente da x.

Soluzione secondo problema

Domanda 1



Nel piano T-S le adiabatiche sono curve a entropia costante, quindi il ciclo si rappresenta come in figura. Durante la compressione isoterma il sistema assorbe un calore

$$Q_{AB} = T_1 \left(S_B - S_A\right) = T_1 R \log \frac{V_B}{V_A} < 0$$

e il tempo necessario perchè questo avvenga per conduzione attraverso la sbarra è dato da

$$\tau_{AB} \left(\frac{T_1 - T_-}{R_T} \right) = -Q_{AB}$$

cioè

$$\tau_{AB} = \frac{T_1 R_T}{T_1 - T_-} R \log \frac{V_A}{V_B}$$

Analogamente durante l'espansione isoterma il sistema assorbe un calore

$$Q_{CD} = T_2 \left(S_D - S_C\right) = T_2 R \log \frac{V_A}{V_B} > 0$$

in un tempo

$$\tau_{CD} = \frac{T_2 R_T}{T_+ - T_2} R \log \frac{V_A}{V_B}$$

Domanda 2

L'efficienza è massima quando è massimo il rapporto T_2/T_1. Possiamo prendere $T_2 = T_+$ e $T_1 = T_-$. In questo caso abbiamo

$$\eta = 1 - \frac{T_-}{T_+} = \frac{8}{9}$$

Domanda 3

La potenza è il rapporto tra il lavoro prodotto in un ciclo e la sua durata. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
P &= \frac{(T_2 - T_1)(S_D - S_C)}{R_T \left(\frac{T_1}{T_1 - T_-} + \frac{T_2}{T_+ - T_2}\right)(S_D - S_C)} \\
&= \frac{1}{R_T} \frac{(T_2 - T_1)(T_1 - T_-)(T_+ - T_2)}{T_1(T_+ - T_2) + T_2(T_1 - T_-)} \\
&= \frac{1}{R_T} \frac{(T_2 - T_1)(T_1 - T_-)(9T_- - T_2)}{9T_1 T_- - T_2 T_-}
\end{aligned}$$

Ponendo $x = T_2/T_-$ abbiamo

$$P = \frac{T_-}{R_T} \frac{(x-2)(9-x)}{18-x}$$

Troviamo il massimo. La derivata

$$\frac{dP}{dx} = \frac{T_-}{R_T} \frac{180 - 36x + x^2}{(x-18)^2}$$

di annulla per $x = 6$ e $x = 30$. La prima soluzione è quella accettabile, dato che $T_2 < T_+$. Quindi

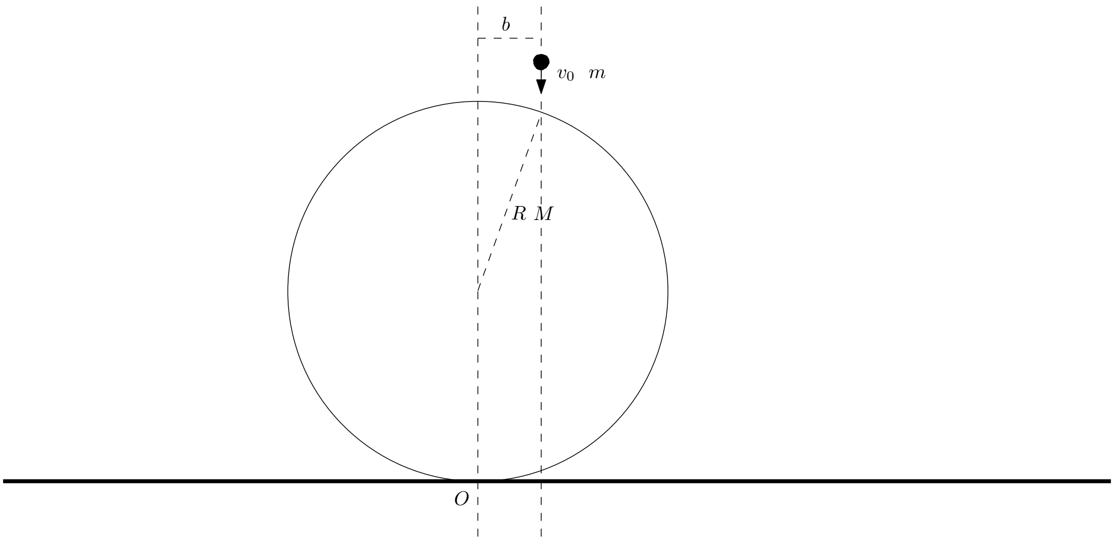
$$T_2 = 6T_-$$

L'efficienza vale in questo caso

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{2T_-}{6T_-} = \frac{2}{3}$$

1.9. 21 luglio 2011

Problema 1 (15 punti)



Un disco di massa M e raggio R ruota senza strisciare su un piano orizzontale. Una massa puntiforme m urta su di esso e rimane attaccato. Nell'istante immediatamente precedente l'urto la velocità del punto materiale è verticale e vale v_0 in modulo. La proiezione del punto d'impatto sul piano di appoggio orizzontale si trova ad una distanza b da O.

1. Dopo un certo tempo la massa m arriva a toccare il piano di appoggio in un punto O'. Determinare la posizione di O' rispetto ad O.

2. Determinare la velocità angolare del sistema disco+massa immediatamente dopo l'urto.

3. Determinare la velocità angolare del sistema quando la massa m arriva a toccare il piano di appoggio.

Problema 2 (15 punti)

La radiazione elettromagnetica può essere trattata come un gas caratterizzato dalle equazioni di stato

$$P = \frac{1}{3}\frac{U}{V}, \qquad U = bVT^4$$

dove b è una costante.

1. In una trasformazione adiabatica vale $PV^\gamma =$ costante, come per un gas perfetto. Calcolare γ.

2. Un cilindro impermeabile al calore provvisto di un pistone mobile contiene radiazione elettromagnetica alla temperatura T_i e volume V_i. Il pistone viene mantenuto

inizialmente in equilibrio mediante una opportuna forza esterna. Questa viene poi aumentata molto lentamente fino a quando il volume diviene $V_f < V_i$. Calcolare la pressione finale P_f del gas e la variazione di entropia.

3. Partendo dalla stessa condizione iniziale la forza esterna viene portata istantaneamente a SP_f, dove S è la sezione del cilindro e P_f la pressione del gas calcolata precedentemente. Calcolare in questo caso il volume finale, e la variazione di entropia.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Data la condizione di rotolamento puro, la massa arriverà sul piano orizzontale ad una distanza uguale all'arco tra O e il punto di impatto:

$$\overline{OO'} = \left[\pi - \arcsin\left(\frac{b}{R}\right)\right] R$$

Domanda 2

Durante l'urto si conserva il momento angolare rispetto ad O, dato che l'unica forza esterna impulsiva è applicata in quel punto. Possiamo scrivere allora

$$-mv_0 b = I\omega$$

dove

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{2}MR^2 + m\left(b^2 + h^2\right) \\ h &= R + \sqrt{R^2 - b^2} \end{aligned}$$

e quindi

$$\omega = -\frac{mv_0 b}{I}$$

Domanda 3

Dopo l'urto vale la conservazione dell'energia, e quindi

$$\frac{1}{2}I(b)\omega^2 + mgh = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2\right)\omega_f^2$$

Sostituendo la velocità angolare iniziale abbiamo

$$\omega_f = \sqrt{\frac{4}{3MR^2}\left(\frac{m^2 v_0^2 b^2}{2I} + mgh\right)}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Abbiamo

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dQ}{T} = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}dV \\ &= bT^3dV + 4bT^2VdT + \frac{b}{3}T^3dV \\ &= \frac{4}{3}bT^3dV + 4bT^2VdT = 0 \end{aligned} \tag{1.9.1}$$

quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\frac{dV}{V} + \frac{dT}{T} &= 0 \\ V^{1/3}T &= \text{costante} \\ V^{1/3}\left(\frac{3}{b}P\right)^{1/4} &= \text{costante} \\ PV^{4/3} &= \text{costante} \end{aligned}$$

da cui $\gamma = 4/3$.

Domanda 2

Dato che

$$P = \frac{b}{3}T^4$$

conosciamo la pressione iniziale,

$$P_i = \frac{b}{3}T_i^4$$

Quindi

$$P_iV_i^{4/3} = P_fV_f^{4/3}$$

e

$$P_f = P_i\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{4/3} = \frac{b}{3}\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{4/3}T_i^4$$

Dato che la trasformazione è reversibile, l'entropia non è cambiata.

Domanda 3

In questo caso

$$\Delta U = P_f\left(V_i - V_f\right)$$

ma

$$
\begin{aligned}
3P_f V_f - 3P_i V_i &= P_f\left(V_i - V_f\right) \\
4P_f V_f &= \left(P_f + 3P_i\right) V_i \\
V_f &= \frac{1}{4}\left(1 + 3\frac{P_i}{P_f}\right) V_i
\end{aligned}
$$

Per calcolare la variazione di entropia utilizziamo la (1.9.1). Passiamo dallo stato iniziale a quello finale con un'isoterma seguita da una trasformazione a volume costante. Per l'isoterma abbiamo

$$\Delta S_1 = \int_{V_i}^{V_f} \frac{4}{3} b T_i^3 dV = \frac{4}{3} b T_i^3 \left(V_f - V_i\right)$$

e per la trasformazione a volume costante

$$\Delta S_2 = \int_{T_i}^{T_f} 4bT^2 V_f dT = \frac{4}{3} b V_f \left(T_f^3 - T_i^3\right)$$

e quindi

$$\Delta S = \frac{4}{3} b \left(V_f T_f^3 - V_i T_i^3\right)$$

Tenendo conto che

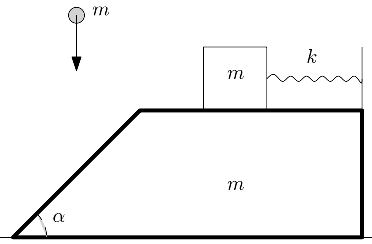
$$P_f = \frac{b}{3} T_f^4$$

possiamo anche scrivere

$$\Delta S = \frac{4}{3} b \left[\frac{1}{4}\left(1 + 3\frac{P_i}{P_f}\right)\left(\frac{P_f}{P_i}\right)^{3/4} - 1\right] V_i T_i^3$$

1.10. 8 settembre 2011

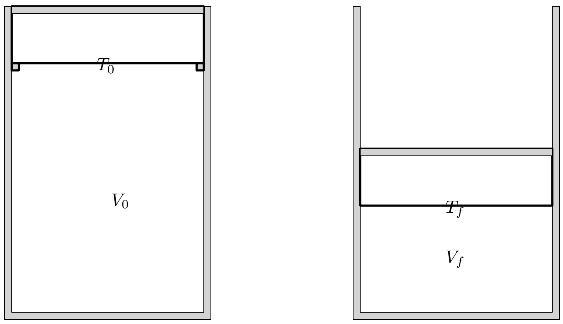
Problema 1 (15 punti)



Una piattaforma di massa m, della forma rappresentata in figura, è appoggiata su un piano orizzontale privo di attrito. Sopra di essa si trova un blocco, pure di massa m. Piattaforma e blocco sono collegate da una molla di costante elastica k, inizialmente a riposo. Una terza massa, che si può considerare un punto materiale, viene lasciata cadere sulla superficie obliqua della piattaforma (inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo α) in modo da colpirla con velocità v_0. L'urto è elastico e istantaneo.

1. Calcolare le componenti orizzontali e verticali della velocità del punto materiale dopo l'urto.
2. Scrivere le equazioni del moto della piattaforma e del blocco e le relative condizioni iniziali.
3. Determinare il massimo allungamento della molla.

Problema 2 (15 punti)



Un recipiente cilindrico di sezione S impermeabile al calore contiene n moli di un gas perfetto, ed è chiuso superiormente con un pistone scorrevole di massa m e capacità termica C. Il pistone può scambiare calore con il gas, ma il suo lato superiore è isolato termicamente, quindi non sono possibili scambi di calore con l'esterno del sistema.

Inizialmente il pistone è mantenuto fermo con un opportuno vincolo. La sua temperatura (e quella del gas) è T_0 e il volume del gas vale V_0. Si rimuove quindi il vincolo.

1. Per quali temperature T_0 il pistone si abbassa?

2. Supponendo che T_0 soddisfi la condizione determinata alla domanda precedente, calcolare la temperatura finale T_f del sistema quando questo raggiunge nuovamente l'equilibrio termodinamico.

3. Calcolare la variazione di entropia del sistema.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Durante l'urto la molla è a riposo, quindi non applica forze alla piattaforma e si può ignorare il blocco. L'energia e la quantità di moto orizzontale del sistema particella+piattaforma si conservano. Inoltre si conserva la componente parallela al lato obliquo della piattaforma della quantità di moto della particella. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}m\left(v_x^2+v_y^2+V^2\right) \\
0 &= m\left(v_x+V\right) \\
-mv_0\sin\alpha &= mv_y\sin\alpha+mv_x\cos\alpha
\end{aligned}$$

dove v_x, v_y sono le componenti della velocità della particella dopo l'urto cercate, e V la velocità della piattaforma. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
v_0^2-v_y^2 &= 2v_x^2 \\
v_0+v_y &= -v_x\cot\alpha
\end{aligned}$$

e quindi (escludendo la soluzione non accettabile $v_x=0$, $v_y=-v_0$)

$$\begin{aligned}
v_0 &= v_y-2v_x\tan\alpha \\
v_0 &= -v_y-v_x\cot\alpha
\end{aligned}$$

Risolvendo troviamo

$$\begin{aligned}
v_x &= \frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-3}v_0 \\
v_y &= \frac{3\cos 2\alpha-1}{\cos 2\alpha-3}v_0
\end{aligned}$$

Domanda 2

Indichiamo con X la posizione orizzontale dell'estremo della piattaforma a cui è fissata la molla, con x quella del blocco. Avremo, indicando con ℓ_0 la lunghezza a riposo della molla,

$$\begin{aligned}
m\ddot{X} &= -k\left(X-x-\ell_0\right) \\
m\ddot{x} &= k\left(X-x-\ell_0\right)
\end{aligned}$$

Le condizioni iniziali saranno le velocità e le posizioni di piattaforma e blocco, ossia

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 \\ \dot{X}(0) &= V \\ x(0) &= -\ell_0 \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{aligned}$$

dove si è scelta l'origine nella posizione iniziale dell'estremo della piattaforma. Il valore di V si determina usando le equazioni scritte precedentemente, in particolare

$$V = -v_x = \frac{2\sin 2\alpha}{3-\cos 2\alpha} v_0$$

Domanda 3

L'energia disponibile nel centro di massa si conserva, quindi

$$\frac{\mu}{2} v_{rel}^2 = \frac{k}{2}\delta^2$$

dove $v_{rel} = \dot{x} - \dot{X}$ è la velocità relativa iniziale del blocco rispetto alla piattaforma, $\mu = m/2$ la massa ridotta del sistema, e δ_{MAX} l'allungamento massimo cercato. Risolvendo abbiamo

$$\delta_{MAX} = \sqrt{\frac{\mu}{k}} V = \sqrt{\frac{\mu}{k}} \frac{2\sin 2\alpha}{3-\cos 2\alpha} v_0$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Il pistone si abbassa se la forza esercitata inizialmente dal gas sul pistone è minore del suo peso, ossia

$$P_0 S < mg$$

da cui

$$T_0 < \frac{mg}{nRS} V_0$$

Domanda 2

Dalla conservazione dell'energia, abbiamo che

$$(nc_V + C)\, T_0 + mg\frac{V_0}{S} = (nc_V + C)\, T_f + mg\frac{V_f}{S}$$

ma

$$V_f = \frac{nRS}{mg} T_f$$

e quindi

$$T_f = \frac{nc_V + C}{nc_P + C} T_0 + \frac{mgV_0}{S\left(nc_P + C\right)}$$

Domanda 3

L'entropia del sistema è quella del gas perfetto più quella del pistone. A meno di una costante adittiva si ha quindi

$$S = (nc_V + C) \log T + nR \log V$$

e si può calcolare direttamente la variazione:

$$\begin{aligned}
\Delta S &= (nc_V + C) \log \frac{T_f}{T_0} + nR \log \frac{V_f}{V_0} \\
&= (nc_V + C) \log \left[\frac{nc_V + C}{nc_P + C} + \frac{mgV_0}{ST_0\left(nc_P + C\right)} \right] \\
&+ nR \log \left[\frac{nc_V + C}{nc_P + C} \left(\frac{nRST_0}{mgV_0} \right) + \frac{nR}{(nc_P + C)} \right]
\end{aligned}$$

1.11. 8 febbraio 2012

Problema 1 (15 punti)

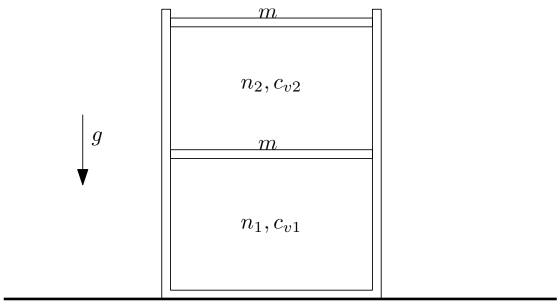
Una particella di massa m si muove in un piano sottoposta ad una forza

$$\vec{F} = A(r)\vec{r}$$

dove $\vec{r}$ è il vettore posizione della particella, r il suo modulo e $A(r)$ una funzione incognita. Si sa che sono possibili orbite circolari di raggio qualsiasi, e che tutte corrispondono allo stesso valore L_0 del modulo del momento angolare.

1. Determinare $A(r)$.
2. Determinare due costanti del moto e scriverle usando opportune coordinate (si consigliano coordinate polari).
3. Discutere le caratteristiche delle possibili traiettorie della particella. Se, in particolare, esistono delle traiettorie che portano la particella a cadere sul centro, dire se tale caduta avviene in un tempo finito.

Problema 2 (15 punti)



Il recipiente in figura di sezione S è diviso in due parti da due setti scorrevoli di massa m. I due volumi sono occupati da una mole di un gas perfetto monoatomico. Il setto superiore è impermeabile al calore, ed il sistema si trova inizialmente all'equilibrio (la pressione esterna è trascurabile) con entrambi i gas ad una temperatura T_0.

1. Determinare pressioni e volumi dei due gas nello stato iniziale.
2. Anche il setto intermedio è impermeabile al calore, e si agisce su quello superiore fino a raddoppiare la pressione del gas nello scomparto superiore. Calcolare le nuove temperature dei due gas e dire di quanto è variata l'entropia del sistema.
3. Si permette adesso il passaggio di calore attraverso il setto intermedio, mantenendo bloccato quello superiore. Determinare la temperatura finale, e dire se è maggiore o minore di T_0. C'è stata variazione di entropia?

Soluzione primo problema

Domanda 1

In un'orbita circolare

$$-m\frac{v^2}{r} = A(r)r$$

e d'altra parte

$$L_0 = mvr$$

Sostituendo otteniamo

$$-\frac{L_0^2}{mr^3} = A(r)r$$

e quindi

$$A(r) = -\frac{L_0^2}{mr^4}$$

Domanda 2

L'energia e il momento angolare si conservano:

$$\begin{aligned} L &= mr^2\dot{\theta} \\ E &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{L_0^2}{2mr^2} \end{aligned}$$

L'energia potenziale è stata determinata integrando la relazione

$$-\frac{L_0^2}{mr^3} = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

da cui

$$U(r) = -\frac{L_0^2}{2mr^2}$$

Domanda 3

Il potenziale efficace vale

$$U_{eff} = \frac{L^2 - L_0^2}{2mr^2}$$

e dal suo studio vediamo che per $L^2 > L_0^2$ tutte le orbite sono illimitate. Per $L^2 < L_0^2$ le orbite che corrispondono ad un'energia negativa terminano sono limitate e terminano nel centro. Se invece $E \geq 0$ l'orbita può condurre la particella nel centro o farla sfuggire a $r \to \infty$ a seconda del segno della velocità radiale iniziale. Il caso $L^2 = L_0^2$ è particolare. Il moto radiale è del tipo

$$r(t) = r_0 + v_0 t$$

che corrisponde a una caduta nel centro per $v_0 < 0$, ad un'orbita illimitata per $v_0 > 0$ e a un'orbita circolare per $v_0 = 0$.

Il tempo necessario per la caduta nel centro si può determinare a partire dall'energia, scritta come

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2 - L_0^2}{2mr^2}$$

e quindi

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{L_0^2 - L^2}{2mr^2}\right)}$$

Possiamo integrare questa equazione differenziale ed ottenere il tempo di caduta da una distanza iniziale r_0

$$\tau = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{L_0^2 - L^2}{2mr^2}\right)}}$$

L'integrale si calcola esplicitamente, ma è sufficiente notare che è finito, ricordando che siamo interessati al caso $L_0^2 > L^2$.

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Imponendo l'equilibrio meccanico abbiamo

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{2mg}{S} \\ P_2 &= \frac{mg}{S} \end{aligned}$$

e dalla legge dei gas perfetti otteniamo

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{RT_0}{P_1} = \frac{RT_0 S}{2mg} \\ V_2 &= \frac{RT_0}{P_2} = \frac{RT_0 S}{mg} \end{aligned}$$

Domanda 2

La trasformazione dei due gas è adiabatica, quindi l'entropia non cambia. Per quanto riguarda le temperature abbiamo ($c_v = 3/2R$, $c_p = 5/2R$, $\gamma = c_p/c_V = 5/3$)

$$\begin{aligned} T_1 P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} &= T_0 P_{10}^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ T_2 P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} &= T_0 P_{20}^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \end{aligned}$$

Sappiamo che $P_2 = 2mg/S$ e $P_1 = 3mg/S$, quindi

$$\begin{aligned} T_1 &= T_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ T_2 &= T_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \end{aligned}$$

Domanda 3

L'energia del sistema

$$E = c_v \left(T_1 + T_2\right) + mg\frac{V_1}{S} + mg\left(\frac{V_1 + V_2}{S}\right)$$

si conserva perchè durante l'evoluzione del sistema non ci sono forze esterne che fanno lavoro sul sistema. Inoltre il volume totale $V_{tot} = V_1 + V_2$ non cambia. Abbiamo quindi

$$2c_v T_f + mg\frac{V_{1f}}{S} = c_v T_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + c_v T_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + \frac{R}{3} T_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = kRT_0$$

dove per brevità abbiamo posto

$$\begin{aligned} kR &= c_v \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + c_v \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + \frac{R}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ &= R\left[\frac{11}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right] \end{aligned}$$

Dall'equilibrio meccanico tra i due scomparti otteniamo

$$\frac{RT_f}{V_{1f}} = \frac{RT_f}{\left(V_{tot} - V_{1f}\right)} + \frac{mg}{S}$$

da cui

$$\left(V_{tot} - 2V_{1f}\right) T_f = \frac{mg}{RS} V_{1f} \left(V_{tot} - V_{1f}\right)$$

Sostituendo il volume ricavato dalla prima equazione otteniamo un'equazione di secondo grado in T_f

$$R\left(V_{tot} - \frac{2S}{mg} kRT_0 + \frac{4S}{mg} c_v T_f\right) T_f = \left(kRT_0 - 2c_v T_f\right)\left(V_{tot} - \frac{S}{mg} kRT_0 + 2\frac{S}{mg} c_v T_f\right)$$

Ricordando che

$$V_{tot} = \frac{3}{2}\frac{RT_0 S}{mg}$$

possiamo riscrivere quest'ultima come

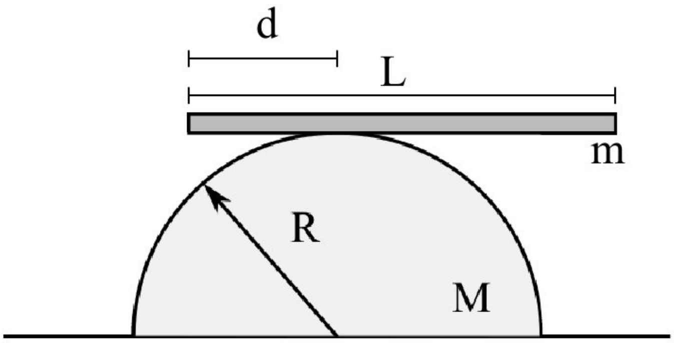
$$30R^2T_f^2 - 4(3-4k)R^2T_0T_f + k(2k-3)R^2T_0^2 = 0$$

la cui unica soluzione accettabile (perchè maggiore di T_0) è

$$T_f = \frac{1}{30}\left(\sqrt{4k^2-6k+36} + 8k - 6\right)T_0 \simeq 1.34T_0$$

1.12. 1 giugno 2012

Problema 1 (15 punti)



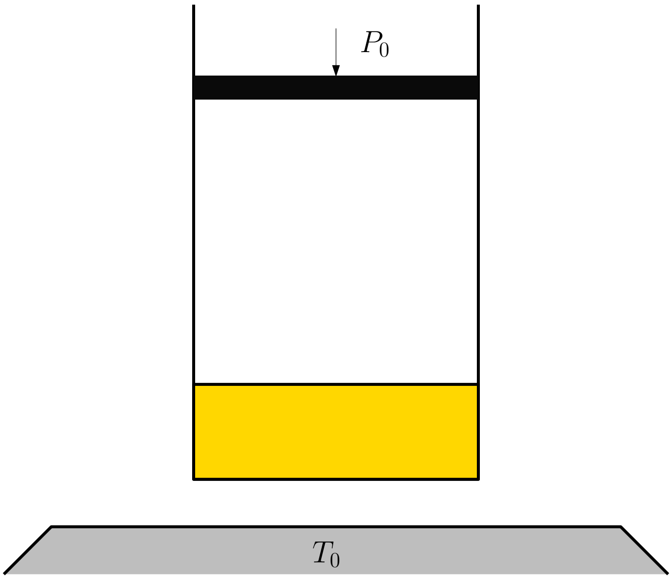
Una sbarra omogenea di lunghezza L e massa m è inizialmente appoggiata orizzontalmente su un semi-cilindro di raggio R e massa M, come in figura. La distanza del punto iniziale di appoggio dal bordo della sbarra è d. La sbarra si muove senza strisciare sul semi-cilindro. Si assuma che la sbarra non si stacchi mai dal cilindro.

1. Nell'ipotesi che il semi-cilindro sia mantenuto fermo, trovare per quale angolo di inclinazione rispetto all'orizzontale diverso da $\pm\pi/2$ la sbarra è in una posizione di equilibrio.

2. Calcolare la frequenza della piccole oscillazioni della sbarra attorno alla posizione trovata al punto precedente, limitandosi al caso $d = L/2$.

3. Supponendo adesso che $d = L/2 = \pi R/2$, se la sbarra si trova nella posizione di equilibrio con una data velocità angolare ω, per quale valore minimo di quest'ultima un suo estremo arriva a toccare terra?

Problema 2 (15 punti)



Un recipiente impermeabile al calore contiene una mole di un gas perfetto monoatomico, e un corpo di capacità termica C costante. Il recipiente è chiuso da un pistone scorrevole, pure impermeabile al calore. Si può trascurare la variazione di volume del corpo.

1. Mostrare che in una compressione reversibile del sistema la pressione e il volume occupato dal gas sono legati dalla relazione PV^k = costante, e determinare la costante k.

2. Mantenendo $PV^{5/3}$ = costante si misura la capacità termica C^* del sistema. Determinare C^*.

3. Supponendo adesso di avere a disposizione un bagno termico a temperatura T_0, che la temperatura iniziale del gas sia $T_1 > T_0$ e che la pressione sia mantenuta costante a P_0 determinare il massimo lavoro che è possibile ottenere dal sistema.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Per avere equilibrio è necessario che i momenti delle forze esterne che agiscono sulla sbarra rispetto ad un polo si annullino. Abbiamo due forze esterne, la forza di gravità applicata al centro di massa e la reazione vincolare del semi-cilindro applicata al punto di contatto. Scegliendo il polo nel punto di contatto vediamo che l'unica forza che può avere momento è quella di gravità. Tale momento sarà nullo quando il centro di massa si troverà sulla verticale del punto di contatto. Ciò acccade quando la sbarra (di spessore trascurabile) è verticale oppure quando il centro di massa coincide col punto di contatto.

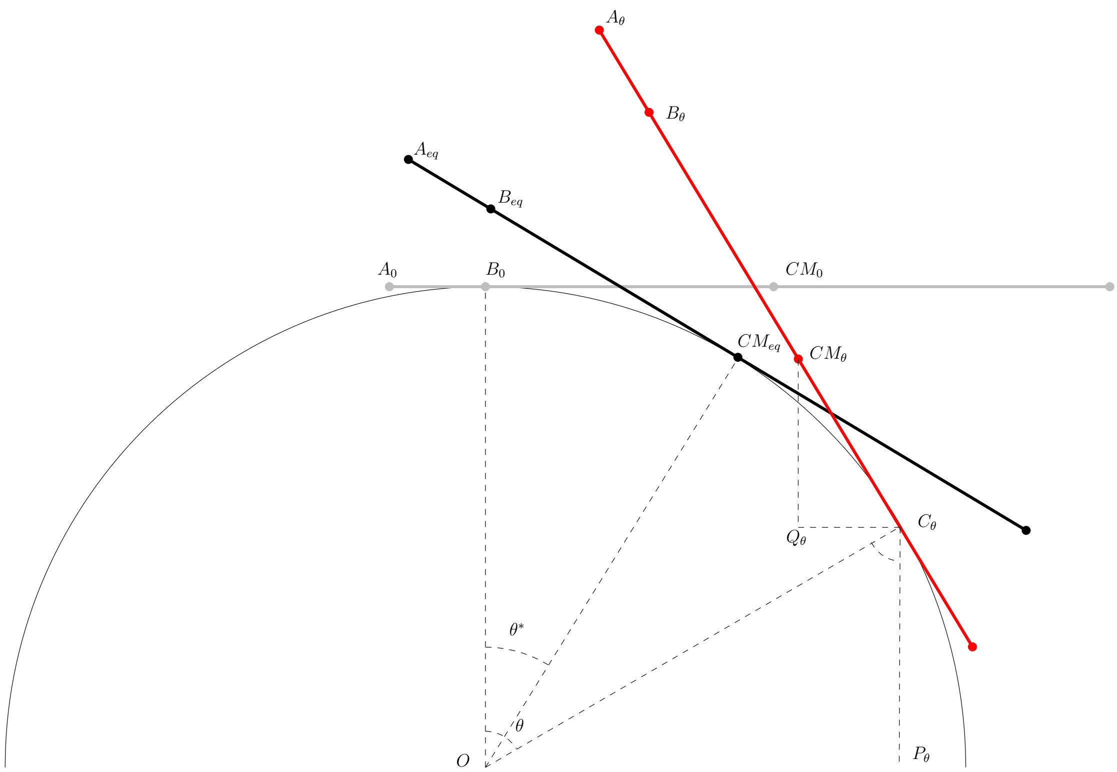


Figura 1.5.: Costruzioni geometriche utili per la soluzione dell'esercizio. La sbarra in grigio è quella nella posizione iniziale, quella nera alla posizione di equilibrio e quella rossa è in una posizione corrispondente ad un generico angolo θ.

Ci interessa solo quest'ultimo caso (gli altri corrispondono a $\theta = \pm\pi/2$). Allora la sbarra dovrà aver ruotato di un angolo corrispondente ad un arco lungo quanto la separazione iniziale tra il centro di massa e il punto di appoggio, cioè (vedere Figura 1.5)

$$R\theta^* = \overline{B_{eq}CM_{eq}} = \overline{B_0CM_0} = \frac{L}{2} - d \tag{1.12.1}$$

da cui

$$\boxed{\theta^* = \frac{L-2d}{2R}} \tag{1.12.2}$$

Si può arrivare ad una identica conclusione minimizzando l'energia potenziale

$$U = mgy_{CM}$$

Dalla Figura 1.5 vediamo che deve essere

$$y_{CM} = \overline{P_\theta C_\theta} + \overline{Q_\theta CM_\theta}$$

ma

$$\overline{P_\theta C_\theta} = R\cos\theta$$

e

$$\begin{aligned}
\overline{Q_\theta CM_\theta} &= \overline{C_\theta CM_\theta}\sin\theta \\
\overline{C_\theta CM_\theta} &= \overline{B_\theta C_\theta} - \overline{B_\theta CM_\theta} = R\theta - \overline{B_0 CM_0} = R\theta - \frac{L}{2} + d
\end{aligned}$$

da cui

$$y_{CM} = R\cos\theta + \left(\frac{L}{2} - d + R\theta\right)\sin\theta$$

Cerchiamo il mimimo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{mg}\frac{dU}{d\theta} &= -R\sin\theta + \left(\frac{L}{2} - d + R\theta\right)\cos\theta + R\sin\theta \\
&= \left(\frac{L}{2} - d + R\theta\right)\cos\theta
\end{aligned}$$

che si annulla per $\theta = \pm\pi/2$, corrispondenti ad una posizione verticale, e per

$$\theta = \theta^* = \frac{2d - L}{2R}$$

che corrisponde al caso in cui il centro di massa è a contatto con il semi-cilindro. Derivando ancora abbiamo

$$\frac{1}{mg}\frac{d^2U}{d\theta^2} = R\cos\theta - \left(\frac{L}{2} - d + R\theta\right)\sin\theta$$

che per $\theta = \theta^*$ vale

$$\frac{1}{mg}\frac{d^2U}{d\theta^2} = R\cos\theta^* > 0$$

Quindi $\theta = \theta^*$ corrisponde ad una posizione di equilibrio stabile.

Domanda 2

Scriviamo l'energia cinetica della sbarra. Potremmo usare subito il fatto che per piccole oscillazioni il moto può essere descritto come una pura rotazione attorno al centro di massa appoggiato al semi-cilindro. Abbiamo allora

$$K = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

e nell'approssimazione voluta dato che $\dot{\theta}^2$ è già del secondo ordine possiamo usare $I = I_{CM} = ML^2/12$. Per quanto riguarda l'energia potenziale possiamo usare l'espressione calcolata precedentemente nel caso particolare $d = L/2$ ottenendo infine

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\frac{ML^2}{12}\dot{\theta}^2 + MgR\left(\cos\theta + \theta\sin\theta\right) \\
&\simeq \frac{1}{2}\frac{ML^2}{12}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}MgR\theta^2
\end{aligned}
$$

La seconda espressione vale per piccole oscillazioni (a meno di una costante) e corrisponde ad un oscillatore armonico di frequenza

$$
\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{12gR}{L^2}}} \tag{1.12.3}
$$

Verifichiamo procedendo in altro modo il risultato. Per generalità considereremo un valore generico di d. Possiamo scrivere la coordinata x del centro di massa

$$
x_{cm} = -R\sin\theta + \left(\frac{L}{2} - d + R\theta\right)\cos\theta
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_{cm} &= -\dot{\theta}\left(\frac{L}{2} - d + R\theta\right)\sin\theta \\
\dot{y}_{cm} &= \dot{\theta}\left(\frac{L}{2} - d + R\theta\right)\cos\theta
\end{aligned}
$$

Scriviamo l'energia cinetica come energia del centro di massa più energia di rotazione attorno ad esso,

$$
K = \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2} - d + R\theta\right)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}mL^2\dot{\theta}^2
$$

Per $\theta = \theta^* + \epsilon$ questo diventa tenendo solo i termini del secondo ordine in ϵ, $\dot{\epsilon}$ ($\dot{\theta} = \dot{\epsilon}$)

$$
K \simeq K = \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2} - d + R\theta^* + R\epsilon\right)^2\dot{\epsilon}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}mL^2\dot{\epsilon}^2 \simeq \frac{1}{12}mL^2\dot{\epsilon}^2
$$

ed effettivamente possiamo considerare il centro di massa un punto fisso. Per quanto riguarda l'energia potenziale possiamo scrivere

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{mg}U &= R\cos\left(\theta^* + \epsilon\right) + \left(\frac{L}{2} - d + R\theta^* + R\epsilon\right)\sin\left(\theta^* + \epsilon\right) \\
&= R\cos\left(\theta^* + \epsilon\right) + R\epsilon\sin\left(\theta^* + \epsilon\right) \\
&\simeq R\cos\theta^* - R\epsilon\sin\theta^* - \frac{1}{2}R\epsilon^2\cos\theta^* + R\epsilon\sin\theta^* + R\epsilon^2\cos\theta^* \\
&= R\cos\theta^* + \frac{1}{2}R\epsilon^2\cos\theta^*
\end{aligned}
$$

Quindi
$$E \simeq \frac{1}{2}\frac{1}{12}mL^2\dot{\epsilon}^2 + \frac{1}{2}mgR\epsilon^2\cos\theta^*$$
e la frequenza delle piccole oscillazioni vale
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{12gR\cos\theta^*}{L^2}}$$
Per $d = L/2$ (e quindi $\theta^* = 0$) questo si riduce al risultato precedente.

Domanda 3

Usando la conservazione dell'energia abbiamo inizialmente
$$E = \frac{1}{2}\frac{1}{12}mL^2\omega^2 + mgR$$
Quando un estremo della sbarra tocca terra questa si trova in posizione verticale, quindi
$$E = mg\frac{\pi}{2}R$$
di conseguenza dovremo avere
$$\omega > \sqrt{\frac{24gR}{L^2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)} = \sqrt{\frac{24g}{\pi^2 R}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che non si ha scambio di calore con l'esterno avremo
$$dQ = (c_V + C)\, dT + PdV = 0$$
e quindi
$$(c_V + C)\frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V} = 0$$
Integrando otteniamo
$$TV^{\frac{R}{C+c_V}} = \text{costante}$$
ossia
$$PV^{\frac{C+c_P}{C+c_V}} = \text{costante}$$
e quindi
$$k = \frac{C+c_P}{C+c_V}$$

Domanda 2

Abbiamo adesso

$$dQ = (c_V + C)\, dT + RT\frac{dV}{V} = 0$$

Dato che $PV^{5/3}$ è costante deve anche essere

$$TV^{2/3} = \text{costante}$$

ossia

$$V^{2/3} dT + \frac{2}{3} TV^{-1/3} dV = 0$$

Da questo segue che

$$\frac{dV}{V} = -\frac{3}{2}\frac{dT}{T}$$

e quindi

$$dQ = \left(c_V + C - \frac{3}{2}R\right) dT = C dT$$

Di conseguenza $C^* = C$. Allo stesso risultato si poteva arrivare direttamente osservando che $\gamma = 5/3$ per un gas monoatomico. Di conseguenza la trasformazione del gas è adiabatica, e tutto il calore viene scambiato con il corpo.

Domanda 3

Detto dQ_1 il calore estratto dal sistema e dQ_2 quello estratto dal bagno termico avremo

$$dQ_1 = -(c_p + C)\, dT_1$$

Inoltre

$$dW = dQ_1 + dQ_2 = -(c_p + C)\, dT_1 + dQ_2$$

Per rendere massimo il lavoro dobbiamo operare in maniera reversibile, quindi

$$\begin{aligned} dS &= -\frac{dQ_1}{T_1} - \frac{dQ_2}{T_0} \\ &= (c_p + C)\, \frac{dT_1}{T_1} - \frac{dQ_2}{T_0} = 0 \end{aligned}$$

ed inserendo nella espressione per dW abbiamo

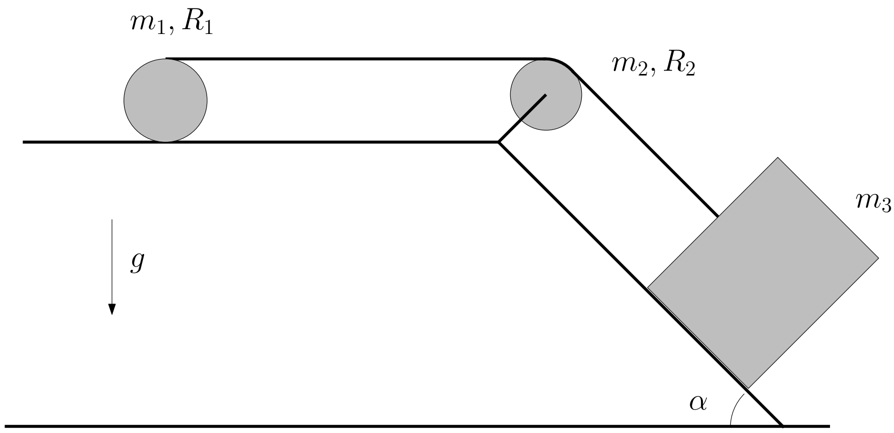
$$dW = -(c_p + C)\, dT_1 + T_0\, (c_p + C)\, \frac{dT_1}{T_1}$$

Integrando abbiamo infine

$$W = (c_p + C) \left[(T_1 - T_0) - T_0 \log \frac{T_1}{T_0} \right]$$

1.13. 10 settembre 2012

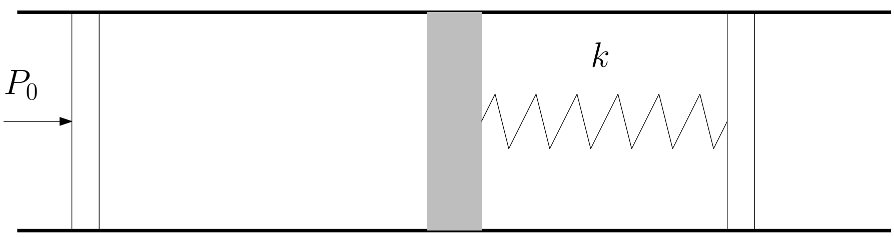
Problema 1 (15 punti)



Un cilindro di massa m_1 e raggio R_1 rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Attorno ad esso è avvolto un filo inestensibile di massa nulla, che è collegato all'estremo opposto ad un blocco di massa m_3, posto su un piano inclinato privo di attrito. Il filo è avvolto attorno a una scanalatura di profondità trascurabile, in modo da non interferire col moto di rotolamento del cilindro di raggio R_1, e appoggia su una carrucola di massa m_2 e raggio R_2, come in figura, sulla quale non può strisciare. La carrucola è libera di ruotare attorno al suo asse. L'angolo tra il piano inclinato e l'orizzontale vale α. Inizialmente il sistema è in quiete.

1. Calcolare il rapporto tra le velocità angolari del cilindro e della carrucola.
2. Calcolare la velocità angolare della carrucola dopo che la massa m_1 si è spostata di un tratto ℓ.
3. Calcolare il tempo richiesto per l'avanzamento precedente.

Problema 2 (15 punti)



Un cilindro di sezione S con pareti impermeabili al calore è diviso in due parti da un setto che può essere attraversato dal gas. Ciascuna delle due parti è chiusa da un pistone scorrevole, pure impermeabile al calore. Il pistone a destra è collegato al setto da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, mentre su quello a sinistra agisce una pressione esterna P_0 costante.

Inizialmente n moli di un gas perfetto monoatomico si trovano a sinistra all'equilibrio ad una temperatura T_0, la molla è completamente a riposo, e mediante una opportuna membrana si impedisce al gas di attraversare il setto. Si rimuove quindi la membrana, ed il gas passa gradualmente dalla sezione a pressione maggiore a quella a pressione minore.

1. Supponendo che tutto il gas passi a destra, calcolare la temperatura finale di equilbrio.

2. Sotto quale condizione il gas passa effettivamente tutto a destra?

3. Calcolare la variazione di entropia del gas.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Detta ω_1 la velocità angolare del cilindro appoggiato, dalla condizione di rotolamento di quest'ultimo sul piano segue che la velocità del filo

$$v_f = -2\omega_1 R_1$$

ma dato che il filo non striscia sulla carrucola sarà anche

$$v_f = -\omega_2 R_2$$

dove ω_2 è la velocità angolare di quest'ultima. Quindi

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{2R_1}$$

Domanda 2

L'energia del sistema vale

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}m_1 R_1^2\right)\omega_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_2 R_2^2\right)\omega_2^2 + \frac{1}{2}m_3 v_f^2 - m_3 g x \sin\alpha$$

dove x è la lunghezza del filo che si trova oltre la carrucola, e $v_f = \dot{x}$. Usando le relazioni precedenti possiamo riscrivere tutto questo nella forma

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + m_3\right) R_2^2 \omega_2^2 - m_3 g x \sin\alpha$$

Eguagliando l'energia iniziale a quella finale troviamo

$$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + m_3\right) R_2^2 \omega_2^2 - m_3 g 2\ell \sin\alpha$$

dove si è tenuto conto del fatto che quando il cilindro è avanzato di ℓ la lunghezza del filo srotolato è 2ℓ, dato che il la velocità del centro di massa del cilindro è

$$v_2 = -\omega_1 R_1 = \frac{1}{2} v_f$$

Quindi

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{4m_3 \sin\alpha}{\frac{3}{8}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + m_3} \frac{g\ell}{R_2^2}}$$

Domanda 3

Il moto del centro di massa del cilindro è uniformemente accelerato. Si puà arrivare rapidamente a questo risultato scrivendo

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + m_3\right)\dot{x}^2 - m_3 g x \sin\alpha$$

e derivando otteniamo

$$\dot{E} = \left(\frac{3}{8}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + m_3\right)\dot{x}\ddot{x} - m_3 g \dot{x} \sin\alpha = 0$$

da cui l'equazione del moto

$$\ddot{x} = \frac{m_3 g \sin\alpha}{\frac{3}{8}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + m_3}$$

L'accelerazione del centro di massa del cilindro è quindi

$$a_1 = \frac{1}{2}\frac{m_3 g \sin\alpha}{\frac{3}{8}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + m_3}$$

ed il tempo richiesto

$$\tau = \sqrt{\frac{2\ell}{a_1}}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Durante la trasformazione la variazione di energia del sistema è uguale al lavoro fatto dalla pressione esterna. Quindi

$$P_0 V_0 = nRT_0 = nc_V (T_f - T_0) + \frac{k}{2}\ell^2$$

D'altra parte nello stato finale

$$nRT_f = P_f V_f = V_f \frac{k\ell}{S} = k\ell^2$$

e quindi

$$nRT_0 = nc_V\left(T_f - T_0\right) + \frac{1}{2}nRT_f$$

da cui

$$T_f = \frac{c_P}{c_p - \frac{1}{2}R}T_0 > T_0$$

Domanda 2

Se tutto il gas passa a destra, la sua pressione finale dovrà essere minore di P_0. Quindi

$$P_f < P_0$$

D'altra parte

$$P_f = \frac{nRT_f}{V_f} = \frac{nRT_f}{S\ell} = k\frac{nRT_f}{S^2 P_f}$$

da cui

$$\sqrt{\frac{knRT_f}{S^2}} = \sqrt{\frac{knR}{S^2}\frac{c_P}{c_p - \frac{1}{2}R}T_0} < P_0$$

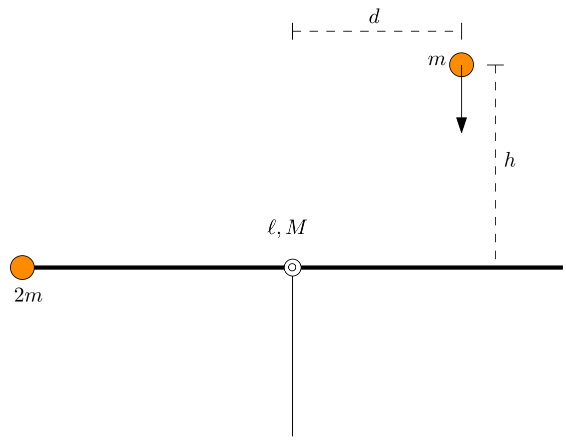
Domanda 3

Calcoliamo direttamente la differenza di entropia tra lo stato di equilibrio iniziale e finale:

$$\begin{aligned}
\Delta S &= nc_V \log\frac{T_f}{T_0} + nR\log\frac{V_f}{V_0} \\
&= nc_V \log\left(\frac{c_P}{c_p - \frac{1}{2}R}\right) + nR\log\left(\frac{T_f}{T_0}\frac{P_0}{P_f}\right) \\
&= nc_P \log\left(\frac{c_P}{c_p - \frac{1}{2}R}\right) + nR\log\left(\frac{P_0}{P_f}\right) \\
&= nc_P \log\left(\frac{c_P}{c_p - \frac{1}{2}R}\right) + \frac{1}{2}nR\log\left(P_0^2\frac{S^2}{knR}\frac{c_p - \frac{1}{2}R}{c_P}\right)
\end{aligned}$$

1.14. 20 gennaio 2012

Problema 1 (15 punti)



Una sbarra di lunghezza ℓ e massa M è libera di ruotare attorno al suo punto medio in un piano verticale. Ad uno dei suoi estremi è collegata una massa $2m$, ed inizialmente la sbarra è mantenuta in equilibrio in posizione orizzontale. Una seconda massa m viene lasciata cadere sulla sbarra da una altezza h ad essa relativa, in modo da urtarla ad una distanza d dal punto medio. Immediatamente prima dell'urto la sbarra viene lasciata libera: l'urto è istantaneo e la massa resta fissata alla sbarra.

1. Determinare la velocità angolare della barra immediamente dopo l'urto.

2. Per quale valore minimo di h la sbarra riesce ad arrivare in posizione verticale, con la massa $2m$ al di sopra del punto medio della sbarra?

3. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni del sistema risultante attorno alla sua posizione di equilibrio stabile.

Problema 2 (15 punti)

Un recipiente impermeabile al calore contiene n moli di un gas perfetto monoatomico e una massa m di ghiaccio. Inizialmente il sistema è in equilibrio ad una temperatura $T_0 < T_f$ e ad una pressione P_0. Abbiamo indicato con T_f la temperatura di fusione del ghiaccio, che considereremo agli effetti di questo problema indipendente dalla pressione. Assumeremo inoltre che il volume del ghiaccio sia costante, e indicheremo con λ il suo calore latente di fusione.

1. Calcolare la capacità termica C del sistema

2. Supponendo di avere a disposizione un bagno termico di temperatura T_B appena inferiore a T_f determinare il massimo lavoro che è possibile estrarre dal sistema.

3. Stessa domanda se la temperatura del bagno termico è appena superiore a T_f

Soluzione primo problema

Domanda 1

Nell'urto si conserva il momento angolare del sistema rispetto al punto di sospensione, dato che la reazione vincolare in esso è l'unica forza impulsiva. Quindi

$$-m\sqrt{2gh}d = I\omega$$

dove

$$I = 2m\frac{\ell^2}{4} + \frac{1}{12}M\ell^2 + md^2$$

è il momento di inerzia del sistema dopo l'urto rispetto al punto di sospensione. Quindi

$$\omega = -\frac{md\sqrt{2gh}}{I}$$

Domanda 2

Dopo l'urto vale la conservazione dell'energia, quindi nel caso limite

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = 2mg\frac{\ell}{2} - mgd$$

da cui

$$\omega^2 = 2\frac{mg}{I}(\ell - d) = \frac{m^2 d^2 (2gh)}{I^2}$$

Risolvendo per h otteniamo

$$h = \frac{I}{md^2}(\ell - d)$$

Domanda 3

L'energia del sistema è

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 - (M + 3m)\, g\delta_{CM}\cos\theta$$

dove

$$\delta_{CM} = \frac{m}{M+3m}(\ell - d)$$

è la distanza del centro di massa dal punto di sospensione. Per piccole oscillazioni attorno $\theta = 0$

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(M + 3m)\, g\delta_{CM}\theta^2$$

e quindi

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(M+3m)\, g\delta_{CM}}{I}}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che il volume occupato dal gas rimane costante avremo

$$dQ = nc_V dT + mcdT$$

dove c è il calore specifico del ghiaccio. Avremo quindi

$$C = nc_V + mc$$

Domanda 2

Potremo estrarre lavoro utile fino a quando la temperatura del sistema non raggiunge T_f. Indicando con Q_1 il calore ceduto a questo e Q_2 quello estratto dal bagno termico avremo

$$W = Q_2 - Q_1 = Q_2 - C(T_f - T_0)$$

Per estrarre il massimo lavoro possibile dobbiamo operare in maniera reversibile. Quindi l'entropia dell'universo non cambia

$$\Delta S_{tot} = C \log\left(\frac{T_f}{T_0}\right) - \frac{Q_2}{T_f} = 0$$

e abbiamo

$$Q_2 = CT_f \log\frac{T_f}{T_0}$$

Sostituendo troviamo il lavoro:

$$W = CT_f \log\frac{T_f}{T_0} - C(T_f - T_0)$$

Domanda 3

Il lavoro è lo stesso: infatti non possiamo ricavare lavoro utile utilizzando due sorgenti alla stessa temperatura. Per verificarlo osserviamo che operando fino a quando tutto il ghiaccio si è sciolto avremo

$$W = Q_2 - Q_1 = Q_2 - \lambda m$$

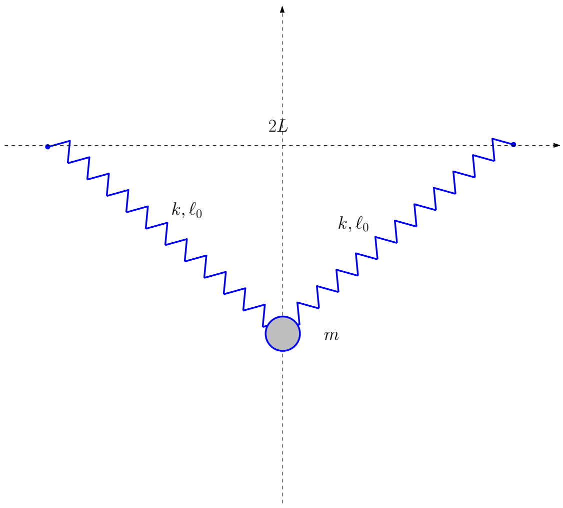
e

$$\Delta S_{tot} = \frac{\lambda m}{T_f} - \frac{Q_2}{T_f} = 0$$

Quindi $Q_2 = \lambda m$ e $W = 0$.

1.15. 22 giugno 2012

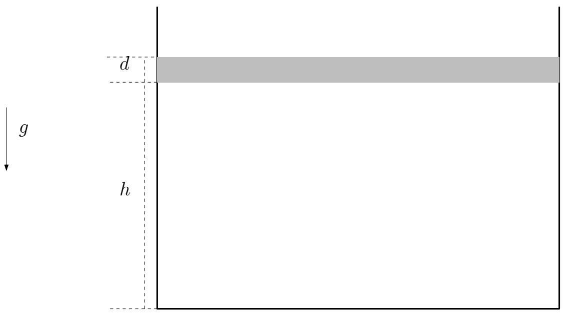
Problema 1 (15 punti)



Due molle di lunghezza a riposo ℓ_0 e costante elastica k sono disposte orizzontalmente, allineate e compresse fino ad avere una lunghezza complessiva $2L$. Il punto di contatto è vincolato a muoversi nella direzione verticale. L'estremità delle molle è libera di ruotare.

1. Trovare le posizioni di equilibrio del sistema.
2. Al punto centrale si appende una massa m. Nell'ipotesi di una grande compressione ($\ell_0 \gg L$) trovare il punto di equilibrio stabile.
3. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni del sistema attorno ad un punto di equilibrio stabile determinato.

Problema 2 (15 punti)



Si consideri 0.05 moli di un gas perfetto biatomico in un cilindro verticale di raggio $R = 0.005\text{m}$ chiuso con un pistone di spessore $d = 0.01\text{m}$ che si trova a un'altezza $h = 0.1\text{m}$ dalla base. Siamo in presenza di gravità e in assenza di pressione atmosferica.

La temperatura ambiente è di $20°C$. Assumere (poco realisticamente) che la conducibilità termica del gas sia infinita. Per le prime due domande considerare infinita anche la conducibilità termica del pistone.

1. Si calcoli la massa M del pistone.
2. Si considerino piccoli spostamenti dalla posizione di equilibrio. Si calcoli la costante elastica risultante e il periodo delle piccole oscillazioni.
3. Si supponga adesso che il pistone abbia una conducibilità termica $\kappa = 350 \mathrm{W m^{-1} K^{-1}}$, e che si possa trascurare qualsiasi forma di dissipazione all'interno del gas. Sul pistone in posizione di equilibrio si posa una massa pari a 1% della massa del pistone. Passato un opportuno intervallo di tempo, di quanto è variata l'entropia del gas e quella dell'universo. Si dia una stima del tempo necessario per raggiungere l'equilibrio.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Nella posizione di equilibrio la componente verticale della forza della molla deve annullarsi. Questo è possibile se la forza stessa è nulla (cioè se la molla si trova alla sua lunghezza di riposo) oppure quando le molle sono in posizione orizzontale.

Domanda 2

Detta y la posizione del punto vincolato a muoversi verticalmente l'energia potenziale del sistema vale

$$U = 2\frac{k}{2}\left(\sqrt{L^2+y^2}-\ell_0\right)^2 + mgy$$

Nel regime $\ell_0 \gg L$ le piccole oscillazioni avverranno con $y \gg L$. Quindi

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{L^2+y^2}-\ell_0\right)^2 &= L^2+y^2+\ell_0^2-2\ell_0\sqrt{L^2+y^2}\\ &\simeq L^2+y^2+\ell_0^2-2\ell_0\,|y|\sqrt{1+\frac{L^2}{y^2}}\\ &\simeq L^2+y^2+\ell_0^2-2\ell_0 y\end{aligned}$$

quindi potremo approssimare l'energia come

$$U \simeq ky^2 - 2k\ell_0\,|y| + mgy$$

e la posizione di equilibrio corrisponderà a

$$U' \simeq 2ky_{eq} \pm 2k\ell_0 + mg = 0$$

cioè

$$y_{eq} = \pm\ell_0 - \frac{mg}{2k}$$

Derivando ancora una volta vediamo che entrambi i punti di equilibrio trovati sono stabili

$$U'' = 2k$$

Domanda 3

Scriviamo l'energia totale. Otteniamo

$$E = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + ky^2 - 2k\ell_0\,|y| + mgy$$

Ponendo

$$y = y_{eq} + \epsilon$$

abbiamo

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\epsilon}^2 + ky_{eq}^2 + 2ky_{eq}\epsilon + k\epsilon^2 - 2k\ell_0\,|y_{eq} + \epsilon| + mgy_{eq} + mg\epsilon$$

Dato che i termini lineari in ϵ si devono cancellare attorno al punto di equilibrio abbiamo

$$E \simeq \frac{1}{2}m\dot{\epsilon}^2 + k\epsilon^2$$

e quindi

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che il pistone deve essere in equilibrio meccanico sarà

$$Mg = PS = \frac{nRT}{V}S$$

e quindi

$$M = \frac{nRT}{hg} = \frac{0.05 \times 8.314 \times 293}{9.8 \times 0.1} = 124.3\text{kg}$$

Domanda 2

Se durante le oscillazioni il gas si mantiene alla temperatura dell'ambiente abbiamo

$$PV = nRT$$

quindi le forze che agiscono sul pistone sono

$$F_y = -Mg + PS = -Mg + \frac{nRTS}{V_0 + S\delta y}$$

dove δy è il piccolo spostamento. Sviluppando al primo ordine troviamo

$$F_y = -Mg + PS = -Mg + \frac{nRTS}{V_0}\left(1 - \frac{S}{V_0}\delta y\right)$$

e dato che il termine costante si cancella all'equilibrio abbiamo

$$F_y = -\frac{nRTS^2}{V_0^2}\delta y = -\frac{nRT}{h^2}\delta y$$

Quindi la costante elastica vale

$$k = \frac{nRT}{h^2}$$

e il periodo delle piccole oscillazioni

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Mh^2}{nRT}} = 2\pi\sqrt{\frac{124.3 \times 0.01}{0.05 \times 8.314 \times 293}}\mathrm{s} \simeq 0.6\mathrm{s}$$

Domanda 3

La variazione di entropia del gas è

$$\Delta S_{gas} = nc_V \log\frac{T_f}{T_i} + nR\log\frac{V_f}{V_i}$$

ma dato che le temperature iniziali e finali sono le stesse possiamo anche scrivere

$$\Delta S_{gas} = nR\log\frac{P_i}{P_f} = nR\log\frac{M}{M+\Delta M} = nR\log\left(\frac{100}{101}\right) = -4.1 \times 10^{-3}\mathrm{JK}^{-1}$$

quindi l'entropia del gas è diminuita. La quantità di calore che il gas ha ceduto all'ambiente è determinata da

$$P_f\left(V_i - V_f\right) = nc_V\left(T_f - T_i\right) + Q_{ced}$$

e quindi

$$Q_{ced} = P_f\left(V_i - V_f\right)$$

Quindi l'aumento di entropia dell'ambiente sarà

$$\Delta S_{ambiente} = \frac{P_f\left(V_i - V_f\right)}{T}$$

e quella dell'universo

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{P_f\left(V_i - V_f\right)}{T} + nR\log\frac{P_i}{P_f} \\ &= nR\left[\left(\frac{P_f}{P_i} - 1\right) - \log\frac{P_f}{P_i}\right] = 2.1\times10^{-5}\mathrm{JK}^{-1}\end{aligned}$$

Per stimare il tempo necessario a raggiungere l'equilibrio si può supporre che ad una iniziale brusca compressione adiabatica irreversibile faccia seguito un lento processo di conduzione che porta il sistema all'equilibrio termico. Dato che durante il processo di conduzione

$$nc_P\dot{T}_{gas} = -\frac{\kappa S}{d}\left(T_{gas} - T\right)$$

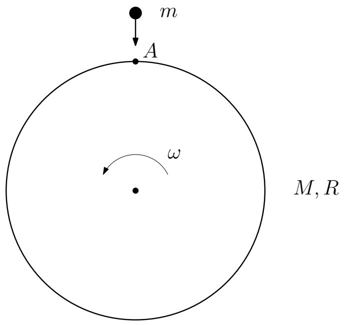
la scala temporale per il ristabilimento dell'equilibrio sarà

$$\tau \sim \left(\frac{\kappa S}{nc_P d}\right)^{-1} = \frac{7nRd}{2\kappa S} \simeq 0.5\mathrm{s}$$

Notare che questo tempo è dell'ordine del periodo delle piccole oscillazioni viste precedentemente, quindi il modello brusca compressione seguito da rilassamento è rozza.

1.16. 18 gennaio 2013

Problema 1 (15 punti)



Un cilindro di massa M e raggio R può ruotare liberamente attorno al suo asse, fissato orizzontalmente. Inizialmente la sua velocità angolare è ω_0. Ad un certo istante un punto materiale inizialmente fermo di massa m rimane attaccato in un punto A posto sul bordo del cilindro, nel punto più elevato. Il sistema si trova in un campo gravitazionale costante diretto verso il basso.

1. Calcolare l'energia del sistema e il suo momento angolare rispetto ad un polo posto nel punto A prima del contatto.
2. Determinare la velocità angolare del cilindro quando la massa m arriva nel punto più in basso.
3. Determinare la reazione vincolare applicata dall'asse al cilindro dopo il contatto, quando la massa m è nella posizione più alta e quando è in quella più bassa.

Problema 2 (15 punti)

Un elastico può essere descritto a livello macroscopico dalla sua energia interna U, dalla lunghezza ℓ, dalla temperatura T e dalla tensione τ. Supporremo che sia possibile scrivere l'energia nella forma

$$U = k\bar{\ell}T$$

e che valga

$$\tau = \gamma T\left(\ell - \bar{\ell}\right)$$

dove k, $\bar{\ell}$ e γ sono costanti positive opportunamente dimensionate. Nel seguito tutte le trasformazioni considerate si intenderanno reversibili.

1. Rappresentare nel piano $\tau - \ell$ un allungamento dell'elastico a temperatura $T = T_0$ costante, da $\ell = \ell_1$ a $\ell = \ell_2$, con $\ell_2 > \ell_1 > \bar{\ell}$. Calcolare il lavoro fatto dall'elastico, dire in particolare se è positivo o negativo.
2. Nella trasformazione precedente, quanto calore è stato ceduto all'elastico?

3. Considerare adesso un allungamento che avviene adiabaticamente, sempre da ℓ_1 a ℓ_2. Calcolare il rapporto tra temperatura finale e iniziale e la variazione dell'entropia. L'elastico si scalda o si raffredda?

Soluzione primo problema

Domanda 1

L'energia prima del contatto è data da

$$E = \frac{1}{2} I_{CM} \omega_0^2$$

dove $I = MR^2/2$ è il momento di inerzia del cilindro rispetto al suo asse. Per quanto riguarda il momento angolare rispetto al polo A abbiamo

$$L = I_{CM} \omega_0$$

dato che il centro di massa è fermo.

Domanda 2

Al momento del contatto si conserva il momento angolare del sistema rispetto ad un polo posto sull'asse del cilindro. Quindi

$$I_{CM} \omega_0 = I_{CM} \omega + mR^2 \omega$$

da cui troviamo la velocità angolare del sistema immediatamente dopo

$$\omega_i = \frac{I_{CM}}{I_{CM} + mR^2} \omega_0$$

Da questo momento in poi si conserva l'energia, per cui

$$\frac{1}{2} \left(I_{CM} + mR^2 \right) \omega_i^2 + mgR = \frac{1}{2} \left(I_{CM} + mR^2 \right) \omega_f^2 - mgR$$

e quindi

$$\omega_f = \sqrt{\omega_i^2 + \frac{4mgR}{I_{CM} + mR^2}}$$

Domanda 3

L'equazione del moto per il centro di massa del sistema nella direzione radiale da all'istante considerato

$$(M + m) \omega_f^2 \left(R \frac{m}{m + M} \right) = N_y - (m + M) g$$

che permette di determinare la componente verticale della reazione vincolare,

$$N_y = mR\omega_f^2 + (m+M)\,g$$

Dalla seconda equazione cardinale abbiamo invece

$$\left(I_{CM} + mR^2\right)\dot{\omega}_f = 0$$

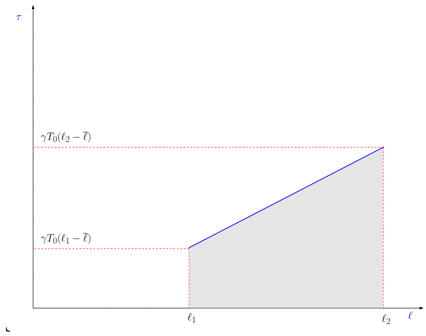
e quindi $\dot{\omega}_f = 0$. L'equazione per il centro di massa nella direzione tangenziale da adesso

$$(M+m)\,\dot{\omega}_f\left(R\frac{m}{m+M}\right) = N_x$$

da cui $N_x = 0$.

Soluzione secondo problema

Domanda 1



La trasformazione è descritta da

$$\tau = \gamma T_0\left(\ell - \overline{\ell}\right)$$

ed è quindi la retta in figura. Il lavoro fatto dall'elastico sarà

$$\begin{aligned} L &= -\int_{\ell_1}^{\ell_2} \tau d\ell \\ &= -\gamma T_0 \int_{\ell_1-\overline{\ell}}^{\ell_2-\overline{\ell}} \ell' d\ell' \\ &= \frac{1}{2}\gamma T_0\left[\left(\ell_1-\overline{\ell}\right)^2 - \left(\ell_2-\overline{\ell}\right)^2\right] < 0 \end{aligned}$$

ed è l'area cambiata di segno sotto la retta.

Domanda 2

Dal primo principio della termodinamica

$$dQ = dU + dL = k\bar{\ell}dT - \tau d\ell$$

Dato che la temperatura è costante, $dQ = -\tau d\ell$ e quindi $Q = L$.

Domanda 3

Dal primo principio scritto precedentemente troviamo il differenziale dell'entropia, dato che la trasformazione è adiabatica e reversibile. Otteniamo

$$dS = \frac{dQ}{T} = k\bar{\ell}\frac{dT}{T} - \gamma\left(\ell - \bar{\ell}\right)d\ell = 0$$

che ci dice subito che l'entropia del sistema non varia. L'espressione può essere integrata direttamente, ottenendo

$$k\bar{\ell}\log\frac{T_2}{T_1} = \frac{\gamma}{2}\left[\left(\ell_2 - \bar{\ell}\right)^2 - \left(\ell_2 - \bar{\ell}\right)^2\right]$$

da cui

$$\frac{T_2}{T_1} = \exp\left\{\frac{\gamma}{2k\bar{\ell}}\left[\left(\ell_2 - \bar{\ell}\right)^2 - \left(\ell_2 - \bar{\ell}\right)^2\right]\right\} > 1$$

e quindi $T_2 > T_1$.

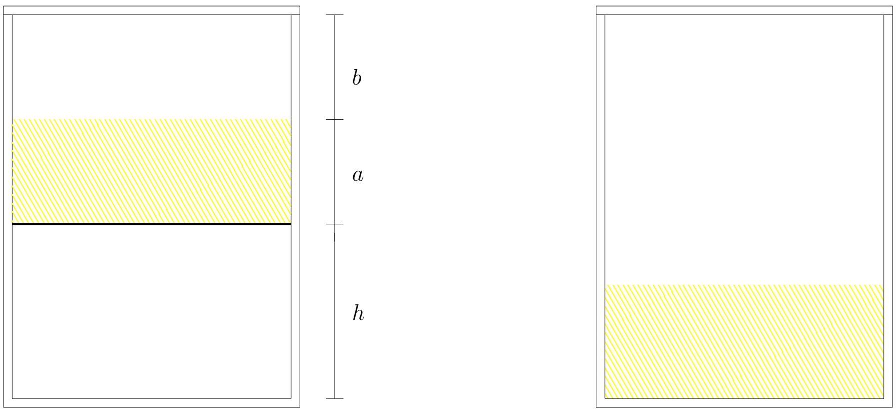
1.17. 8 febbraio 2013

Problema 1 (15 punti)

Un'astronave di massa m si trova in un'orbita ellittica attorno al sole. La velocità dell'astronave al perielio è quattro volte più grande di quella all'afelio, ed il periodo dell'orbita è $T = 4 \times 10^7$s.

1. Calcolare la massima e la minima distanza tra l'astronave e il sole.
2. Ad un certo istante l'equipaggio dell'astronave decide di cambiare orbita. Per farlo accende il sistema di propulsione a reazione per un tempo molto breve rispetto al periodo orbitale, espellendo una massa $m/2$ di gas con una velocità (relativa all'astronave) di modulo V_0 nella direzione opposta al moto. In quale punto dell'orbita si deve espellere la massa per ottenere il massimo aumento dell'energia cinetica del carico utile dell'astronave (che non comprende il gas)?
3. Se la massa viene espulsa al perielio, scegliere V_0 in modo da immettere l'astronave su un'orbita parabolica.

Problema 2 (15 punti)



Un cilindro di sezione S è separato in due parti da un setto scorrevole di massa e spessore trascurabile. Il cilindro non permette il passaggio di calore, mentre il setto si. Nello scomparto inferiore sono presenti n moli di gas perfetto monoatomico. Sopra il setto si trova invece del liquido di densità ρ. Inizialmente il setto si trova ad una altezza h dal fondo del cilindro, l'altezza della colonna di liquido è a e al di sopra di esso si trova un volume vuoto di altezza b.

1. Calcolare la temperatura iniziale del sistema.
2. Il setto si rompe. Calcolare la temperatura di equilibrio del sistema, supponendo che la capacità termica del liquido sia costante e valga C.

3. Calcolare la variazione di entropia del sistema, dicendo in particolare se è positiva, negativa o nulla.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Il momento angolare

$$L = m\omega r^2$$

si conserva. Quindi deve valere

$$mv_+ r_+ = mv_- r_-$$

dove abbiamo indicato con r_+, r_- le distanze dal sole all'afelio e al perielio, e con v_+, v_- le relative velocità. Dato che $v_- = 4v_+$ abbiamo

$$r_+ = 4r_-$$

Dalla terza legge di Keplero sappiamo che

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

dove $a = (r_+ + r_-)/2$ è il semiasse maggiore. Quindi

$$r_+ + r_- = \left(\frac{2GMT^2}{\pi^2}\right)^{1/3}$$

Risolvendo abbiamo

$$\begin{aligned} r_- &= \frac{1}{5}\left(\frac{2GMT^2}{\pi^2}\right)^{1/3} \\ r_+ &= \frac{4}{5}\left(\frac{2GMT^2}{\pi^2}\right)^{1/3} \end{aligned}$$

Domanda 2

Nel moto a reazione l'aumento della velocità è dato da

$$v_f - v_i = V_0 \log \frac{m_i}{m_f}$$

da cui, posto $m_i = m$ e $m_f = m/2$,

$$v_f = v_i + V_0 \log 2$$

La relativa variazione dell'energia cinetica del carico utile sarà

$$\begin{aligned}\Delta E_k &= \frac{m}{4}\left(v_i + V_0 \log 2\right)^2 - \frac{m}{4}v_i^2 \\ &= \frac{m}{4}\left(\log 2\right)^2 V_0^2 + \frac{m}{2}v_i V_0 \log 2\end{aligned}$$

Di conseguenza conviene espellere la massa quando v_i è massimo, ossia al perielio.

Domanda 3

All'afelio e al perielio prima dell'espulsione della massa valgono le relazioni

$$\begin{aligned}E &= \frac{L^2}{2mr_+^2} - \frac{GMm}{r_+} \\ E &= \frac{L^2}{2mr_-^2} - \frac{GMm}{r_-}\end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro troviamo

$$\frac{L^2}{2m}\left(\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2}\right) = GMm\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$$

ossia

$$L^2 = 2GMm^2\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right)^{-1}$$

Subito dopo l'espulsione deve essere

$$E' = \frac{L'^2}{mr_-^2} - \frac{1}{2}\frac{GMm}{r_-} = 0 \tag{1.17.1}$$

Il momento angolare dell'astronave dopo la fase di propulsione sarà

$$L' = \frac{m}{2}\left(v_i + V_0 \log 2\right) r_- = \frac{1}{2}L + \frac{m}{2}V_0 r_- \log 2$$

Sostituendo nella (1.17.1) otteniamo

$$V_0 = \frac{1}{\log 2}\sqrt{\frac{2GM}{r_-}}\left(1 - \sqrt{\frac{4}{5}}\right)$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

La pressione del gas è $\rho g a$, e il suo volume è Sh. Di conseguenza la temperatura del gas e dell'intero sistema deve essere

$$T_0 = \frac{\rho g S a h}{nR}$$

Domanda 2

L'energia interna del sistema gas+liquido non deve cambiare, quindi

$$(nc_V + C)\, T_0 + Mg\left(h + \frac{a}{2}\right) = (nc_V + C)\, T_f + Mg\frac{a}{2}$$

dove $M = \rho S a$ è la massa del liquido. Di conseguenza

$$T_f = T_0 + \frac{Mgh}{nc_V + C} = \frac{\rho g S a h}{n}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{c_V + \frac{C}{n}}\right)$$

Domanda 3

Abbiamo

$$dS = \frac{dQ}{T} = (nc_V + C)\,\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V}$$

da cui

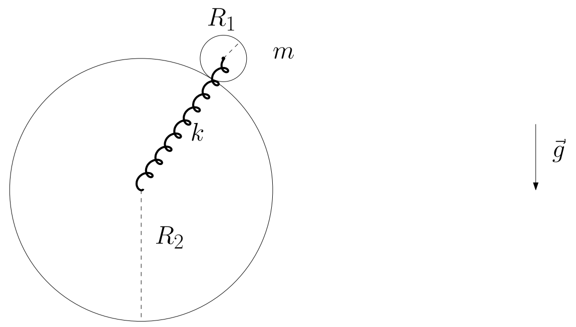
$$\Delta S = (nc_V + C)\log\frac{T_f}{T_0} + nR\log\frac{V_f}{V_0}$$

Esplicitamente otteniamo

$$\begin{aligned}
\Delta S &= (nc_V + C)\log\left(1 + \frac{R}{c_V + C/n}\right) + nR\log\left(1 + \frac{b}{h}\right) \\
&= (nc_V + C)\log\left(\frac{nc_P + C}{nc_V + C}\right) + nR\log\left(1 + \frac{b}{h}\right) > 0
\end{aligned}$$

1.18. 14 giugno 2013

Problema 1 (15 punti)



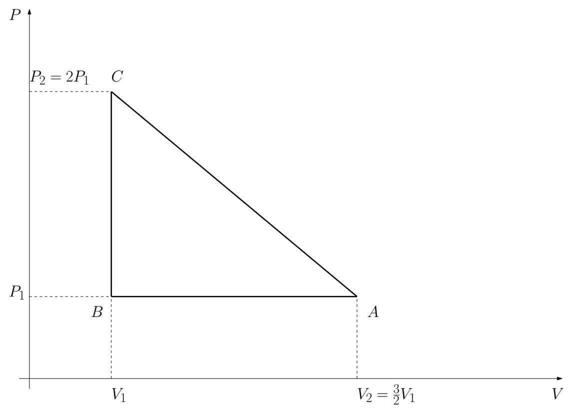
Un cilindro di raggio R_1 e massa m è in contatto con un altro cilindro, di raggio R_2, che rimane fisso. Il contatto è assicurato mediante una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k collegata ai due cilindri come in figura. Inizialmente il cilindro mobile si trova alla sommità di quello fisso, e viene spostato leggermente in modo da farlo cadere.

1. Se il cilindro piccolo è libero di strisciare su quello grande (assenza di attrito) trovare il valore minimo di k_{min} che permette di evitare il distacco in un giro completo.

2. Se il cilindro è vincolato a ruotare senza strisciare su quello grande il valore di k_{min} è maggiore o minore di quello determinato al punto precedente? Non è necessario il calcolo esplicito, ma occorre giustificare la risposta.

3. Sempre in condizioni di rotolamento puro e con $k > k_{\mathrm{min}}$, determinare la velocità del centro di massa del cilindro piccolo nel punto più basso della sua traiettoria.

Problema 2 (15 punti)



Una mole di un gas perfetto monoatomico è sottoposta alla trasformazione ciclica reversibile rappresentata in figura nel piano $P - V$. Si sa che $P_2 = 2P_1$ e $V_2 = 3V_1/2$.

1. Calcolare il calore specifico del gas nel tratto $C - A$ ed esprimerlo in funzione del solo volume.
2. Sotto quale condizione (se esiste) il gas assorbe calore su tutta la trasformazione $C - A$?
3. Calcolare il rendimento del ciclo.

Soluzione primo problema

Prima domanda

Dalla conservazione dell'energia abbiamo nel punto più basso

$$mg\left(R_1 + R_2\right) = -mg\left(R_1 + R_2\right) + \frac{1}{2}mv^2$$

quindi il centro di massa ha una accelerazione centripeta

$$\frac{v^2}{R_1 + R_2} = 4g$$

Dall'equazione del moto nella direzione radiale troviamo

$$-4mg = N + mg - k\left(R_1 + R_2\right)$$

dove N è la reazione vincolare. Dato che deve essere $N > 0$ otteniamo

$$-5mg + k\left(R_1 + R_2\right) > 0$$

e quindi

$$k_{\text{min}} = \frac{5mg}{\left(R_1 + R_2\right)}$$

Seconda domanda

Se il cilindro ruota senza strisciare la differenza di energia potenziale deve trasformarsi in parte in energia cinetica di rotazione. Quindi il centro di massa arriverà nella posizione più in basso con una velocità minore, l'accelerazione centripeta sarà ridotta e sarà sufficiente una costante elastica minore di quella valuata alla domanda precedente.

Terza domanda

Scriviamo l'energia. Abbiamo

$$E = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgy$$

Dalla condizione di rotolamento puro segue che il punto di contatto è in quiete. Quindi

$$v_{cm} = -R_1\omega$$

e quindi

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{R_1^2}\right) v_{cm}^2 + mgy \\ &= \frac{3}{4} m v_{cm}^2 + mgy \end{aligned}$$

Dalla conservazione dell'energia otteniamo

$$2mg\left(R_1 + R_2\right) = \frac{3}{4} m v_{cm}^2$$

e quindi

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{8}{3} g \left(R_1 + R_2\right)}$$

Soluzione secondo problema

Prima domanda

Dalla prima legge della termodinamica abbiamo

$$dQ = \left(c_V + P\frac{dV}{dT}\right) dT$$

e quindi

$$c = c_V + P\frac{dV}{dT}$$

La trasformazione $C \to A$ è descritta dalla legge

$$\frac{V - \frac{3}{2}V_1}{V_1 - \frac{3}{2}V_1} = \frac{P - P_1}{2P_1 - P_1}$$

ossia

$$P = 2P_1\left(2 - \frac{V}{V_1}\right)$$

ed usando l'equazione di stato abbiamo

$$T = \frac{2P_1 V}{R}\left(2 - \frac{V}{V_1}\right)$$

da cui

$$\frac{dV}{dT} = \frac{R}{4P_1}\frac{V_1}{V_1 - V}$$

Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned} c &= c_V - \frac{R}{2}\left(\frac{2V_1 - V}{V - V_1}\right) \\ &= c_P - R\frac{V}{2\left(V - V_1\right)} \end{aligned}$$

Seconda domanda

Possiamo calcolare il calore scambiato su tutta la trasformazione. Dal primo principio

$$\begin{aligned} Q_{CA} &= \Delta U_{CA} + L_{CA} \\ &= c_V\left(T_A - T_C\right) + \frac{1}{2}3P_1\frac{1}{2}V_1 \\ &= \frac{3}{2}\left(RT_A - RT_C\right) + \frac{3}{4}P_1V_1 \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}P_1V_1 - 2P_1V_1\right) + \frac{3}{4}P_1V_1 = 0 \end{aligned}$$

Possiamo concludere che il gas non può assorbire calore su tutta la trasformazione.

Più in dettaglio, dato che per $V > V_1$

$$\frac{dV}{dT} = \frac{R}{4P_1}\frac{V_1}{V_1 - V} < 0$$

per tutto il tratto $C-A$ la temperatura diminuisce. Di conseguenza il calore sarà assorbito quando $c < 0$, ossia per

$$c = \frac{2c_v\left(V - V_1\right) - R\left(2V_1 - V\right)}{2\left(V - V_1\right)} < 0$$

Questo significa

$$V < V_1\frac{2R + 2c_V}{2c_v + R} = \frac{5}{4}V_1$$

Terza domanda

Il lavoro è dato da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}P_1V_1$$

Il calore assorbito invece

$$\begin{aligned} Q_a &= \Delta U_{BC} + \Delta U_{CX} + L_{CX} \\ &= \Delta U_{BX} + \frac{1}{2}\left(2P_1 + P_X\right)\left(V_X - V_1\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(RT_X - RT_B\right) + \frac{1}{2}\left(2P_1 + P_X\right)\left(V_X - V_1\right) \end{aligned}$$

dove $V_X = \frac{5}{4}V_1$ e corrispondentemente

$$\begin{aligned} P_X &= P = 2P_1\left(2 - \frac{V_X}{V_1}\right) = \frac{3}{2}P_1 \\ T_X &= \frac{1}{R}P_X V_X = \frac{1}{R}\frac{15}{8}P_1 V_1 \end{aligned}$$

Sostituendo abbiamo

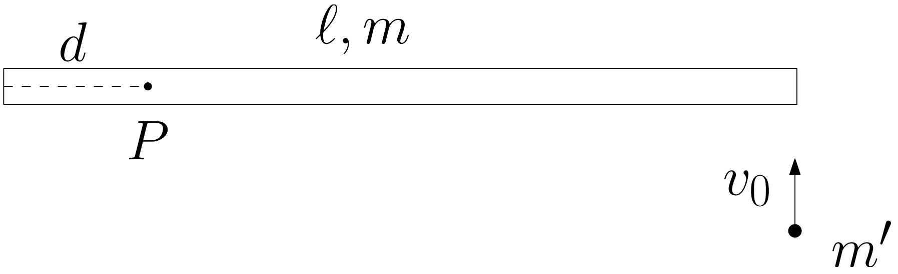
$$Q_a = \frac{7}{4}P_1 V_1$$

e quindi

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_a} = \frac{1}{7}$$

1.19. 10 luglio 2013

Problema 1 (15 punti)



Un'asta di lunghezza ℓ e massa m può ruotare senza attrito attorno ad un punto P posto ad una distanza $d < \ell/2$ da un estremo, rimanendo in un piano orizzontale.

1. Una particella di massa m' e velocità v_0 diretta come in figura urta la sbarra nell'estremo più lontano da P e rimane unita ad essa. Determinare la velocità angolare della sbarra dopo l'urto.

2. Si consideri adesso il caso $d = \ell/2$. La sbarra viene messa in movimento con velocità angolare ω_0, e ad un certo istante uno dei suoi estremi urta elasticamente un punto materiale di massa m' in quiete. Determinare m' in modo tale che dopo l'urto la sbarra sia ferma.

3. Sempre nel caso $d = \ell/2$, e per il valore di m' precedentemente determinato, calcolare il modulo dell'impulso applicato dal vincolo alla sbarra durante l'urto.

Problema 2 (15 punti)

Due corpi hanno la stessa capacità termica C dipendente linearmente dalla temperatura, $C = bT$. Si trovano inizialmente alla stessa temperatura T_0, in presenza di un bagno termico di temperatura T_B. Si possono compiere trasformazioni termodinamiche arbitrarie sul sistema.

1. Calcolare il massimo aumento possibile per l'entropia totale.

2. Determinare la massima temperatura alla quale è possibile portare uno dei due corpi, scelto arbitrariamente.

3. Se si pongono inizialmente e permanentemente i due corpi in contatto termico tra di loro, quanto vale il massimo lavoro che è possibile estrarre dal sistema?

Soluzione primo problema

Prima domanda

Si conserva il momento angolare rispetto a P. Possiamo allora scrivere

$$m' v_0 (\ell - d) = \left[I_P + m' (\ell - d)^2 \right] \omega$$

dove

$$I_P = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2} - d\right)^2$$

è il momento di inerzia della sbarra rispetto a P. In conclusione

$$\omega = \frac{m' v_0 (\ell - d)}{\frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2} - d\right)^2 + m'(\ell - d)^2}$$

Seconda domanda

Durante l'urto si conserva il momento angolare del sistema e la sua energia. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m\ell^2\right)\omega_0^2 &= \frac{m'}{2}v^2 \\ \frac{1}{12}m\ell^2\omega_0 &= m'\frac{\ell}{2}v \end{aligned}$$

Dove abbiamo indicato con v la velocità del punto materiale dopo l'urto. Ricavando quest'ultima dalla seconda relazione

$$v = \frac{m}{m'}\frac{1}{6}\ell\omega_0$$

e sostituendo nella prima abbiamo

$$m' = \frac{1}{3}m$$

Terza domanda

La quantità di moto della sbarra è nulla prima e dopo l'urto, quindi durante l'urto l'impulso totale applicato ad essa è nullo. Questo è dato dalla somma dell'impulso applicato dal vincolo e di quello applicato dal punto materiale, che saranno quindi uguali in modulo e direzione ma opposti in verso. Per il terzo principio l'impulso che il punto materiale applica alla sbarra è uguale e opposto a quello che la sbarra applica al punto materiale.

In conclusione l'impulso J cercato sarà uguale a quello applicato dalla sbarra al punto materiale. Conoscendo la variazione della quantità di moto di quest'ultimo possiamo scrivere

$$J = m'v = \left(\frac{1}{3}m\right)\left(\frac{1}{6}\frac{m}{m'}\ell\omega_0\right) = \frac{1}{6}m\ell\omega_0$$

Soluzione secondo problema

Prima domanda

La massima produzione di entropia si otterrà ponendo i due corpi in contatto con il bagno termico. Le temperature finali saranno $T_1 = T_2 = T_B$, e l'entropia prodotta

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{Q_B}{T_B} + \int_{T_0}^{T_B} \frac{kTdT}{T} + \int_{T_0}^{T_B} \frac{kTdT}{T} \\ &= \frac{Q_B}{T_B} + 2b\left(T_B - T_0\right)\end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con Q_B il calore ceduto al bagno termico. D'altra parte

$$Q_B + Q_1 + Q_2 = 0$$

dove Q_1 e Q_2 sono i calori ceduti ai due corpi, quindi

$$Q_B = -2\int_{T_0}^{T_B} bTdT = b\left(T_0^2 - T_B^2\right)$$

e quindi

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{b}{T_B}\left(T_0^2 - T_B^2\right) + 2b\left(T_B - T_0\right) \\ &= bT_B\left(\frac{T_0}{T_B} - 1\right)^2\end{aligned}$$

Seconda domanda

In questo caso si deve procedere reversibilmente, quindi $\Delta S = 0$. Nello stato finale uno dei due corpi avrà la stessa temperatura del bagno termico, l'alto la temperatura massima cercata. Quindi

$$\Delta S = \frac{Q_B}{T_B} + \int_{T_0}^{T_f} \frac{bTdT}{T} + \int_{T_0}^{T_B} \frac{bTdT}{T} = 0$$

da cui

$$\frac{Q_B}{T_B} + b\left(T_f + T_B - 2T_0\right) = 0$$

e

$$\begin{aligned}Q_B &= -\int_{T_0}^{T_f} kTdT - \int_{T_0}^{T_B} kTdT \\ &= \frac{b}{2}\left(2T_0^2 - T_f^2 - T_B^2\right)\end{aligned}$$

e quindi

$$\left(2T_0^2 - T_f^2 - T_B^2\right) + 2T_B\left(T_f + T_B - 2T_0\right) = 0$$

Risolvendo troviamo la temperatura finale

$$T_f = T_B + \sqrt{2}\,|T_0 - T_B|$$

Terza domanda

I due corpi in contatto termico sono equivalenti ad un unico corpo di capacità termica $2C$. Allora avremo

$$Q_B + Q_{12} + W = 0$$

e

$$Q_{12} = 2b \int_{T_0}^{T_B} T dT = b\left(T_B^2 - T_0^2\right)$$

Lavorando reversibilmente inoltre dovrà essere

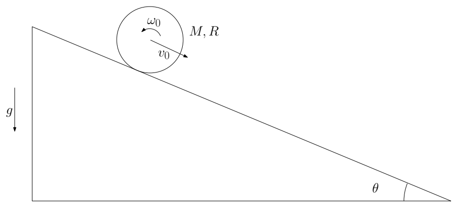
$$\Delta S = \frac{Q_B}{T_B} + 2b \int_{T_0}^{T_B} dT = \frac{Q_B}{T_B} + 2b\,(T_B - T_0) = 0$$

e quindi

$$\begin{aligned} W &= -Q_B - Q_{12} = 2bT_B\,(T_B - T_0) - b\left(T_B^2 - T_0^2\right) \\ &= b\,(T_B - T_0)^2 \end{aligned}$$

1.20. 10 settembre 2013

Esercizio 1 (15 punti)



Un cilindro di raggio R e massa M si trova appoggiato su un piano inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo θ. Si è in presenza di attrito dinamico, caratterizzato da un coefficiente μ_D.

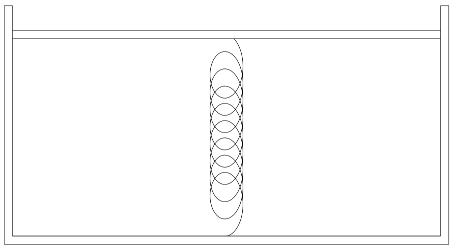
Inizialmente il cilindro ruota con velocità angolare $\omega_0 > 0$ e il suo centro di massa si muove con velocità $v_0 > 0$ parallelamente al piano.

1. Si osserva che a $t = t_1$ il moto del cilindro è diventato di puro rotolamento. Per quale valore minimo di μ_D questo è possibile?

2. Calcolare t_1.

3. Calcolare l'energia dissipata.

Esercizio 2 (15 punti)



Nel recipiente in figura, impermeabile al calore, sono contenute n moli di un gas perfetto monoatomico. La parete superiore (di superficie totale S) può scorrere liberamente ed ha una massa M. Tra essa e la parete inferiore è fissata una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo ℓ_0. La pressione esterna al recipiente è trascurabile.

1. Inizialmente il sistema è all'equilibrio e la molla ha una lunghezza $\ell > \ell_0$. Calcolare la pressione e la temperatura del gas.

2. Si fornisce lentamente del calore al sistema misurando la variazione di temperatura. Dire per quale valore di ℓ_0 la capacità termica del sistema è costante, e calcolarla.

3. Quando il sistema si trova nello stato di equilibrio iniziale la molla si spezza. Calcolare la variazione di entropia del sistema, limitandosi al caso $\ell_0 = 0$.

Soluzione primo problema

Prima domanda

Le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} I_{cm}\dot{\omega} &= F_A R \\ M\dot{v} &= F_A + Mg\sin\theta \\ 0 &= N - Mg\cos\theta \end{aligned}$$

Dato che nelle condizioni indicate il punto di contatto si muove in direzione positiva la forza di attrito vale $F_A = -\mu_D N = -\mu_D Mg\cos\theta$. Quindi

$$\begin{aligned} I_{cm}\dot{\omega} &= -\mu_D MgR\cos\theta \\ M\dot{v} &= -\mu_D Mg\cos\theta + Mg\sin\theta \end{aligned}$$

dove $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$ è il momento di inerzia del cilindro rispetto ad un asse passante per il punto di contatto. Possiamo anche scrivere

$$\begin{aligned} R\dot{\omega} &= -2\mu_D g\cos\theta \\ \dot{v} &= -\mu_D g\cos\theta + g\sin\theta \end{aligned}$$

e sommando membro a membro otteniamo

$$\frac{d}{dt}(v + \omega R) = g(\sin\theta - 3\mu_D\cos\theta)$$

Nel puro rotolamento $v + \omega R = 0$. Dato che inizialmente questa quantità è positiva, affinché questa condizione venga raggiunta è necessario che

$$\sin\theta - 3\mu_D\cos\theta < 0$$

e quindi che

$$\mu_D > \frac{1}{3}\tan\theta$$

Seconda domanda

Integrando l'equazione del moto precedente troviamo

$$v + \omega R = v_0 + \omega_0 R + g(\sin\theta - 3\mu_D\cos\theta)\,t$$

e quindi il puro rotolamento inizia all'istante

$$t_1 = \frac{v_0 + \omega_0 R}{g(3\mu_D\cos\theta - \sin\theta)}$$

Terza domanda

L'energia dissipata è data dal lavoro fatto dalla forza di attrito sul cilindro cambiato di segno, cioè

$$W = -\int F_A ds = -F_A \int_0^{t_1} (v + \omega R)\, dt$$

Calcolando l'integrale abbiamo

$$\begin{aligned} W &= \mu_D M g \cos\theta \left[(v_0 + \omega_0 R)\, t_1 + \frac{1}{2} g \left(\sin\theta - 3\mu_D \cos\theta \right) t_1^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} M \left(\frac{\mu_D \cos\theta}{3\mu_D \cos\theta - \sin\theta} \right) (v_0 + \omega_0 R)^2 \end{aligned}$$

Soluzione secondo problema

Prima domanda

All'equilibrio deve essere

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{k(\ell - \ell_0) + Mg}{S} \\ V_0 &= S\ell \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione di stato $PV = nRT$ troviamo

$$T_0 = \frac{k\ell(\ell - \ell_0) + Mg\ell}{nR} \tag{1.20.1}$$

Seconda domanda

Dal primo principio abbiamo per il sistema composto da gas, molla e pistone

$$dQ = dU$$

dato che il sistema non compie lavoro. L'energia del sistema (data dalla somma dell'energia interna del gas, dell'energia elastica della molla e energia potenziale gravitazionale del pistone) vale

$$U = nc_V T + \frac{k}{2} (\ell - \ell_0)^2 + Mg\ell$$

e quindi

$$dU = nc_V dT + k(\ell - \ell_0)\, d\ell + Mg d\ell$$

D'altra parte dalla relazione di equilibrio (1.20.1) segue che

$$dT = \frac{k(2\ell - \ell_0) + Mg}{nR} d\ell$$

e quindi

$$dQ = nc_V dT + [k(\ell - \ell_0) + Mg]\, d\ell$$

ossia

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dT} &= nc_V + [k(\ell - \ell_0) + Mg]\,\frac{nR}{k(2\ell - \ell_0) + Mg} \\ &= nc_V + nR\frac{k(\ell - \ell_0) + Mg}{k(2\ell - \ell_0) + Mg} \end{aligned}$$

che è costante quando

$$-2k\ell_0 + 2Mg = -k\ell_0 + Mg$$

ossia

$$\ell_0 = \frac{Mg}{k}$$

Quando questo avviene si ha

$$\frac{dQ}{dT} = nc_V + n\frac{1}{2}R$$

Terza domanda

Dal primo principio si ha che

$$nc_V T_0 + \frac{k}{2}\ell^2 + Mg\ell = nc_V T_f + Mg\ell_f$$

Sappiamo che all'equilibrio

$$T_0 = \frac{k\ell^2 + Mg\ell}{nR}$$

$$T_f = \frac{Mg\ell_f}{nR}$$

e sostituendo otteniamo

$$\left(\frac{c_V}{R} + \frac{1}{2}\right)k\ell^2 + \frac{c_V}{R}Mg\ell + Mg\ell = \left(\frac{c_V}{R} + 1\right)Mg\ell_f$$

o anche, posto $\gamma = c_P/c_V$,

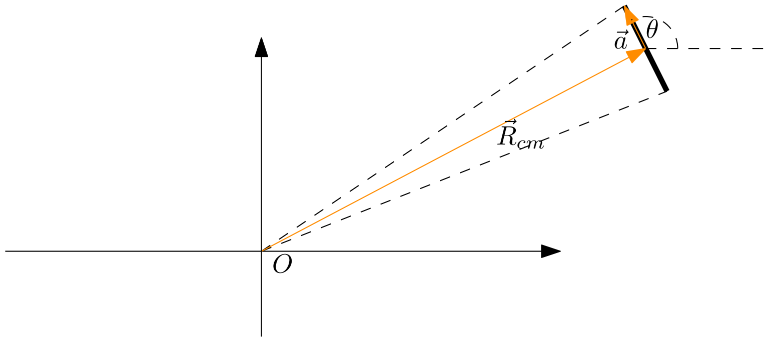
$$\ell_f = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\frac{k\ell^2}{Mg} + \ell$$

La variazione di entropia del sistema si scrive

$$
\begin{aligned}
\Delta S &= nc_V \log \frac{T_f}{T_0} + nR \log \frac{V_f}{V_0} \\
&= nc_V \log \frac{Mg\ell_f}{k\ell^2 + Mg\ell} + nR \log \frac{\ell_f}{\ell} \\
&= nc_V \log \frac{1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\frac{k\ell}{Mg}}{1 + \frac{k\ell}{Mg}} + nR \log \left[1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\frac{k\ell}{Mg}\right] \\
&= nc_P \log \left[1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\frac{k\ell}{Mg}\right] - nc_V \log \left[1 + \frac{k\ell}{Mg}\right]
\end{aligned}
$$

1.21. 14 gennaio 2014

Esercizio 1 (15 punti)



Una sbarra sottile di lunghezza $\ell = 2a$ e massa m si muove in un piano orizzontale. I suoi due estremi sono collegati ad un punto fisso O mediante due molle di lunghezza a riposo nulla, massa trascurabile e costante elastica k. Per descrivere il sistema si scelgano le coordinate Cartesiane x, y del centro di massa e l'angolo di inclinazione θ della sbarra rispetto ad una direzione di riferimento. La massa è distribuita uniformemente sulla sbarra.

1. Scrivere in funzione delle coordinate specificate e delle loro derivate temporali l'energia totale del sistema, il momento angolare totale rispetto ad un polo posto nel centro di massa del sistema, il momento angolare totale rispetto ad un polo posto in O.

2. Dire, motivando la risposta, se le tre quantità precedenti sono costanti del moto e descrivere il moto più generale del sistema.

3. Se è possibile scegliere le sei condizioni iniziali $x(0)$, $\dot{x}(0)$, $y(0)$, $\dot{y}(0)$, $\theta(0)$ e $\dot{\theta}(0)$ in modo che negli istanti successivi un estremo della sbarra sia fisso in O, e l'altro si muova di moto circolare uniforme. Calcolare la velocità angolare del corpo rigido e la velocità angolare del moto circolare uniforme.

Esercizio 2 (15 punti)

Un recipiente contiene n_1 moli di un gas perfetto monoatomico e n_2 moli di un gas perfetto biatomico. Tenuto conto che in una trasformazione adiabatica vale la legge

$$TV^{\gamma-1} = \text{costante}$$

dove T è la temperatura e V il volume totale

1. Calcolare il valore di γ

2. Calcolare il calore specifico molare del gas in una trasformazione nella quale

$$PV^{5/3} = \text{costante}$$

3. Se il gas è vincolato a trasformarsi secondo la legge precedente, e si trova inizialmente ad una temperatura T_i, calcolare il massimo lavoro estraibile in presenza di un bagno termico di temperatura T_b.

Soluzione primo esercizio

Prima domanda

Per l'energia abbiamo

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv_{cm}^2+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2+\frac{k}{2}\left|\vec{R}_{cm}+\vec{a}\right|^2+\frac{k}{2}\left|\vec{R}_{cm}-\vec{a}\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2+k\left(x^2+y^2\right)+ka^2 \end{aligned}$$

dove $I=m\ell^2/12$ ed abbiamo indicato con $\vec{R}_{cm}$ il vettore posizione corrispondente al centro di massa. Consideriamo un sistema di riferimento come in figura, con gli assi x e y nel piano nel quale avviene il moto. Per il momento angolare rispetto al centro di massa abbiamo

$$\vec{L}_{cm}=I\dot{\theta}\hat{z}$$

e per il momento angolare totale rispetto ad O

$$\begin{aligned} \vec{L} &= m\vec{R}_{cm}\wedge\vec{v}_{cm}+\vec{L}_{cm} \\ &= m\begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{pmatrix}+\vec{L}_{cm} \\ &= m\left(x\dot{y}-y\dot{x}\right)\hat{z}+I\dot{\theta}\hat{z} \end{aligned}$$

Seconda domanda

Tutte e tre le quantità si conservano. L'energia si conserva poiché non vi sono forze esterne al sistema che compiono lavoro. Il momento angolare rispetto al centro di massa si conserva perché il momento delle forze esterne è nullo:

$$\vec{M}=\vec{a}\wedge\left[-k\left(\vec{R}_{cm}+\vec{a}\right)\right]+(-\vec{a})\wedge\left[-k\left(\vec{R}_{cm}-\vec{a}\right)\right]=0$$

Infine il momento angolare rispetto ad O si conserva per lo stesso motivo: entrambe le forze esterne (quelle delle due molle) hanno momento nullo rispetto a tale polo.

Dato che $\vec{L}_{cm}$ si conserva $\dot{\theta}$ è costante. Segue che la quantità

$$E'=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+k\left(x^2+y^2\right)$$

si conserva. Ma questa è l'energia di una particella di massa m vincolata ad una molla di costante elastica $2k$. Si conserva inoltre

$$\vec{L} - \vec{L}_{cm} = m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)\hat{z}$$

che è il momento angolare della stessa particella. Quindi l'asta ruota con velocità angolare costante, mentre il centro di massa percorre un'orbita ellittica attorno ad O, che risulta dalla composizione di due moti armonici lungo x e lungo y di uguale pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Terza domanda

Nel caso considerato il centro di massa compie un moto circolare uniforme ad una distanza a dall'origine. Quindi possiamo porre, ad esempio,

$$\begin{aligned} x &= a\cos\omega t \\ y &= a\sin\omega t \end{aligned}$$

e quindi dovrà essere

$$\begin{aligned} x(0) &= a \\ y(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= 0 \\ \dot{y}(0) &= a\omega \end{aligned}$$

Consideriamo un estremo della sbarra. La sua legge oraria sarà data da

$$\begin{aligned} X &= a\cos\omega t - a\cos\theta \\ Y &= a\sin\omega t - a\sin\theta \end{aligned}$$

e dato che deve essere $X = Y = 0$ avremo

$$\theta = \omega t$$

cioè

$$\begin{aligned} \theta(0) &= 0 \\ \dot{\theta}(0) &= \omega \end{aligned}$$

Quindi sia la velocità angolare del corpo rigido che quella del centro di massa attorno ad O valgono ω.

Soluzione secondo esercizio

Prima domanda

Dal primo principio

$$dQ = dU_1 + dU_2 + (P_1 + P_2)\, dV = 0$$

e quindi

$$(n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}) \frac{dT}{T} + (n_1 + n_2)\, R \frac{dV}{V} = 0$$

Integrando troviamo

$$\log TV^{\frac{(n_1+n_2)R}{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}}} = \text{costante}$$

e quindi

$$\gamma = \frac{(n_1 + n_2)R}{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}} + 1 = \frac{n_1 c_{P1} + n_2 c_{P2}}{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}}$$

Seconda domanda

In questo caso abbiamo

$$\begin{aligned} dQ &= dU_1 + P_1 dV + dU_2 + P_2 dV \\ &= n_1 T \left(c_{V1} \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \right) + n_2 T \left(c_{V2} \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \right) \end{aligned}$$

Notiamo che $c_{P1}/c_{V1} = 5/3$ e quindi per la trasformazione considerata

$$TV^{\frac{c_{P1}}{c_{V1}} - 1} = \text{costante}$$

da cui

$$T^{c_{V1}} V^R = \text{costante}$$

cioè

$$c_{V1} \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = 0$$

quindi

$$dQ = n_2 \left(c_{V2} - c_{V1} \right) dT$$

Di conseguenza

$$c = \frac{1}{n_1 + n_2} n_2 \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \right) R = \frac{n_2}{n_1 + n_2} R$$

Terza domanda

Detti dQ_1 e dQ_2 i calori assorbiti dal gas e dal bagno termico rispettivamente abbiamo

$$dW = -dQ_1 - dQ_2$$

ma

$$dQ_1 = cdT$$

e quindi

$$W = (n_1 + n_2)\, c\, (T_i - T_f) - Q_2$$

D'altra parte se si opera reversibilmente

$$dS = \frac{dQ_2}{T_f} + dS_{gas} = 0$$

e quindi

$$Q_2 = -T_f \int_{T_i}^{T_f} \frac{(n_1 + n_2)\, cdT}{T} = T_f\, (n_1 + n_2)\, c \log \frac{T_i}{T_f}$$

In conclusione

$$\begin{aligned} W &= (n_1 + n_2)\, c\, (T_i - T_f) + (n_1 + n_2)\, cT_f \log \frac{T_f}{T_i} \\ &= n_2 R \left[(T_i - T_f) + T_f \log \frac{T_f}{T_i} \right] \end{aligned}$$

1.22. 4 febbraio 2014

Esercizio 1 (15 punti)

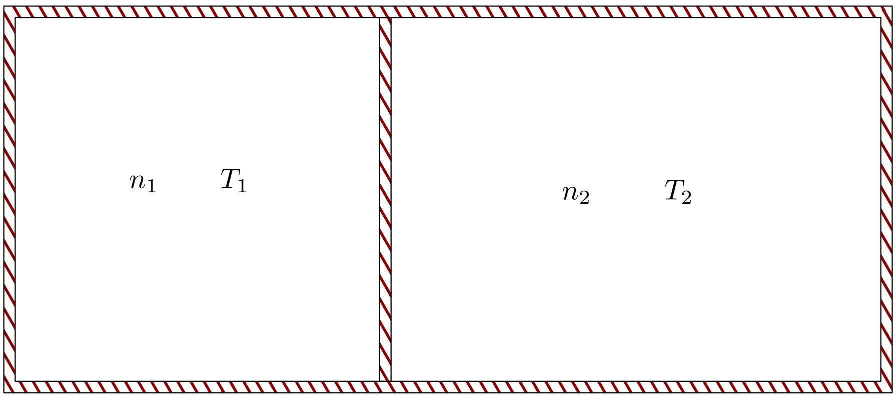
Un estremo di una sbarra sottile di lunghezza ℓ è imperniato e libero di ruotare attorno ad un supporto mobile. Questo può muoversi su un piano orizzontale privo di attrito. La massa del supporto è trascurabile, mentre quella della sbarra vale in totale m ed è distribuita su di essa in modo non noto. Si conosce però la posizione del centro di massa della sbarra, che si trova ad una distanza a dall'estremo imperniato. Inoltre il momento di inerzia della sbarra rispetto ad un asse passante per il suo centro di massa vale $I_{cm} = km\ell^2$ con k costante.

1. Se al supporto è applicata una forza orizzontale costante f, quale deve essere l'angolo che la sbarra forma con la direzione verticale per rimanere in equilibrio?

2. Supponiamo che il supporto si trovi inizialmente in moto con velocità costante v_0, e che la sbarra sia in posizione verticale in equilibrio stabile. Ad un certo momento il supporto incontra un ostacolo che lo blocca improvvisamente. Calcolare per quale valore minimo di v_0 la sbarra compie un giro completo.

3. Nel caso precedente, quale relazione di deve essere tra k e a affinché l'energia si conservi nell'urto?

Esercizio 2 (15 punti)



In ciascuno dei due scomparti del recipiente in figura sono contenute rispettivamente n_1 e n_2 moli di un gas perfetto monoatomico. Sia il recipiente che il setto scorrevole interno che divide le due parti sono perfettamente impermeabili al calore. Inizialmente il sistema è all'equilibrio: il volume totale è V, le temperature dei due scomparti sono identiche e uguali a T_0.

1. Calcolare pressioni e volumi iniziali dei due scomparti.

2. Considerare d'ora in poi il solo caso $n_1 = n_2 = 1$. Mediante una opportuna forza esterna si sposta il setto reversibilmente in modo da dimezzare il volume di uno dei due scomparti. Calcolare le nuove temperature dei due scomparti e il lavoro W fatto sul sistema.

3. Il setto intermedio viene adesso bloccato nella posizione raggiunta. Si vuole estrarre dal sistema il massimo lavoro possibile utilizzando una macchina termica reversibile che usa come sorgenti calde e fredde i due scomparti. Quale frazione del lavoro W è possibile recuperare?

Soluzione primo esercizio

Prima domanda

Se la sbarra è in equilibrio l'accelerazione del centro di massa del sistema è orizzontale e vale $a_{cm} = f/m$. In un sistema di riferimento solidale al supporto al centro di massa sarà applicata una forza apparente $-f\hat{x}$ e la forza peso $-mg\hat{y}$. Il momento totale rispetto al perno sarà nullo quando

$$-fa\cos\theta - mga\sin\theta = 0$$

cioè per

$$\tan\theta = -\frac{f}{mg}$$

Seconda domanda

Nell'urto si conserva il momento angolare rispetto al perno. Quindi

$$mav_0 = \left(I_{cm} + ma^2\right)\omega$$

da cui la velocità angolare dopo l'urto

$$\omega = \frac{a}{k\ell^2 + a^2} v_0$$

Da questo momento l'energia si conserva, e l'asta sarà in grado di compiere un giro completo se

$$\frac{1}{2}\left(I_{cm} + ma^2\right)\omega^2 \geq 2mga$$

cioè per

$$v_0 \geq 2\sqrt{ga\left(1 + k\frac{\ell^2}{a^2}\right)}$$

Terza domanda

La variazione di energia nell'urto è

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{1}{2}\left(I_{cm}+ma^2\right)\omega^2-\frac{1}{2}mv_0^2\\ &= \frac{1}{2}m\left[\frac{a^2}{k\ell^2+a^2}-1\right]v_0^2\end{aligned}$$

che si annulla se $k=0$. Questo significa che la massa della sbarra è tutta concentrata nel suo centro di massa, che si può trovare in una posizione arbitraria.

Soluzione secondo esercizio

Prima domanda

L'equilibrio meccanico si ha quando le pressioni dei due scomparti sono uguali. Questo significa

$$\frac{n_1}{V_1}=\frac{n_2}{V_2}$$

e inoltre $V_{1,0}+V_{2,0}=V$, quindi

$$\begin{aligned}V_{1,0} &= \frac{n_1}{n_1+n_2}V\\ V_{2,0} &= \frac{n_2}{n_1+n_2}V\end{aligned}$$

La pressione nei due scomparti sarà dunque

$$P_0=\frac{n_1RT_0}{V_{1,0}}=\frac{n_2RT_0}{V_{2,0}}=\left(n_1+n_2\right)\frac{RT}{V}$$

come ci si poteva aspettare a priori.

Seconda domanda

Durante lo spostamento del setto i gas nei due scomparti compiono una trasformazione adiabatica reversibile. Il lavoro totale fatto sul gas è uguale alla variazione dell'energia interna del sistema

$$W=c_V\left(T_1+T_2-2T_0\right)$$

e dato che le trasformazioni dei due gas sono adiabatiche reversibili vale

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}VT_1^{\frac{1}{\gamma-1}} &= \frac{1}{2}VT_0^{\frac{1}{\gamma-1}}\\ \frac{3}{4}VT_2^{\frac{1}{\gamma-1}} &= \frac{1}{2}VT_0^{\frac{1}{\gamma-1}}\end{aligned}$$

e quindi

$$T_1 = 2^{\gamma-1} T_0$$
$$T_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\gamma-1} T_0$$

Sostituendo otteniamo

$$W = c_V \left[2^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - 2\right] T_0 \simeq 0.35\ c_V T_0$$

Terza domanda

Detti dQ_1 e dQ_2 i calori ceduti ai due scomparti in un ciclo infinitesimo, deve essere

$$dQ_1 + dQ_2 + dW' = 0$$

per il primo principio, e quindi

$$W' = -c_V \left(2T_f - T_1 - T_2\right)$$

dove si è indicato con W' il lavoro totale estratto e con T_f la temperatura finale comune dei due scomparti. Operando reversibilmente inoltre deve essere

$$dS = \frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} = 0$$

e integrando otteniamo

$$\log \frac{T_f^2}{T_1 T_2} = 0$$

cioè $T_f = \sqrt{T_1 T_2}$. In conclusione

$$W' = c_V \left(T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2}\right) = c_V \left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right)^2$$

e la frazione del lavoro recuperato è

$$\frac{W'}{W} = \frac{\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right)^2}{T_1 + T_2 - 2T_0} = \frac{\left[2^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2}{\left[2^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - 2\right]} \simeq 0.43$$

1.23. 3 giugno 2014

Primo esercizio

Si consideri un pendolo, costituito da un'asta rigida di lunghezza ℓ e massa trascurabile e da un corpo di massa m fissato ad una estremità dell'asta. Un opportuno perno fa sì che il pendolo abbia come unico grado di libertà quello di rotazione attorno ad esso. Il pendolo oscilla in un piano verticale in rotazione uniforme con velocità angolare Ω intorno all'asse verticale passante per il punto di sospensione.

1. Determinare per quali valori di Ω l'unica posizione di equilibrio stabile nel sistema rotante è $\theta = 0$ (θ è l'angolo di elongazione del pendolo).

2. Studiare le posizioni di equilibrio stabile e instabile per Ω diverso dai valori determinati al punto precedente.

3. Determinare i periodi delle piccole oscillazioni, in funzione di Ω, per le posizioni di equilibrio stabile.

4. Scegliendo un polo sul perno, determinare il momento di forza applicato da questo al sistema negli istanti nei quali il pendolo si trova in posizione verticale. Esprimere il risultato in funzione dell'ampiezza $\Delta\theta$ dell'oscillazione, nell'approssimazione di piccole oscillazioni attorno a $\theta = 0$.

Secondo esercizio

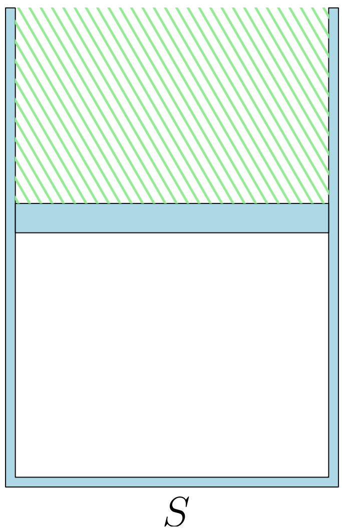


Figura 1.6.: Il recipiente cilindrico considerato nell'esercizio.

Il recipiente cilindrico in figura ha sezione S e volume totale V_T. Nello scomparto inferiore si trovano n moli di un gas perfetto monoatomico. Quello superiore è riempito fino all'orlo con un liquido di densità ρ. La massa e lo spessore del setto intermedio sono trascurabili, ed anche la pressione esterna lo è.

1. Sapendo che inizialmente il sistema si trova all'equilibrio ed il volume occupato dal gas è $V_0 = V_T/2$, calcolare la temperatura di quest'ultimo.

2. Con una trasformazione reversibile del gas si porta il suo volume a $V_1 = 9/10 V_T$. Calcolare la sua temperatura finale e rappresentare la trasformazione nel piano $P - V$.

3. Calcolare il calore totale scambiato dal gas durante la trasformazione, e la sua variazione di entropia.

Soluzione primo esercizio

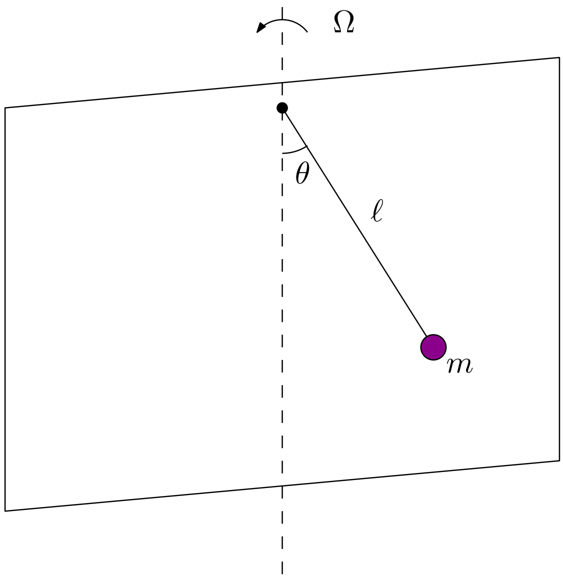


Figura 1.7.: Il pendolo sul piano in rotazione.

Prima domanda

Tenendo conto del potenziale centrifugo, l'energia potenziale vale

$$
\begin{aligned}
U &= -mg\ell\cos\theta - \frac{1}{2}m\Omega^2\ell^2\sin^2\theta \\
&= m\Omega^2\ell^2\left[\frac{1}{2}\cos^2\theta - \frac{g}{\Omega^2\ell}\cos\theta - \frac{1}{2}\right]
\end{aligned}
$$

Le posizioni di equilibrio corrispondono a

$$\frac{dU}{d\theta} = m\Omega^2\ell^2\left(\frac{g}{\Omega^2\ell} - \cos\theta\right)\sin\theta = 0$$

cioè

$$\theta_1 = 0$$
$$\theta_2 = \pi$$
$$\cos\theta_3 = \frac{g}{\Omega^2\ell}$$

Per discutere il segno di questa espressione consideriamo tre casi, riassunti nel diagramma in Figura 1.8.

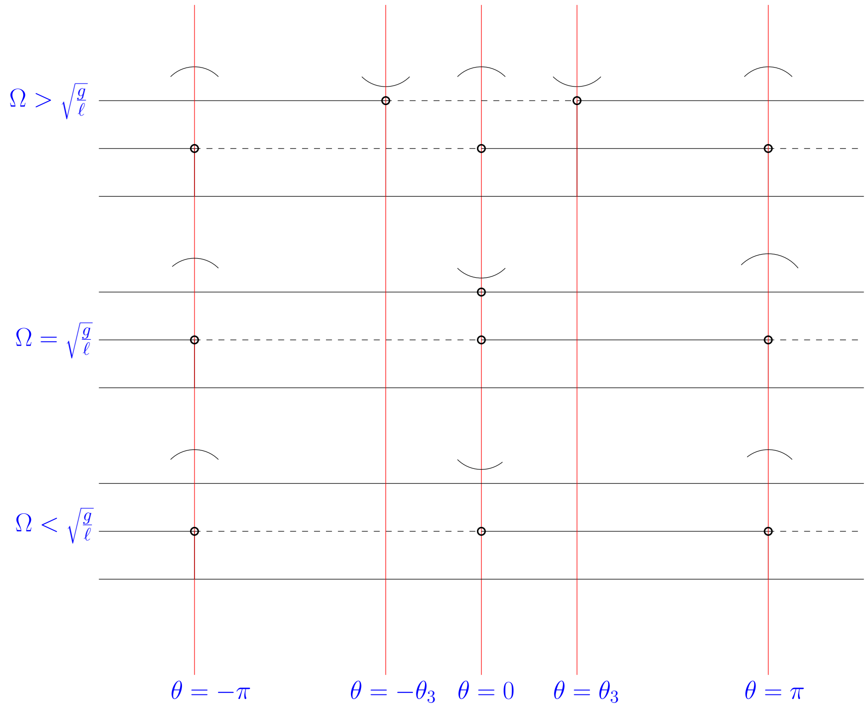


Figura 1.8.: Il segno della derivata del potenziale in funzione dell'angolo, per diversi valori di Ω. Il potenziale è periodico, con periodo 2π.

Vediamo che la posizione $\theta = 0$ è stabile solo per

$$|\Omega| < \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

In tale intervallo è anche l'unica posizione di equilibrio stabile.

Seconda domanda

Sempre facendo riferimento al diagramma in Figura 1.8 vediamo che possiamo distinguere due casi. Se $|\Omega| > \sqrt{g/\ell}$ abbiamo le posizioni di equilibrio

1. $\theta = 0$ instabile
2. $\theta = \pm \arccos \sqrt{\frac{g}{\Omega^2 \ell}}$ stabile
3. $\theta = \pi$ instabile

Se invece Se $|\Omega| \leq \sqrt{g/\ell}$ abbiamo

1. $\theta = 0$ stabile
2. $\theta = \pi$ instabile

Il tutto è riassunto in Figura 1.9.

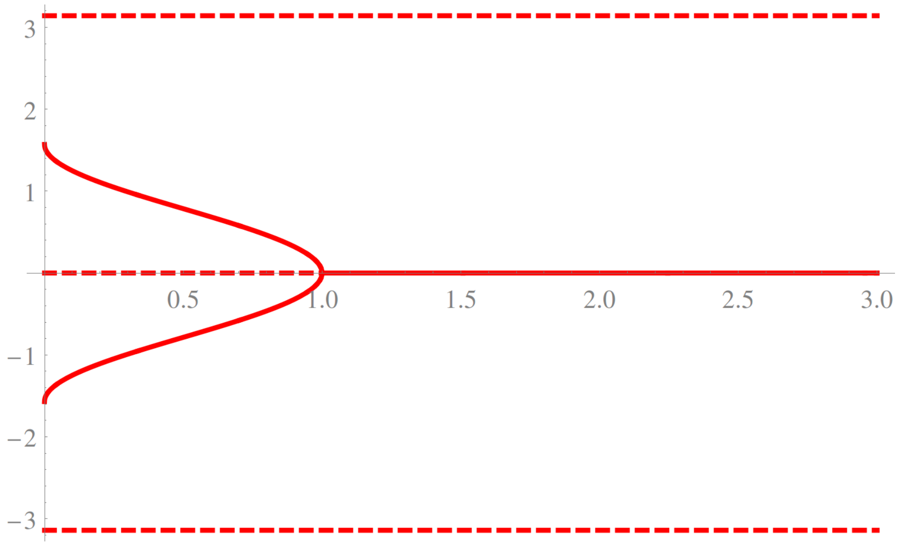


Figura 1.9.: Le posizioni di equilibrio in funzione del parametro $\lambda = \frac{g}{\Omega^2 \ell}$. Sull'asse delle ascisse è riportato λ, su quello delle ordinate il valore di θ all'equilibrio. Una posizione di equilibrio stabile è indicata con la linea continua, una instabile da una linea tratteggiata.

Terza domanda

Per $\theta = 0$ possiamo approssimare il potenziale al secondo ordine. A meno di una costante otteniamo

$$U = \frac{1}{2} m \Omega^2 \ell^2 \left(\frac{g}{\Omega^2 \ell} - 1 \right) \theta^2$$

Per quanto riguarda l'energia cinetica vale

$$K = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

e il periodo delle piccole oscillazioni sarà

$$T = \frac{2\pi}{|\Omega|}\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{g}{\Omega^2\ell} - 1\right)}}$$

che è reale nell'intervallo nel quale $\theta = 0$ è posizione di equilibrio stabile.

Per $\cos\theta = \frac{g}{\Omega^2\ell}$ possiamo porre $\theta = \theta_3 + \epsilon$ e sviluppare il potenziale al secondo ordine in ϵ. Dato che

$$U(\theta_3 + \epsilon) = U(\theta_3) + \frac{dU}{d\theta}(\theta_3)\epsilon + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_3)\epsilon^2 + O\left(\epsilon^3\right)$$

e che la derivata prima si annulla abbiamo a meno di una costante

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_3)\epsilon^2 \\ &= \frac{1}{2}m\Omega^2\ell^2\left(\frac{g}{\Omega^2\ell}\cos\theta_3 - 2\cos^2\theta_3 + 1\right)\epsilon^2 \\ &= \frac{1}{2}m\Omega^2\ell^2\left[1 - \left(\frac{g}{\Omega^2\ell}\right)^2\right]\epsilon^2 \end{aligned}$$

mentre per l'energia cinetica

$$K = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\epsilon}^2$$

e quindi

$$T = \frac{2\pi}{|\Omega|}\sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{g}{\Omega^2\ell}\right)^2}}$$

ancora una volta reale nell'intervallo per il quale la posizione di equilibrio considerata è stabile.

Quarta domanda

Scegliendo un sistema di coordinate con l'origine nel perno abbiamo la massa nella posizione

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \ell\sin\theta \\ -\ell\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \ell\theta \\ -\ell \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove si è scelto il piano di oscillazione coincidente con il piano $x-y$. La velocità vale

$$\vec{v} \simeq \begin{pmatrix} \ell\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e per l'accelerazione

$$\vec{a} \simeq \begin{pmatrix} \ell\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Infine per il momento angolare (rispetto al perno) abbiamo

$$\vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{v} = m \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \ell\theta & -\ell & 0 \\ \ell\dot{\theta} & 0 & 0 \end{vmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\ell^2\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Dalla seconda equazione cardinale otteniamo il momento $\vec{M}$ applicato dal perno:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} - \vec{r} \wedge \left(\vec{F}_p + \vec{F}_c + \vec{F}_{co}\right)$$

e sappiamo che $M_z = 0$. Abbiamo indicato con

$$\vec{F}_p = -mg\hat{y}$$

la forza peso, con

$$\vec{F}_c = -m\vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{r}\right) = m\Omega^2\ell\theta\hat{x}$$

la forza centrifuga e con

$$\vec{F}_{co} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = 2m\Omega\ell\dot{\theta}\hat{z}$$

quella di Coriolis. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \vec{M} &= m\ell^2\ddot{\theta}\hat{z} - (\ell\theta\hat{x} - \ell\hat{y}) \wedge \left(-mg\hat{y} + m\Omega^2\ell\theta\hat{x} + 2m\Omega\ell\dot{\theta}\hat{z}\right) \\ &= \left(m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\theta - m\ell^2\Omega^2\theta\right)\hat{z} + 2m\Omega\ell^2\dot{\theta}\hat{x} + O\left(\theta^2\right) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\left(1 - \frac{\Omega^2\ell}{g}\right)\theta &= 0 \\ M_x &= 2m\Omega\ell^2\dot{\theta} \\ M_y &= 0 \\ M_z &= 0 \end{aligned}$$

Sappiamo che l'oscillazione è data da

$$\theta(t) = \Delta\theta \sin \omega t$$

dove

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}\left(1 - \frac{\Omega^2 \ell}{g}\right)}$$

La velocità angolare nella posizione verticale sarà data dunque da

$$\dot{\theta} = \omega \Delta\theta$$

e quindi

$$M_x = 2m\Omega\ell^2 \Delta\theta \sqrt{\frac{g}{\ell}\left(1 - \frac{\Omega^2 \ell}{g}\right)}$$

Soluzione secondo esercizio

Prima domanda

Detto V il volume occupato dal gas abbiamo

$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{\rho g}{S}\left(V_T - V\right)$$

e quindi inizialmente

$$T_0 = \frac{\rho g}{nRS}\left(V_T - V_0\right) V_0 = \frac{1}{4}\frac{\rho g}{nRS} V_T^2$$

Seconda domanda

Abbiamo

$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{\rho g}{S}\left(V_T - V\right)$$

e quindi la trasformazione è un segmento di estremi

$$(P_0, V_0) = \left(\frac{\rho g V_T}{2S}, \frac{V_T}{2}\right)$$

e

$$(P_1, V_1) = \left(\frac{\rho g V_T}{10S}, \frac{9}{10} V_T\right)$$

La temperatura finale sarà

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} = \frac{9}{100}\frac{\rho g}{nRS} V_T^2$$

Terza domanda

Dato che

$$
\begin{aligned}
dQ &= dU + PdV \\
&= nc_V dT + \frac{\rho g}{S}\left(V_T - V\right) dV \\
&= nc_V dT + \frac{\rho g}{S}\left(V_T - V\right) dV
\end{aligned}
$$

integrando otteniamo

$$
\begin{aligned}
Q &= nc_V\left(T_1 - T_0\right) + \frac{\rho g}{S}\left[\left(V_T V_1 - \frac{1}{2}V_1^2\right) - \left(V_T V_0 - \frac{1}{2}V_0^2\right)\right] \\
&= -\frac{3}{25}\frac{\rho g}{S}V_T^2
\end{aligned}
$$

Per quanto riguarda l'entropia

$$
\begin{aligned}
\Delta S &= nc_V \log\frac{T_1}{T_0} + nR\log\frac{V_1}{V_0} \\
&= nR\left(\frac{3}{2}\log\frac{9}{25} + \log\frac{9}{5}\right) \\
&\simeq -0.94\, nR
\end{aligned}
$$

1.24. 4 luglio 2014

Primo esercizio

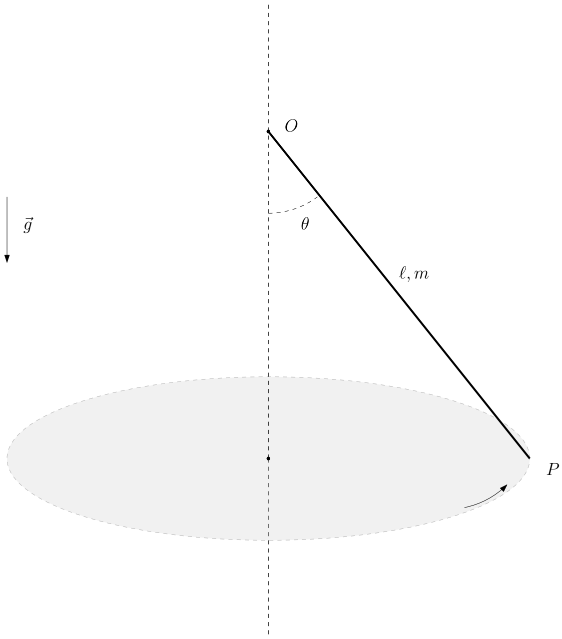


Figura 1.10.: La sbarra considerata nell'esercizio.

Una sbarra molto sottile di lunghezza ℓ e massa m è fissata ad un suo estremo ad un punto O, attorno al quale può ruotare liberamente nello spazio. Inizialmente viene posta in rotazione come in Figura 1.10, in modo tale che l'altro estremo P percorra un'orbita circolare di raggio $\ell/2$.

- Calcolare il periodo dell'orbita specificata.
- Calcolare la reazione vincolare applicata alla sbarra nel punto O, in modulo direzione e verso.
- Si vuole invertire il verso dell'orbita applicando istantaneamente al centro di massa della sbarra un impulso $\vec{J}$ perpendicolare al piano che contiene la sbarra e l'asse di rotazione. Quanto vale il momento angolare prima e dopo l'inversione del moto? Quanto vale il modulo di $\vec{J}$?

Soluzione

Prima domanda

Ponendosi in un sistema rotante con la sbarra l'energia potenziale deve essere minima. Quest'ultima si scrive

$$
\begin{aligned}
U &= -mg\frac{\ell}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\int \omega^2\rho^2 dm \\
&= -mg\frac{\ell}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{m}{\ell}\int_0^\ell \omega^2 u^2 \sin^2\theta du \\
&= -mg\frac{\ell}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\frac{m\ell^2}{3}\omega^2
\end{aligned}
$$

Derivando rispetto a θ otteniamo

$$
U' = m\frac{\ell}{2}\sin\theta\left(g - \frac{2}{3}\ell\omega^2\cos\theta\right) = 0
$$

cioè ($\theta = \pi/6$)

$$
\omega = \sqrt{\frac{3g}{2\ell\cos\theta}} = \sqrt{\frac{g\sqrt{3}}{\ell}}
$$

e quindi

$$
T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g\sqrt{3}}}
$$

Seconda domanda

Dato che il centro di massa si muove di moto circolare uniforme in un piano orizzontale abbiamo che

$$
-m\omega^2\frac{\ell}{2}\sin\theta\hat{e}_\rho = \vec{R} - mg\hat{e}_z
$$

dove $\hat{e}_\rho$ è il versore radiale nel piano orizzontale e $\hat{e}_z$ quello verticale. Quindi

$$
\begin{aligned}
\vec{R} &= -m\omega^2\frac{\ell}{2}\sin\theta\hat{e}_\rho + mg\hat{e}_z \\
&= mg\left(\hat{e}_z - \frac{\sqrt{3}}{4}\hat{e}_\rho\right)
\end{aligned}
$$

Terza domanda

Dato che la sbarra è sottile, il momento di inerzia rispetto all'asse principale parallelo ad essa è nullo, mentre quello rispetto a un asse principale qualsiasi perpendicolare passante per O vale $I = m\ell^2/3$. Di conseguenza il momento angolare prima dell'inversione

$$\vec{L}_i = \frac{m\ell^2}{3}\omega \sin\theta \hat{u}$$

dove $\hat{u}$ è un versore perpendicolare all'asta, nel piano determinato da quest'ultima e dall'asse di rotazione, orientato in modo da formare con $\vec{\omega}$ un angolo minore di $\pi/2$.

Dopo l'inversione abbiamo che ω cambia di segno, quindi

$$\vec{L}_f = -\frac{m\ell^2}{3}\omega \sin\theta \hat{u}$$

Deve essere

$$\vec{r}_{cm} \wedge \vec{J} = \vec{L}_f - \vec{L}_i = -\frac{2}{3}m\ell^2\omega \sin\theta \hat{u}$$

ed in modulo

$$\frac{\ell}{2}J = \frac{2}{3}m\ell^2\omega \sin\theta$$

da cui

$$\begin{aligned} J &= \frac{4}{3}m\ell\omega \sin\theta \\ &= \frac{2}{3}m\ell\omega \end{aligned}$$

Secondo esercizio

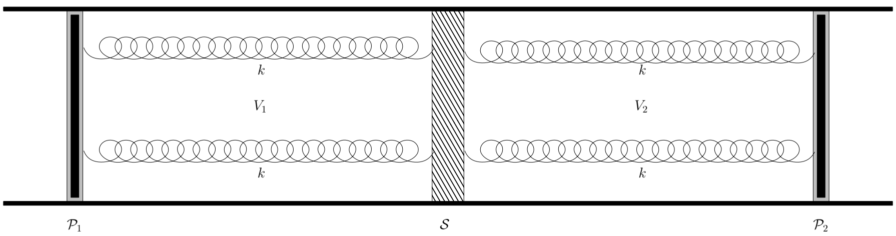


Figura 1.11.: Il recipiente considerato nell'esercizio.

Il cilindro in Figura 1.11, di sezione S, è impermeabile al calore ed è chiuso ai due estremi dai due pistoni scorrevoli $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, pure impermeabili al calore. Nel cilindro si trovano n moli di un gas perfetto biatomico. Il cilindro è inoltre separato al centro da un setto poroso $\mathcal{S}$ che può essere attraversato dal gas. Sia il pistone $\mathcal{P}_1$ che quello $\mathcal{P}_2$ sono infine collegati al setto poroso da due molle ciascuno, come in figura. Tutte e quattro le molle hanno lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica k.

- Inizialmente il pistone $\mathcal{P}_2$ è mantenuto dall'esterno aderente al setto, di conseguenza il volume V_2 dello scomparto a destra è nullo. Sapendo che il sistema è all'equilibrio alla temperatura T_0 calcolare il volume V_1 dello scomparto a sinistra.
- Si lascia quindi il pistone $\mathcal{P}_2$ libero di muoversi, e si attende il ristabilirsi dell'equilibrio. Determinare la temperatura finale del sistema e a sua variazione di entropia.
- Si tagliano adesso due delle molle, una per ciascun scomparto, e si attende nuovamente il raggiungimeno dell'equilibrio. Determinare la nuova temperatura e la nuova variazione di entropia.

Soluzione

Prima domanda

Dall'equilibrio meccanico di $\mathcal{P}_1$ abbiamo

$$P_1 S = 2k\frac{V_1}{S}$$

da cui

$$V_1 = S\sqrt{\frac{nRT_0}{2k}}$$

Seconda domanda

L'energia totale del sistema (comprendendo in esso anche le molle) si conserva. Quindi deve essere

$$nc_V T_0 + \frac{1}{2}2k\left(\frac{V_1}{S}\right)^2 = nc_V T_1 + \frac{1}{2}2k\left[\left(\frac{V_1'}{S}\right)^2 + \left(\frac{V_2'}{S}\right)^2\right]$$

ma d'altra parte dato che la pressione è la stessa per tutto il gas $V_1' = V_2'$ e quindi

$$nc_V T_0 + \frac{1}{2}2k\left(\frac{V_1}{S}\right)^2 = nc_V T_1 + \frac{1}{2}4k\left(\frac{V_1'}{S}\right)^2$$

Per l'equilibrio meccanico infine (il volume V_1' è occupato solo da $n/2$ moli)

$$V_1' = S\sqrt{\frac{nRT_1}{4k}}$$

e quindi

$$nc_V T_0 + \frac{1}{2}2k\frac{nRT_0}{2k} = nc_V T_1 + \frac{1}{2}4k\frac{nRT_1}{4k}$$

da cui

$$T_1 = T_0$$

La variazione di entropia sarà semplicemente

$$\begin{aligned}\Delta S &= nR\log\frac{2V_1'}{V_1}\\ &= \frac{1}{2}nR\log 2 \simeq 0.35\,nR\end{aligned}$$

Terza domanda

L'energia continua a conservarsi (si può immaginare che l'energia potenziale delle molle tagliate verrà liberata e ceduta al resto del sistema). Possiamo scrivere quindi ancora una volta

$$nc_VT_1 + \frac{1}{2}4k\left(\frac{V_1'}{S}\right)^2 = nc_VT_2 + \frac{1}{2}2k\left(\frac{V_1''}{S}\right)^2$$

e per l'equilibrio meccanico (il volume V_2'' è occupato solo da $n/2$ moli, ed è rimasta una sola molla per lato)

$$V_1'' = S\sqrt{\frac{nRT_2}{2k}}$$

quindi ancora una volta

$$T_2 = T_1$$

e

$$\begin{aligned}\Delta S &= nR\log\frac{V_1''}{V_1'}\\ &= \frac{1}{2}nR\log 2 \simeq 0.35R\end{aligned}$$

1.25. 2 settembre 2014

Primo esercizio

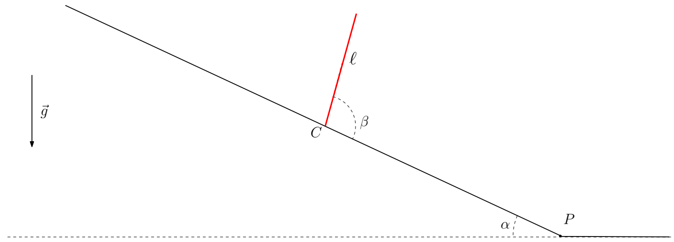


Figura 1.12.: L'asta in caduta lungo il piano inclinato.

Un'asta sottile omogenea ha una lunghezza ℓ e una massa totale m. Un suo estremo C viene appoggiato ad un piano privo di attrito, inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo α. L'asta e la normale per C al piano inclinato giacciono sullo stesso piano verticale π. L'angolo β, misurato sul piano π, tra l'asta e il piano inclinato è scelto in modo tale che, una volta lasciata libera da ferma, questa scenda lungo il piano inclinato senza ruotare (vedere Figura 1.12). In queste condizioni

1. Calcolare l'accelerazione del centro di massa dell'asta.
2. Fissato α determinare β.
3. Quando il vertice C arriva nel punto P, posto alla base del piano inclinato, rimane istantaneamente fissato ad esso. L'asta può però ruotare liberamente attorno a $P \equiv C$. Determinare la frazione di energia meccanica che viene perduta.

Soluzione

Prima domanda

Se l'asta non ruota l'accelerazione del centro di massa è parallela al piano inclinato. Di conseguenza

$$ma = mg \sin \alpha$$

dato che la reazione del piano è normale ad esso, e quindi

$$a = g \sin \alpha$$

Seconda domanda

Dato che l'asta non ruota, il momento totale delle forze rispetto al centro di massa si deve annullare. La forza peso è applicata al centro di massa e non ha momento, la reazione vincolare è normale al piano. Ha momento nullo solo se anche la sbarra è normale al piano, e quindi $\beta = \pi/2$, indipendentemente da α.

Per rispondere alla domanda si poteva scegliere come polo il punto di contatto tra l'asta e il piano. Si tratta di un polo mobile, ma questo non ha conseguenze sulla seconda equazione cardinale dato che la sua velocità è parallela a quella del centro di massa, e possiamo scrivere

$$\frac{dL}{dt} = M$$

dove L è la componente perpendicolare a π del momento angolare e M la componente perpendicolare a π del momento delle forze. Rispetto al polo C scelto abbiamo

$$L = -mv\frac{\ell}{2}\sin\beta$$
$$M = -mg\frac{\ell}{2}\cos(\beta-\alpha)$$

Notare che la reazione vincolare non ha momento in questo caso. Sostituendo nell'equazione del moto troviamo

$$-ma\frac{\ell}{2}\sin\beta = -mg\frac{\ell}{2}\cos(\beta-\alpha) \tag{1.25.1}$$

e sostituendo il valore dell'accelerazione arriviamo a

$$\sin\alpha\sin\beta = \cos(\beta-\alpha)$$

ossia

$$\sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

ed infine

$$\cos\alpha\cos\beta = 0$$

A meno che il piano sia verticale ($\alpha = \pi/2$) nel qual caso ogni valore di β è accettabile, deve essere $\beta = \pi/2$.

Un terzo modo di procedere poteva essere quello di porsi in un sistema non inerziale solidale all'asta. Ponendo nuovamente il polo in C abbiamo in questo caso che il momento M si deve annullare (dato che $L = 0$). Occorre aggiungere il momento della forza apparente: in questo modo otteniamo

$$0 = ma\frac{\ell}{2}\sin\beta - mg\frac{\ell}{2}\cos(\beta-\alpha)$$

che è del tutto equivalente all'Equazione (1.25.1).

Considerando invece il polo nel centro di massa, vediamo che anche la forza apparente ha momento nullo, e ci riconduciamo al ragionamento fatto nella prima soluzione discussa.

Terza domanda

Al momento del contatto si conserva il momento angolare totale rispetto a P, dato che l'unica forza impulsiva è la reazione vincolare. Immediatamente prima del contatto

$$E_i = \frac{1}{2}mv^2$$
$$L_i = \frac{\ell}{2}mv$$

e immediatamente dopo

$$E_f = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\omega^2$$
$$L_f = \frac{m\ell^2}{3}\omega$$

Dato che $L_i = L_f$

$$\frac{\ell}{2}mv = \frac{m\ell^2}{3}\omega$$

e quindi

$$\omega = \frac{3}{2}\frac{v}{\ell}$$

Per calcolare la frazione di energia persa fissiamo la costante arbitraria che può comparire nell'energia potenziale in modo che questa sia nulla in P. In questo caso vale

$$\frac{E_i - E_f}{E_i} = 1 - \frac{\frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\omega^2}{\frac{1}{2}mv^2}$$
$$= 1 - \frac{1}{3}\frac{\ell^2\omega^2}{v^2} = \frac{1}{4}$$

Secondo esercizio

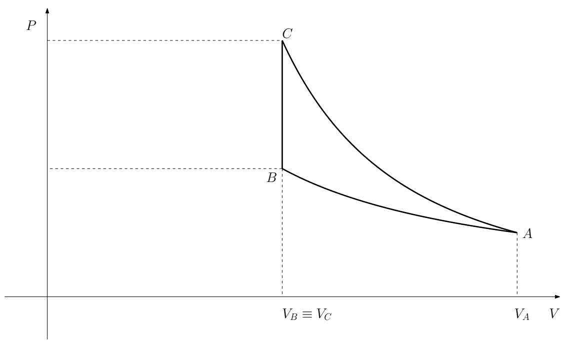


Figura 1.13.: Rappresentazione nel piano $P - V$ del ciclo studiato nell'esercizio.

Una mole di un gas perfetto biatomico compie la trasformazione ciclica rappresentata nel piano P-V in Figura 1.13. La compressione isoterma (da A a B) avviene mantenendo il gas a contatto con un bagno termico alla temperatura T_A. Si pone quindi il gas in contatto termico con un bagno termico alla temperatura T_C mantenendo il volume costante (da B a C) fino al raggiungimento dell'equilibrio. Segue una espansione adiabatica (da C ad A) che riporta il gas nello stato iniziale. Sono note le temperature $T_A = T_B$ e T_C, ed il volume $V_B = V_C$. Tutte le trasformazioni avvengono molto lentamente, e il gas si può considerare istante per istante in uno stato termodinamico ben definito.

1. Calcolare il rendimento del ciclo, esprimendolo in funzione delle sole temperature T_A e T_C.

2. Calcolare la variazione di entropia del gas nella trasformazione che, passando per B, lo porta da A a C.

3. Dopo un ciclo, quanto vale la variazione di entropia dell'universo (cioè del gas insieme ai due bagni termici)? Esprimere anche questo risultato in funzione delle sole temperature T_A e T_C.

Soluzione

Prima domanda

Il gas assorbe calore durante la trasformazione isocora. Dato che il gas non fa lavoro sarà, dal primo principio,

$$Q_{ass} = \Delta U = c_V (T_C - T_A)$$

Per il lavoro abbiamo invece

$$L = L_{AB} + L_{CA}$$

ma

$$L_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} P dV = RT_A \log \frac{V_B}{V_A}$$

e

$$L_{CA} = -c_V (T_A - T_C)$$

quindi

$$\begin{aligned}\eta = \frac{L}{Q_{ass}} &= \frac{RT_A \log \frac{V_B}{V_A} + c_V (T_C - T_A)}{c_V (T_C - T_A)} \\ &= 1 - \frac{R}{c_V} \frac{T_A}{(T_C - T_A)} \log \frac{V_A}{V_B}\end{aligned}$$

Dato che la trasformazione CA è adiabatica e il gas si trova istante per istante in uno stato termodinamico ben definito deve essere

$$V_A^{\gamma-1} T_A = V_B^{\gamma-1} T_C$$

e quindi

$$\begin{aligned}\eta &= 1 - \frac{R}{c_V} \frac{T_A}{(T_C - T_A)} \log \left(\frac{T_C}{T_A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ &= 1 - \frac{T_A}{T_C - T_A} \log \frac{T_C}{T_A}\end{aligned}$$

Seconda domanda

Dato che lo stato A e C del gas sono collegati da una adiabatica, durante la quale lo stato termodinamico del gas è ben definito per ipotesi, avremo $S_A = S_C$ e quindi $\Delta S_{AC} = 0$.

Terza domanda

Dato che la trasformazione del sistema durante l'isocora è irreversibile, l'entropia deva aumentare. Durante la trasformazione isoterma il bagno termico a temperatura T_A assorbe calore dal gas, e quindi aumenta la sua entropia di

$$\Delta S_1 = \frac{Q_1}{T_A} = -\frac{L_{AB}}{T_A} = \frac{R}{\gamma - 1} \log \frac{T_C}{T_A}$$

Durante la trasformazione isocora il bagno termico a temperatura T_C cede calore al gas, e quindi la sua entropia diminuisce

$$\Delta S_2 = \frac{Q_2}{T_C} = -\frac{Q_{ass}}{T_C} = -\frac{c_V (T_C - T_A)}{T_C}$$

Dato che dopo un ciclo l'entropia del gas non è cambiata avremo

$$\begin{aligned}\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 &= \frac{R}{\gamma - 1} \log \frac{T_C}{T_A} - \frac{c_V (T_C - T_A)}{T_C} \\ &= \frac{R}{\gamma - 1} \left[\frac{T_A}{T_C} - \log \frac{T_A}{T_C} - 1 \right] \\ &= c_V \left[\frac{T_A}{T_C} - \log \frac{T_A}{T_C} - 1 \right]\end{aligned}$$

Possiamo mostrare che $\Delta S > 0$ ponendo $x = T_A/T_C$. Abbiamo

$$\Delta S = c_V \left[x - \log x - 1 \right]$$

Ovviamente se $x = 1$ troviamo $\Delta S = 0$. D'altra parte la derivata

$$\frac{d}{dx} \Delta S = c_V \left(1 - \frac{1}{x} \right)$$

è positiva per $x > 1$ e negativa per $x < 1$, quindi ΔS ha un minimo assoluto in $x = 1$, ed è sempre $\Delta S \geq 0$.

1.26. 14 gennaio 2015

Primo problema (15 punti)

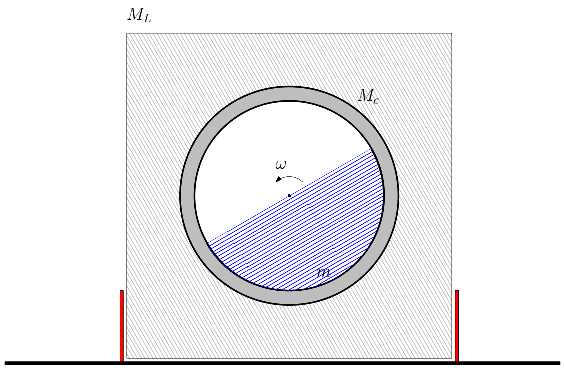


Figura 1.14.: La lavatrice.

Una lavatrice è schematizzata come in Figura 1.14 da un corpo fisso di massa M_L appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito e da un cestello rotante rappresentato da un guscio sottile di raggio R e massa M_c. Il centro di massa del corpo fisso è sull'asse di rotazione. Rappresenteremo il carico come un mezzo cilindro di massa m solidale al cestello, e nel seguito considereremo il sistema cestello+carico come un unico corpo rigido. Due pareti laterali impediscono alla lavatrice di traslare orizzontalmente o ruotare, ma non di traslare verticalmente.

1. Sapendo che il centro di massa del solo carico si trova a una distanza $a = \frac{4}{3\pi}R$ dall'asse di rotazione, calcolare la distanza d del centro di massa del sistema carico+cestello dall'asse di rotazione. Calcolare il momento di inerzia dello stesso sistema rispetto all'asse passante per il suo centro di massa.

2. Se il cestello viene mantenuto in rotazione con velocità angolare costante, determinare il massimo valore ω^* per il quale non si ha distacco da terra.

3. Si rimuovono adesso le pareti laterali, in modo da permettere anche la libera traslazione orizzontale della lavatrice, e si lascia il sistema cestello+carico libero di ruotare. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni rispetto alla posizione di equilibrio.

Secondo problema (15 punti)

Considerare un ciclo termodinamico a forma di triangolo isoscele rappresentato in Figura 1.15 nel piano $T - S$. I punti 1 e 3 corrispondono a due stati con uguale temperatura T_1. Il punto 2, all'estremo superiore, corrisponde a uno stato con temperature $T_2 > T_1$. Si conoscono i valori delle entropie S_1 e S_3 negli stati corrispondenti e $S_2 = \frac{1}{2}(S_1 + S_3)$.

Il ciclo viene percorso partendo da 1 in senso orario.

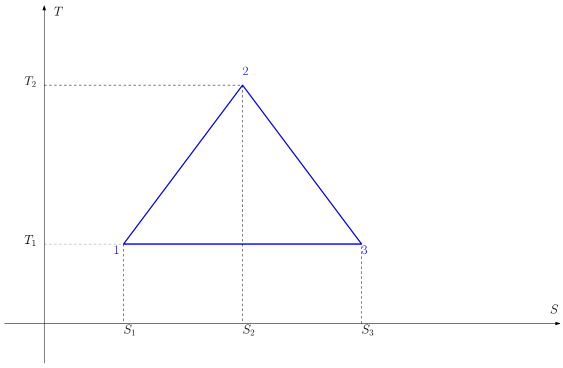


Figura 1.15.: Il ciclo triangolare, nel piano $T - S$.

1. Calcolare il lavoro fatto dal sistema.
2. Calcolare il rendimento del ciclo.
3. Se il sistema che compie il ciclo consiste in una mole di gas perfetto monoatomico determinare i rapporti V_2/V_1, V_3/V_2 e il rapporto P_3/P_1.

Soluzione primo problema

Domanda 1

La distanza del centro di massa del sistema carico+cestello dall'asse di rotazione sarà

$$d = \frac{ma}{m + M_c} = \frac{4}{3\pi}\frac{m}{m + M_c}R$$

Per quanto riguarda il momento di inerzia, scriviamolo prima rispetto all'asse di rotazione. Avremo

$$I_0 = M_c R^2 + \frac{1}{2}mR^2$$

Infatti la massa del cestello è a si trova a una distanza R dall'asse. Quella del carico è distribuita rispetto alla distanza dall'asse come quella di un cilindro intero. Detto I il momento di inerzia cercato, utilizzando il teorema di Steiner possiamo scrivere infine

$$\begin{aligned} I &= I_0 - (M_c + m)\, d^2 \\ &= M_c\left(R^2 - d^2\right) + \frac{1}{2}m\left(R^2 - 2d^2\right) \end{aligned}$$

Domanda 2

Consideriamo separatamente il carico e il resto della lavatrice (corpo esterno e cestello). Per il primo il centro di massa compie un moto circolare uniforme attorno all'asse di rotazione, che possiamo scegliere come origine. La sua posizione verticale sarà dunque

$$y_{CM,\text{carico}} = a\sin\omega t$$

e la sua accelerazione verticale

$$\ddot{y}_{CM,carico} = -a\omega^2\sin\omega t$$

Il centro di massa del resto del sistema è invece in quiete, quindi

$$y_{CM,\text{cestello+corpo}} = y_0$$

Nel nostro caso $y_0 = 0$, ma questo non ha importanza in realtà, infatti

$$\ddot{y}_{CM,\text{cestello+corpo}} = 0$$

e questo è tutto ciò che importa. Infatti l'accelerazione verticale del centro di massa di tutto il sistema sarà

$$\ddot{y}_{CM} = \frac{-ma\omega^2\sin\omega t}{m+M_c+M_L}$$

e dalla prima equazione cardinale otteniamo

$$(m+M_c+M_L)\,\ddot{y}_{CM} = -\,(m+M_c+M_L)\,g + N$$

Sostituendo e risolvendo rispetto a N otteniamo

$$N = (m+M_c+M_L)\,g - ma\omega^2\sin\omega t$$

Il minimo valore di N è

$$N = (m+M_c+M_L)\,g - ma\omega^2$$

e la condizione per il distacco $N < 0$, da cui

$$\omega^* = \sqrt{\left(1+\frac{M_c+M_L}{m}\right)\frac{g}{a}}$$

Domanda 3

L'energia del sistema si scrive

$$E = \frac{1}{2}M_L\dot{X}^2 + \frac{1}{2}(M_c+m)\left[\left(\dot{X}+d\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + d^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right] + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta$$

e la quantità di moto orizzontale

$$P_x = M_L\dot{X} + (M_c+m)\left(\dot{X}+d\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

dove X parametrizza la posizione orizzontale della lavatrice. Ponendosi nel sistema di riferimento inerziale nel quale $P_x = 0$ abbiamo

$$\dot{X} = -\frac{M_c + m}{M_L + M_c + m} d\dot{\theta} \cos\theta$$

e sostituendo nell'energia otteniamo

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} M_L \left(\frac{M_c + m}{M_L + M_c + m} \right)^2 d^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\theta \\
&+ \frac{1}{2} (M_c + m) \left[\left(\frac{M_L}{M_L + M_c + m} \right)^2 d^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\theta + d^2 \dot{\theta}^2 \sin^2\theta \right] \\
&+ \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - mga \cos\theta
\end{aligned}$$

Nell'approssimazione di piccole oscillazioni possiamo approssimare $\sin\theta \simeq \theta$ e $\cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2$. Sostituendo e trascurando quantità di ordine superiore al secondo e costanti irrilevanti abbiamo

$$E = \frac{1}{2} \left[\frac{M_L (M_c + m)}{M_L + M_c + m} d^2 + I \right] \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mga\theta^2$$

che descrive un oscillatore armonico di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mga}{I + \frac{M_L(M_c+m)}{(M_L+M_c+m)} d^2}}$$

Nel limite $M_L \to \infty$ (lavatrice fissata a terra) questo diventa

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mga}{I + (M_c + m) d^2}}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che

$$dQ = TdS$$

il calore è assorbito quando l'entropia aumenta, e ceduto in caso contrario. Avremo quindi che il calore totale assorbito sarà uguale all'area al di sotto del due lati uguali del triangolo,

$$Q_{ass} = \frac{1}{2} (S_3 - S_1) (T_2 - T_1) + (S_3 - S_1) T_1$$

e quello ceduto sarà uguale all'area al di sotto della base del triangolo

$$Q_{ced} = (S_3 - S_1) T_1$$

Dato che il lavoro è la differenza tra calore assorbito e calore ceduto, avremo

$$L = \frac{1}{2}\left(S_3 - S_1\right)\left(T_2 - T_1\right)$$

che è l'area del triangolo.

Domanda 2

L'efficienza si calcola a partire dei risultati precedenti:

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{L}{Q_{ass}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left(S_3 - S_1\right)\left(T_2 - T_1\right)}{\frac{1}{2}\left(S_3 - S_1\right)\left(T_2 - T_1\right) + \left(S_3 - S_1\right)T_1} \\ &= \frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1}\end{aligned}$$

Domanda 3

Ponendo

$$\Delta S = S_3 - S_2 = S_2 - S_1 = \frac{1}{2}\left(S_3 - S_1\right)$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\Delta S &= c_V \log \frac{T_2}{T_1} + R \log \frac{V_2}{V_1} \\ \Delta S &= -c_V \log \frac{T_2}{T_1} + R \log \frac{V_3}{V_2} \\ 2\Delta S &= R \log \frac{V_3}{V_1}\end{aligned}$$

Dalle prime due relazioni troviamo

$$\begin{aligned}\frac{V_2}{V_1} &= \frac{e^{\Delta S/R}}{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{c_V/R}} \\ \frac{V_3}{V_2} &= \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{c_V/R} e^{\Delta S/R}\end{aligned}$$

Dalla terza abbiamo

$$\frac{V_3}{V_1} = e^{2\Delta S/R}$$

ma dato che $P_3 V_3 = nRT_1$ e $P_1 V_1 = nRT_1$ abbiamo

$$\frac{P_3}{P_1} = e^{-2\Delta S/R}$$

1.27. 4 febbraio 2015

Primo problema

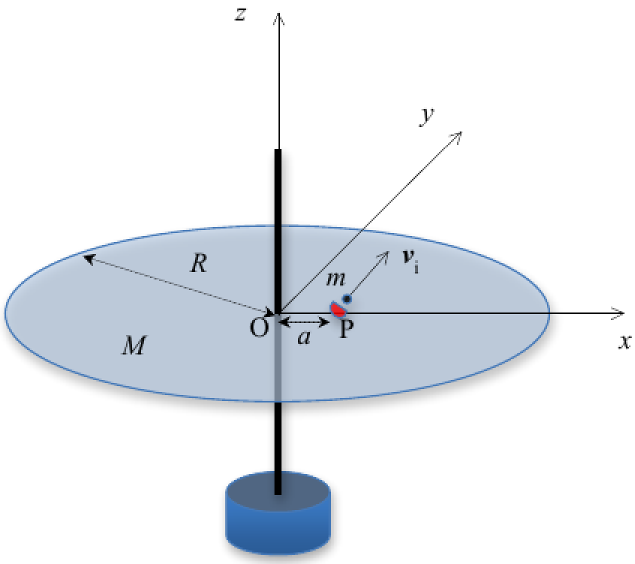


Figura 1.16.: Il giocattolo meccanico

Un giocattolo meccanico consiste di un disco omogeneo di massa M e raggio R, imperniato sul suo asse intorno al quale può ruotare senza attrito. In un sistema di coordinate cartesiane di un riferimento inerziale S, con asse z verticale, il centro del disco coincide con l'origine O, il disco giace sul piano orizzontale xy mentre l'asse di rotazione è fisso e coincide con l'asse z. Un piccolo dispositivo a scatto con molla regolabile, posto sul disco e ad esso vincolato in un punto P a distanza $a = R/5$ da O, permette di lanciare un proiettile di massa m in direzione fissata.

Se il proiettile colpisce un punto della superficie del disco, vi rimane immediatamente attaccato. Inizialmente il disco è fermo. Scegliendo come asse x quello su cui giace inizialmente il dispositivo a molla, la velocità iniziale - impressa al proiettile dallo scatto - nel riferimento S vale $\boldsymbol{v}_i = v_0\hat{\boldsymbol{e}}_x + v_0\hat{\boldsymbol{e}}_y + v_0\hat{\boldsymbol{e}}_z$ dove v_0 è, appunto, regolabile. Si trascuri la massa del dispositivo a molla rispetto a quella del disco. Il gioco consiste nel regolare v_0 in modo che il proiettile colpisca esattamente il bordo del disco.

Nel riferimento S determinare:

1. la velocità angolare del disco, in funzione di v_0, subito dopo lo scatto.

Nello stesso riferimento S, quando il proiettile colpisce esattamente il bordo del disco, determinare:

2. il punto del disco su cui impatta il proiettile (lo si individui in riferimento al raggio OP);

3. la velocità angolare del disco dopo l'impatto;
4. l'impulso (delle forze) trasmesso dall'asse al disco nell'istante dell'impatto;
5. l'impulso del momento delle forze trasmesso dall'asse al disco nell'istante dell'impatto.

Secondo problema

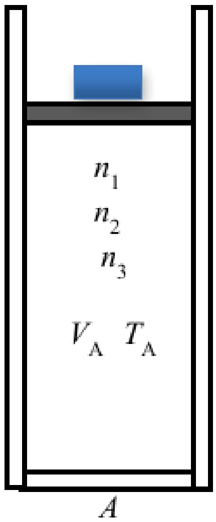


Figura 1.17.: Sistema termodinamico considerato nell'esercizio.

Un recipiente cilindrico verticale, con sezione di area A, è dotato di un pistone di massa ignota. Le pareti del cilindro e il pistone sono isolanti termici ideali (perfetti). Il recipiente contiene una miscela di gas ideali di tre tipi diversi, costituita rispettivamente di n_1, n_2 e n_3 moli di ciascun gas. Le capacità termiche molari a volume costante, dei tre gas, valgono rispettivamente C_1, C_2 e C_3. Si chiamino P, V e T le ovvie variabili termodinamiche che si riferiscono al sistema nel suo complesso. Inizialmente il sistema è in equilibrio con $V = V_A$ e $T = T_A$, noti. Nel seguito si trascuri il lavoro fatto dall'atmosfera.

1. Dimostrare che una trasformazione reversibile effettuata agendo sul pistone segue la legge $PV^\gamma = \text{cost}$ e determinare γ;

A un certo istante si appoggia un corpo sul pistone, lo si lascia andare da fermo e si attende il raggiungimento del nuovo equilibrio. Si misura di nuovo il volume occupato all'equilibrio, che risulta essere $V_B = V_A/3$.

2. Determinare la massa complessiva del pistone e del corpo che vi è stato appoggiato.
3. Determinare la variazione di entropia dell'universo.

Facoltativo: si discuta se il lavoro fatto dall'atmosfera sia davvero trascurabile.

Soluzione problema 1

Domanda 1

Definizioni:

- vettore posizione del proiettile in partenza: $\boldsymbol{r} = a\hat{\boldsymbol{e}}_x$
- quantità di moto del proiettile in partenza: $\boldsymbol{p}_0 = mv_0\hat{\boldsymbol{e}}_x + mv_0\hat{\boldsymbol{e}}_y + mv_0\hat{\boldsymbol{e}}_z$
- momento angolare del proiettile in partenza: $\boldsymbol{l}_0 = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_0$
- momento angolare del disco: $\boldsymbol{l}_0 = \frac{1}{2}MR^2\omega\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$
- bordo del disco: γ
- piano della traiettoria del proiettile: π
- punto di γ che inizialmente interseca π: Q
- punto di π che inizialmente coincide con Q: Q'
- piede della perpendicolare da Q sulla retta OP: H
- punto del bordo del disco colpito dal proiettile: B
- misura angolo $\widehat{QOP}$: φ_0
- misura angolo $\widehat{QOP}$ (percorso in senso orario durante la rotazione del disco fino all'impatto): $\Delta\varphi$
- lunghezza del segmento PH: x
- lunghezza del segmento PQ: b
-

L'angolo $\widehat{QPH}$ misura $\pi/4$rad perché le componenti v_x e v_y di $\boldsymbol{v}_i$ sono uguali. La traiettoria del proiettile giace su un piano perchè si tratta del moto di un grave (in presenza della sola forza peso).

$$\begin{aligned}\boldsymbol{l}_0 &= a\hat{\boldsymbol{e}}_x \times (mv_0\hat{\boldsymbol{e}}_x + mv_0\hat{\boldsymbol{e}}_y + mv_0\hat{\boldsymbol{e}}_z) \\ &= -amv_0\hat{\boldsymbol{e}}_y + amv_0\hat{\boldsymbol{e}}_z\end{aligned}$$

Si consideri come *sistema* l'insieme disco + proiettile. Le forze e i momenti esterni al sistema sono quelli applicati dall'asse e la forza peso.

La componente z del momento delle forze risultante sul sistema è nulla.

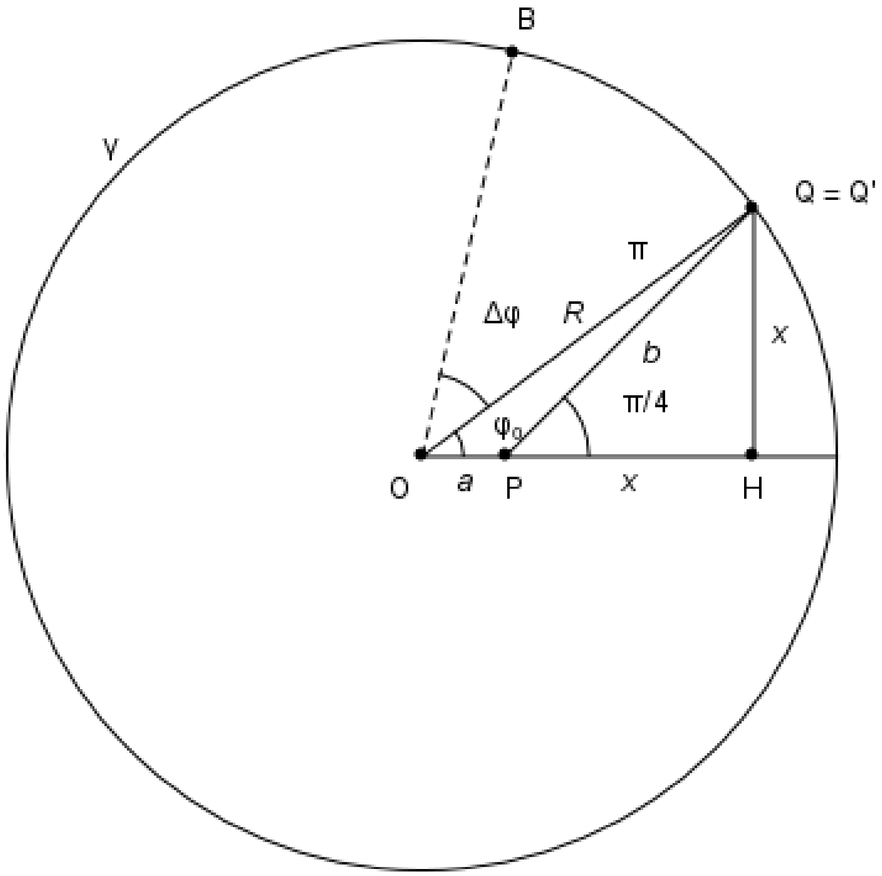


Figura 1.18.: Costruzione geometrice per il primo esercizio.

La conservazione della componente z del momento angolare del sistema, inizialmente nullo, implica:

$$\frac{1}{2}MR^2\omega + amv_0 = 0$$

da cui

$$\omega = -2\frac{m}{M}\frac{a}{R}\frac{v_0}{R} = -\frac{2}{5}\frac{m}{M}\frac{v_0}{R}$$

Domanda 2

La proiezione di $\boldsymbol{v}_i$ sul piano del disco rimane costante (moto di un grave) e il suo modulo vale $\sqrt{2}v_0$. Il tempo Δt impiegato dal proiettile per arrivare sulla verticale di Q', momento in cui $B = Q'$ nel caso di impatto sul bordo, vale

$$\Delta \mathrm{t} = \frac{b}{\sqrt{2}v_0}$$

Contemportaneamente il disco compie una rotazione

$$-\Delta\varphi = \omega\Delta\mathrm{t} = -\sqrt{2}\frac{m}{M}\frac{ab}{R^2} = -\frac{\sqrt{2}}{5}\frac{m}{M}\frac{b}{R}$$

Nota: questo valore non dipende da v_0; questo significa che è sempre lo stesso punto B di γ a trovarsi in Q', anche nel caso in cui il proiettile sorvoli il punto Q' senza impattare su γ.

Per la determinazione di b basta risolvere l'equazione $(a+x)^2 + x^2 = R^2$, derivante da semplici considerazioni geometriche (vedi figura), e selezionare la soluzione positiva. Si ha:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2R^2 - a^2} - a}{2} = \frac{3}{5}R \\ b &= \sqrt{2}x = \frac{3\sqrt{2}}{5}R \end{aligned}$$

Pertanto l'angolo tra la retta OP e la retta OB (l'azimut del punto di impatto del disco) vale:

$$\varphi_0 + \Delta\varphi = \arcsin\left(\frac{x}{R}\right) + \sqrt{2}\frac{m}{M}\frac{ab}{R^2} = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{6}{25}\frac{m}{M}$$

Domanda 3

Continua a conservarsi la componente z del momento angolare del sistema, che è nulla. Tale componente è proporzionale alla velocità angolare ω' richiesta dal testo e il coefficiente di proporzionalità è il momento di inerzia del corpo rigido costituito dal disco più il proiettile attaccato sul bordo. Pertanto deve essere:

$$\omega' = 0$$

Domanda 4

La quantità di moto $\boldsymbol{p}_1$ del sistema, immediatamente prima dell'impatto, coincide con quella del proiettile perché il centro di massa del disco è fermo. Da $\boldsymbol{p}_0$ e dalla legge del moto di un grave, si ha:

$$\boldsymbol{p}_1 = mv_0\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + mv_0\hat{\boldsymbol{e}}_y - mv_0\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$$

Dopo l'impatto il centro di massa del sistema è fermo, pertanto l'impulso delle forze trasmesso al sistema durante l'urto è pari a $-\boldsymbol{p}_1$. Poiché la forza peso non è impulsiva, tale impulso è trasmesso tutto dall'asse.

Nota: dal confronto con $\boldsymbol{p}_0$ si vede che le componenti x e y trasmesse dall'asse all'istante dello scatto sono "riassorbite" a quello dell'impatto. Viceversa, la componente z dell'impulso trasmesso dall'asse è la stessa all'istante iniziale e a quello finale. Questo comportamento è dovuto all'impulso trasferito dalla forza peso durante l'intervallo di tempo Δt.

Domanda 5

Il momento angolare $\boldsymbol{L}_1$ del sistema (rispetto al solito polo O) immediatamente prima dell'impatto è:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_1 &= \overline{\boldsymbol{OQ'}} \times \boldsymbol{p}_1 + \frac{1}{2}MR^2\omega\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \\ &= [(a+x)\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + x\hat{\boldsymbol{e}}_y] \times [mv_0\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + mv_0\hat{\boldsymbol{e}}_y - mv_0\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}] + \frac{1}{2}MR^2\omega\hat{\boldsymbol{e}}_z\end{aligned}$$

da cui, con i risultati trovati precedentemente per x e ω, segue:

$$\boldsymbol{L}_1 = -\frac{3}{5}mRv_0\hat{\boldsymbol{e}}_x + \frac{4}{5}mRv_0\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

Poiché il momento angolare del sistema dopo l'impatto è nullo (tutto è fermo), ne risulta che l'impulso del momento delle forze trasmesso dall'asse al disco è $-\boldsymbol{L}_1$; per le stesse considerazioni della risposta precedente, l'impulso del momento della forza peso è nullo durante l'urto.

Nota: $-\boldsymbol{L}_1$ giace sul piano del disco ed è diretto perpendicolarmente alla retta OQ', come era facilmente prevedibile.

Soluzione problema 2

Domanda 1

Con ovvie definizioni dei simboli:

$$\begin{aligned}P &= P_1 + P_2 + P_3 \\ PV &= P_1V + P_2V + P_3V = n_1RT + n_2RT + n_3RT = (n_1 + n_2 + n_3)\,RT \\ U &= n_1C_1T + n_2C_2T + n_3C_3T = (n_1C_1 + n_2C_2 + n_3C_3)\,T\end{aligned}$$

definendo $n = n_1 + n_2 + n_3$ e $C = (n_1C_1 + n_2C_2 + n_3C_3)/\,n$ il gas soddisfa all'equazione di stato:

$$PV = nRT$$

e la sua energia interna è data da:

$$U = nCT$$

Determinate l'equazione di stato e l'energia interna, si può procedere a sviluppare la termodinamica della miscela in modo standard. Poiché equazione di stato e l'energia interna assumono la stessa forma di quelle di un gas ideale, si otterrà la stessa equazione anche per la trasformazione adiabatica reversibile:

$$PV^{\gamma} = cost$$

con $\gamma = \frac{C+R}{C}$

{Per completezza riportiamo un possibile procedimento}

$$dU = nCdT$$

per una trasformazione adiabatica:

$$\delta \mathrm{Q} = \mathrm{dU} + \delta \mathrm{L} = 0$$

per una trasformazione reversibile:

$$\delta \mathrm{L} = P\mathrm{dV}$$

La trasformazione adiabatica reversibile è dunque caratterizzata dall'equazione differenziale:

$$nC\mathrm{dT} + P\mathrm{dV} = 0 \tag{1.27.1}$$

Differenziando l'equazione di stato:

$$P\mathrm{dV} + V\mathrm{dP} = nR\mathrm{dT}$$

$$\mathrm{dT} = \frac{1}{nR}P\mathrm{dV} + \frac{1}{nR}V\mathrm{dP}$$

che, sostituita nella (1.27.1), produce:

$$\frac{C}{R}P\mathrm{dV} + \frac{C}{R}V\mathrm{dP} + P\mathrm{dV} = 0$$

$$\frac{C+R}{R}P\mathrm{dV} = -\frac{C}{R}V\mathrm{dP}$$

e quindi

$$\frac{C+R}{C}\frac{\mathrm{dV}}{V} = -\frac{\mathrm{dP}}{P}$$

definita $\gamma = \frac{C+R}{C}$ l'equazione precedente si integra in:

$$\gamma \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = -\ln\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

e finalmente:

$$PV^{\gamma} = P_0 V_0^{\gamma} = cost$$

Domanda 2

Non appena il corpo sul pistone viene rilasciato, lo stato è fuori equilibrio e la trasformazione che ne consegue è quindi irreversibile. Se si trascura il lavoro fatto dall'atmosfera, tutto il lavoro sul sistema è fatto dalla forza peso. Al nuovo equilibrio il pistone si è abbassato di una quantità

$$h = \frac{V_A - V_B}{A} = \frac{2}{3}\frac{V_A}{A}$$

Dette rispettivamente m_p e m_c le masse del pistone e del corpo aggiunto, il lavoro fatto dalla miscela *contro* la forza peso è $L = -(m_p + m_c)\, gh$. Per una trasformazione adiabatica:

$$Q = \Delta \mathrm{U} + L = 0$$

nel nostro caso:

$$\Delta \mathrm{U} = -L = \frac{2}{3}\frac{(m_p + m_c)\, g}{A} V_A = nC\,(T_B - T_A) \tag{1.27.2}$$

dove T_B è la temperatura al nuovo equilibrio. Detta P_{atm} la pressione atmosferica e tenuto conto delle due equazioni relative all'equilibrio meccanico, le equazioni di stato ai due equilibri termodinamici diventano:

$$\left(P_{\mathrm{atm}} + \frac{m_p g}{A}\right) V_A = nRT_A \tag{1.27.3}$$

$$\left(P_{\mathrm{atm}} + \frac{m_p g}{A} + \frac{m_c g}{A}\right) V_B = nRT_B \tag{1.27.4}$$

Le equazioni (1.27.2), (1.27.3) e (1.27.4) costituiscono un sistema di 3 equazioni per le 4 incognite m_p, m_c, T_B e P_{atm}; il sistema può essere risolto in funzione del parametro P_{atm}, fornendo:

$$\begin{aligned} m_p &= \frac{A}{gV_A}\left(nRT_A - P_{\mathrm{atm}} V_A\right) \\ m_c &= \frac{A}{gV_A}\frac{2R}{C - 2R}\left(nCT_A + nRT_A - P_{\mathrm{atm}} V_A\right) \end{aligned}$$

Oppure, più semplicemente, dalle equazioni (1.27.2) e (1.27.4) e considerando come incognita la massa complessiva $m = m_p + m_c$:

$$\begin{aligned} m &= \frac{A}{gV_A}\frac{C}{C - 2R}\left(3nRT_A - P_{\mathrm{atm}} V_A\right) \\ T_B &= \frac{3nCT_A - 2P_{\mathrm{atm}} V_A}{3n(C - 2R)} \end{aligned}$$

che, in assenza di atmosfera, si riducono a:

$$\begin{aligned} m &= 3nRT_A \frac{A}{gV_A}\frac{C}{C - 2R} \\ T_B &= \frac{C}{(C - 2R)} T_A \end{aligned}$$

Domanda 3

L'osservazione fatta in risposta al primo quesito vale anche per la formula della variazione di entropia della miscela tra i due stati:

$$\Delta \mathrm{S} = nC \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Trascurando la variazione di entropia dell'atmosfera (l'atmosfera è termicamente isolata e, trascurando il lavoro fatto da essa, la sua temperatura non cambia; così la variazione di entropia dell'atmosfera dipende dal logaritmo del rapporto tra il volume iniziale e quello finale, che è assai prossimo a 1), ΔS rappresenta anche la variazione di entropia dell'universo.

Facoltativo

Per superare l'effetto della pressione atmosferica le masse in gioco dovrebbero essere superiori alla superficie A moltiplicata per una densità di $1\mathrm{kg/cm}^2$: per dimensioni ragionevoli del pistone e del corpo questo è poco verosimile. Pertanto, in un caso reale, la pressione atmosferica non sarà piccola in confronto a quella dovuta alle masse m_p e m_c. Questo comporterà un moto sufficientemente lento del pistone affinché le molecole d'aria vi restino in prossimità e continuino a urtarlo: il lavoro compiuto dall'atmosfera non sarà quindi trascurabile rispetto a quello della forza peso sulle masse in gioco.

1.28. 3 giugno 2015

Primo problema

Si consideri un biliardo con alcune palle di raggio R sulla sua superficie. I coefficienti di attrito radente tra palle e piano del biliardo sono μ_s e $\mu_d < \mu_s$, mentre non sussiste alcun attrito tra due palle quando esse entrano in contatto. In tutto il problema le palle devono essere considerate come corpi rigidi di massa m che effettuano urti perfettamente elastici. Si supponga inoltre che, al momento di colpire una palla con la stecca, la forza impulsiva applicata alla palla abbia la direzione della stecca.

Nell'intero problema tutte le quantità fisiche date o richieste sono definite nel sistema di riferimento solidale col biliardo.

1. Si consideri un colpo secco dato, a una palla ferma, con la stecca orizzontale e centrale, nel senso che il piano verticale contenente la stecca divida in due semisfere la palla. Determinare a che altezza dal piano deve essere assestato il colpo affinché, immediatamente dopo, la palla rotoli senza strisciare.

2. Si consideri ora un urto centrale, cioè con parametro d'impatto nullo, tra due palle. La prima palla è inizialmente in movimento di puro rotolamento con velocità di traslazione v_0, mentre la seconda palla è ferma. Dopo l'urto, determinare completamente il moto della palla inizialmente ferma.

3. Nel caso del punto precedente 2., determinare completamente il moto della prima palla, successivamente all'urto.

4. Si consideri ora un urto, tra due palle, con parametro d'urto positivo $b < 2R$. La prima palla è inizialmente in movimento di puro rotolamento con velocità di traslazione v_0, mentre la seconda palla è ferma. Dopo l'urto, determinare completamente il moto della palla inizialmente ferma.

5. Nel caso del punto precedente 4., determinare sia i vettori velocità di traslazione e velocità angolare della prima palla e che le loro derivate rispetto al tempo immediatamente dopo l'urto.

6. Nel caso del punto 4., descrivere qualitativamente la traiettoria della prima palla, successivamente all'urto, e determinarne il raggio di curvatura immediatamente dopo l'urto.

Secondo problema

Un recipiente cubico di lato$l = 1$m, con pareti trasparenti al calore è diviso in due parti A e B da un setto verticale, anch'esso trasparente al calore, di spessore e capacità termica trascurabile, scorrevole lungo il cubo con attrito trascurabile (si veda la Figura 1.19). Inizialmente la parte A è riempita di acqua fino all'orlo e corrisponde ad una frazione $f_0 = 1/2$ dell'intero volume, mentre la parte B è riempita da $n = 0.1$ moli di gas perfetto monoatomico. Il setto è mantenuto in posizione tramite una barretta orizzontale, di massa

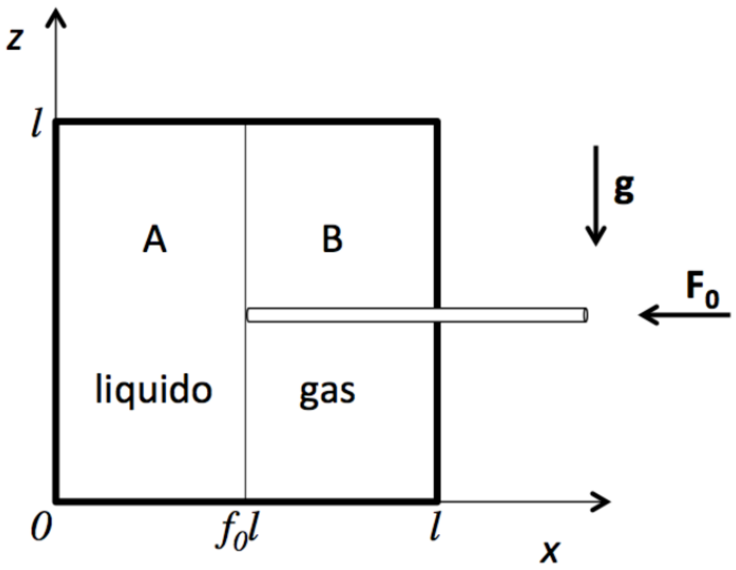


Figura 1.19.: Il sistema considerato nel problema.

e capacità termica trascurabile, sulla quale agisce una forza orizzontale di intensità F_0. L'esterno si trova ad una temperatura $T_E = 300\mathrm{K}$.

1. Determinare l'espressione ed il valore numerico per F_0 (si assume che F_0 sia il valore minimo necessario a mantenere il setto in equilibrio).

2. Si elimina la forza F_0 e si attende il raggiungimento della posizione di equilibrio. Determinare la nuova frazione di volume f_1 della parte A. Si esprima f_1 in funzione del rapporto a fra la pressione idrostatica $\rho g l$ e la pressione del gas nRT_E/l^3 , e si utilizzi lo sviluppo in serie $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8$, valido per piccoli x, per trovare il valore numerico di f_1, discutendo la validità di tale approssimazione.

3. Determinare il calore Q_1 scambiato con l'esterno in questa trasformazione, specificando se si tratti di calore assorbito o ceduto dal sistema.

4. Si isola termicamente il cubo, lasciando il setto divisorio permeabile al calore e, agendo lentamente sulla barretta in modo da mantenere il sistema sempre in equilibrio, si riporta il setto nella configurazione geometrica iniziale, cioè con la sezione A che occupa una frazione di volume f_0. Determinare la variazione di entropia in questo processo e la termperatura finale raggiunta dal sistema liquido+gas.

Soluzione problema 1

Domanda 1

Sia $\mathcal{J}$ il modulo dell'impulso (orizzontale) trasmesso alla palla nel punto di altezza y rispetto al piano del biliardo. Il modulo $\mathcal{M}$ del momento di tale impulso rispetto al centro di massa G vale $\mathcal{M} = \mathcal{J}(y - R)$. Dette inoltre:

v modulo della velocità di traslazione della palla

ω modulo della velocità angolare di rotazione della palla

$I = \frac{2}{5}mR^2$ momento d'inerzia della palla rispetto a un asse passante per G

L modulo del momento angolare della palla rispetto a G affinché si abbia rotolamento puro

deve essere

$$\omega = \frac{v}{R}$$

da cui segue

$$L = I\omega = I\frac{v}{R} = \frac{I\mathcal{J}}{mR}$$

ma anche

$$L = \mathcal{M} = \mathcal{J}(y - R)$$

Abbiamo infine

$$\frac{I\mathcal{J}}{mR} = \mathcal{J}(y - R)$$

e risolvendo per y troviamo

$$y = R + \frac{I}{mR} = \frac{7}{5}R$$

Domanda 2

Nel sistema di riferimento del testo, si consideri il sistema di coordinate cartesiane ortogonali avente assi x e z giacenti sul piano del biliardo e asse y verticale, rivolto verso l'alto. L'origine O coincida con la proiezione ortogonale del centro della prima palla (inizialmente mobile) sul piano del biliardo nel momento in cui le due palle si urtano. Sia P la proiezione del centro della seconda palla, quando questa è ancora ferma, sul piano del biliardo. L'asse x abbia la direzione e il verso del vettore OP, mentre l'asse z quelli necessari per formare un sistema sinistrorso (standard).

Le coordinate di P sono $(2R, 0, 0)$. Si ha:

$$\boldsymbol{v}_0 = v_0\hat{\boldsymbol{e}}_x$$

La velocità angolare della prima palla prima dell'urto è:

$$\boldsymbol{\omega}_0 = -\omega_0\hat{\boldsymbol{e}}_z = -\frac{v_0}{R}\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{1.28.1}$$

Poiché le palle sono liscie, le forze impulsive che si sviluppano tra di esse durante l'urto sono perpendicolari alla loro superficie e quindi giacenti sulla congiungente dei due centri $G1$ e $G2$, con la direzione di $\hat{\boldsymbol{e}}_x$. Pertanto le velocità di traslazione delle palle immediatamente dopo l'urto hanno solo componente x.

Poiché le forze impulsive sono solo quelle tra le due palle, la quantità di moto totale di entrambe le palle si conserva durante l'urto:

$$mv_0 = mw_1 + mw_2$$

dove w_1 e w_2 sono, rispettivamente, le componenti x delle velocità della prima e della seconda palla immediatamente dopo l'urto.

Le forze impulsive lungo la retta G_1G_2 non hanno momento rispetto ai centri delle palle, pertanto i momenti angolari di spin (cioè rispetto ai rispettivi centri) delle due palle si conservano separatamente, così come, di conseguenza, le rispettive velocità angolari.

Infine, la conservazione dell'energia cinetica, garantita dall'elasticità dell'urto, fornisce:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}mw_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 + \frac{1}{2}mw_2^2 \tag{1.28.2}$$

Dalla (1.28.1) e dalla (1.28.2) si ricava:

$$\begin{aligned} w_1 &= 0 \\ w_2 &= v_0 \end{aligned}$$

Le condizioni iniziali per il moto della seconda palla dopo l'urto sono dunque:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_2(0) &= 2R\hat{\boldsymbol{e}}_x + R\hat{\boldsymbol{e}}_y \\ \dot{\boldsymbol{r}}_2(0) &= v_0\hat{\boldsymbol{e}}_x \\ \boldsymbol{\omega}_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{r}_2$è il vettore posizione di G_2 e $\boldsymbol{\omega}_2$ la velocità angolare di rotazione della palla (l'angolo di rotazione delle palle è considerato irrilevante, data la loro simmetria).

Poiché il punto della palla a contatto con il piano del biliardo inizialmente striscia su di esso con velocità $\boldsymbol{v}_0$, risente di una forza di attrito radente dinamico costante finché continuerà a strisciare:

$$\boldsymbol{F}_2 = -\mu_d mg\hat{\boldsymbol{e}}_x$$

il cui momento rispetto a G_2vale

$$\boldsymbol{M}_2 = -R\hat{\boldsymbol{e}}_y \wedge \boldsymbol{F}_2 = -\mu_d mgR\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

Dalle due equazioni cardinali della dinamica applicate alla seconda palla:

$$\begin{aligned} -\mu_d mg &= m\ddot{x}_2 \\ -\mu_d mgR &= I\dot{\omega}_{2,z} = \frac{2}{5}mR^2\dot{\omega}_{2,z} \end{aligned}$$

che, risolte con le condizioni iniziali specificate, forniscono:

$$\boldsymbol{r}_2 = \left(-\frac{1}{2}\mu_d g t^2 + v_0 t + 2R\right)\hat{\boldsymbol{e}}_x + R\hat{\boldsymbol{e}}_y$$
$$\boldsymbol{\omega}_2 = \left(-\frac{5}{2}\mu_d \frac{g}{R} t\right)\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

oltre all'andamento temporale della velocità di traslazione:

$$\dot{x}_2 = -\mu_d g t + v_0$$

Tali soluzioni, naturalmente, sono valide solo fino al momento $t = t_2$ in cui la palla smette di strisciare, dopo di che la forza d'attrito si annulla e il moto diventa di puro rotolamento. L'istante a cui questo avviene soddisfa all'equazione di rotolamento puro:

$$\dot{x}_2(t_2) = -\omega_{2,z}(t_2)R$$
$$-\mu_d g t_2 + v_0 = \frac{5}{2}\mu_d g t_2$$

da cui

$$t_2 = \frac{2v_0}{7\mu_d g}$$

La successiva velocità di traslazione vale:

$$\dot{x}_2\hat{\boldsymbol{e}}_x = (-\mu_d g t_2 + v_0)\,\hat{\boldsymbol{e}}_x = \frac{5}{7}v_0\hat{\boldsymbol{e}}_x$$

Domanda 3

Le condizioni iniziali per il moto della seconda palla dopo l'urto sono state ricavate nel punto precedente:

$$\boldsymbol{r}_1(0) = R\hat{\boldsymbol{e}}_y$$
$$\dot{\boldsymbol{r}}_1(0) = 0$$
$$\boldsymbol{\omega}_1(0) = -\omega_0\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

dove $\boldsymbol{r}_1$ è il vettore posizione di G_1 e ω_1 la velocità angolare di rotazione della palla. Anche in questo caso vi è strisciamento iniziale del punto di contatto con la superficie del biliardo, con forza di attrito radente dinamico:

$$\boldsymbol{F}_1 = \mu_d m g\hat{\boldsymbol{e}}_x$$

il cui momento rispetto a G_1 vale

$$\boldsymbol{M}_1 = -R\hat{\boldsymbol{e}}_y \wedge \boldsymbol{F}_1 = \mu_d m g R\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

La soluzione delle relative equazioni cardinali, in modo perfettamente speculare al precedente, fornisce:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1 &= \frac{1}{2}\mu_d g t^2 \hat{\boldsymbol{e}}_x + R\hat{\boldsymbol{e}}_y \\ \boldsymbol{\omega}_1 &= \left(-\frac{v_0}{R} + \frac{5}{2}\mu_d \frac{g}{R} t\right)\hat{\boldsymbol{e}}_z \end{aligned}$$

oltre all'andamento temporale della velocità di traslazione:

$$\dot{x}_1 = \mu_d g t$$

Tali soluzioni, naturalmente, sono valide solo fino al momento $t = t_1$ in cui la palla smette di strisciare, dopo di che la forza d'attrito si annulla e il moto diventa di puro rotolamento. L'istante a cui questo avviene soddisfa all'equazione di rotolamento puro

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t_1) &= -\omega_{1,z}(t_1)R \\ \mu_d g t_1 &= v_0 - \frac{5}{2}\mu_d g t_1 \end{aligned}$$

da cui

$$t_1 = \frac{2v_0}{7\mu_d g} = t_2$$

La successiva velocità di traslazione vale

$$\dot{x}_1 \hat{\boldsymbol{e}}_x = \mu_d g t_1 \hat{\boldsymbol{e}}_x = \frac{2}{7} v_0 \hat{\boldsymbol{e}}_x$$

Domanda 4

Si usi lo stesso sistema di coordinate dei punti precedenti. Sia θ l'angolo tra $\boldsymbol{v}_0$ e asse x, si ha:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{b}{2R} \\ \cos\theta &= \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2} \end{aligned}$$

Adesso la velocità iniziale della prima palla si scrive

$$\boldsymbol{v}_0 = v_0 \cos\theta \hat{\boldsymbol{e}}_x + v_0 \sin\theta \hat{\boldsymbol{e}}_z$$

e la sua velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \sin\theta \hat{\boldsymbol{e}}_x - \omega_0 cos\theta \hat{\boldsymbol{e}}_z = \frac{v_0}{R}\sin\theta \hat{\boldsymbol{e}}_x - \frac{v_0}{R} cos\theta \hat{\boldsymbol{e}}_z$$

Le stesse considerazioni sulla direzione delle forze impulsive, la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica portano alle seguenti espressioni per le componenti x delle velocità immediatamente dopo l'urto:

$$\begin{aligned} w_1 &= \dot{x}_1(0) = 0 \\ w_2 &= \dot{x}_2(0) = v_0 \cos\theta \end{aligned}$$

mentre le componenti z delle stesse velocità, anch'esse come nella domanda 2, hanno gli stessi valori antecedenti all'urto:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(0) &= v_0 \sin\theta \\ \dot{z}_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

Anche le velocità angolari delle due palle non variano nell'urto:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_1(0) &= \omega_0 \sin\theta \hat{\boldsymbol{e}}_x - \omega_0 \cos\theta \hat{\boldsymbol{e}}_z \\ \omega_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

Pertanto, le considerazioni fatte per il moto della seconda palla possono essere ripetute con le seguenti condizioni iniziali

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_2(0) &= 2R\hat{\boldsymbol{e}}_x + R\hat{\boldsymbol{e}}_y \\ \dot{\boldsymbol{r}}_2(0) &= v_0 \cos\theta \hat{\boldsymbol{e}}_x \\ \boldsymbol{\omega}_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

dove l'unica variazione rispetto alla domanda 2 è la sostituzione di v_0 con $v_0 \cos\theta$. In conclusione le nuove soluzioni sono:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_2 &= \left(-\frac{1}{2}\mu_d g t^2 + v_0 t \cos\theta + 2R\right) \hat{\boldsymbol{e}}_x + R\hat{\boldsymbol{e}}_y \\ \boldsymbol{\omega}_2 &= \left(-\frac{5}{2}\mu_d \frac{g}{R} t\right) \hat{\boldsymbol{e}}_z \\ t_2 &= \frac{2}{7}\frac{v_0 \cos\theta}{\mu_d g} \end{aligned}$$

con velocità di traslazione finale

$$\dot{x}_2 \hat{\boldsymbol{e}}_x = \frac{5}{7} v_0 \cos\theta \hat{\boldsymbol{e}}_x$$

Domanda 5

I vettori velocità di traslazione e velocità angolare della prima palla immediatamente dopo l'urto sono stati già calcolati al punto precedente:

$$\boldsymbol{\omega}_1(0) = \omega_0 \sin\theta \hat{\boldsymbol{e}}_x - \omega_0 \cos\theta \hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{1.28.3}$$

e

$$w_1 = 0$$
$$\dot{z}_1(0) = v_0 \sin\theta$$

dove le seconde possono essere riscritte insieme come:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_1(0) = v_0 \sin\theta \hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{1.28.4}$$

La velocità del punto di contatto della prima palla con il piano del biliardo (cioè con O, al momento dell'urto $t = 0$), è data dalla formula generale per la velocità di un punto di un corpo rigido:

$$\boldsymbol{v}_{o'} = \dot{\boldsymbol{r}}_1(0) + \boldsymbol{\omega}_1(0) \wedge \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{O} = v_0 \sin\theta \hat{\boldsymbol{e}}_z + (\omega_0 \sin\theta \hat{\boldsymbol{e}}_x - \omega_0 \cos\theta \hat{\boldsymbol{e}}_z) \wedge (-R\hat{\boldsymbol{e}}_y)$$

da cui

$$\boldsymbol{v}_{o'} = -v_0 \cos\theta \hat{\boldsymbol{e}}_x$$

Pertanto, ancora una volta, è presente una forza di attrito radente:

$$\boldsymbol{F}_1 = \mu_d m g \hat{\boldsymbol{e}}_x$$
$$\boldsymbol{M}_1 = -R\hat{\boldsymbol{e}}_y \wedge \boldsymbol{F}_1 = \mu_d m g R \hat{\boldsymbol{e}}_z$$

Dalle equazioni cardinali si ricava immediatamente:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1(0) = \frac{\boldsymbol{F}_1}{m} = \mu_d g \hat{\boldsymbol{e}}_x \tag{1.28.5}$$
$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_1(0) = \frac{\boldsymbol{M}_1}{I} = \frac{5}{2}\mu_d \frac{g}{R}\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{1.28.6}$$

Domanda 6

Come si vede dal risultato del punto precedente, immediatamente dopo l'urto la prima palla ha una velocità di traslazione lungo l'asse z e una forza esterna risultante (perpendicolare) lungo l'asse x. Il risultato sarà una rotazione del vettore velocità verso l'asse x. Il raggio di curvatura r_c iniziale si può calcolare direttamente dai valori della velocità (1.28.4) e dell'accelerazione centripeta (1.28.5):

$$r_c = \frac{(\dot{z}_1)^2}{|\ddot{\boldsymbol{r}}_1|} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{\mu_d g}$$

Contemporaneamente, la componente z (negativa) della velocità angolare (1.28.3) diminuisce in modulo a causa della derivata (1.28.6). Questo risulta in una rotazione del vettore velocità angolare, anch'esso verso l'asse x, ma con verso di rotazione opposto a quello della velocità. Il risultato è che l'angolo φ tra velocità di traslazione e velocità angolare di rotazione, superiore a $\pi/2$ immediatamente dopo l'urto, tende a diminuire.

Il processo prosegue, producendo una traiettoria curva con concavità rivolta verso l'asse x, mentre l'angolo φ diminuisce fino a $\pi/2$, quando la forza d'attrito assume la stessa direzione della velocità, il moto di G_1 diventa rettilineo e finalmente la palla rotola senza strisciare.

Soluzione problema 2

Domanda 1

Sul setto agiscono la forza esterna F_0, la forza dovuta alla pressione del gas e la forza dovuta alla pressione idrostatica del liquido. La forza dovuta al gas è semplicemente

$$F_G^0 = pS = \frac{nRT_E}{(1-f_0)\, l^3} l^2 = \frac{nRT_E}{(1-f_0)\, l} \tag{1.28.7}$$

La pressione idrostatica del liquido varia con l'altezza piezometrica z (z asse verticale rivolto verso l'alto), ma è la stessa su un elemento di superficie dS di altezza dz e larghezza l. Pertanto, in modulo, si ha:

$$F_L^0 = \int_0^l \rho g l\, (l-z)\, dz = \frac{1}{2}\rho g l^3 \tag{1.28.8}$$

Si noti che il risultato non dipende dalla frazione di volume f_0 occupata dal liquido! La condizione di equilibrio ci permette di scrivere F_0 come

$$F_0 = F_L^0 - F_G^0 = \frac{1}{2}\rho g l^3 - \frac{nRT_E}{(1-f_0)\, l} \simeq 4.5\text{kN} \tag{1.28.9}$$

Domanda 2

Togliendo la forza esterna, il setto si muove verso destra fino a che la parte A non occupa una frazione f_1 di volume. Il liquido raggiunge una altezza h e la sua spinta è data da un integrale simile a quello di Eq. (1.28.8)

$$F_L^1 = \int_0^h \rho g\, (h-z)\, l\, dz = \frac{1}{2}\rho g h^2 l \tag{1.28.10}$$

mentre la pressione esercitata dal gas sulla parete è

$$F_G^1 = pS = \frac{nRT_E}{(1-f_1)\, l^3} l^2 = \frac{nRT_E}{(1-f_1)\, l}$$

La relazione fra l'altezza h del liquido e la frazione f_1 è data dalla conservazione del volume del liquido:

$$f_0 l^3 = h f_1 l^2 \to f_0 l = f_1 h \tag{1.28.11}$$

Quindi la condizione di equilibrio è

$$0 = \frac{1}{2}\rho g h^2 l - \frac{nRT_E}{(1-f_1)\,l} = \frac{\rho g l^3 f_0^2}{2 f_1^2} - \frac{nRT_E}{(1-f_1)\,l}$$

Scrivendo

$$a = \frac{\rho g l^4}{nRT_E} \simeq 40$$

si ottiene l'equazione di secondo grado in f_1

$$2f_1^2 + a f_0^2 f_1 - a f_0^2 = 0$$

che ha come unica soluzione accettabile

$$f_1 = \frac{a f_0^2}{4}\left(\sqrt{1+\frac{8}{a f_0^2}} - 1\right) \simeq 1 - \frac{2}{a f_0^2} \simeq 0.8$$

avendo utilizzato l'espansione in serie per $\sqrt{1+x}$. In questo caso $x = 8/(a f_0^2) \simeq 0.8$ per cui l'espansione non è pienamente giustificata. In effetti, il calcolo corretto da $f_1 = 0.854$.

Domanda 3

Il sistema gas+liquido non compie lavoro verso l'esterno, per cui il calore ceduto è uguale alla variazione di energia interna. Questa è dovuta solamente alla variazione di energia potenziale del liquido, in quanto la temperatura finale è uguale a quella iniziale, per cui l'energia interna dei due fluidi non varia. Se h è la nuova quota del liquido, risulta

$$Q_1 = \Delta U = m_L g \frac{h-l}{2} = \rho_L g l^4 f_0 \frac{f_0 - f_1}{2 f_1} < 0$$

Il calore è ceduto dal sistema all'ambiente esterno.

Domanda 4

La trasformazione è adiabatica reversibile, per cui isoentropica

$$\Delta S = 0$$

Fra lo stato iniziale e finale variano sia temperatura che volume del gas, mentre per il liquido cambia solamente la temperatura. Allora:

$$\Delta S = nR \log\frac{V_f}{V_i} + nC_v \log\frac{T_f}{T_i} + m c_L \log\frac{T_f}{T_i} = 0$$

da cui

$$\log\frac{T_f}{T_E} = \frac{nR}{nC_V + \rho_L l^3 f_0 c_L} \log\frac{f_1}{f_0} \simeq e10^{-8}$$

Pertanto risulta $T_f \simeq T_E$: l'enorme quantità di liquido (metà cubo, quindi 500l) svolge il compito di serbatoio termico e mantiene la temperatura costante.

1.29. 3 luglio 2015

Primo problema

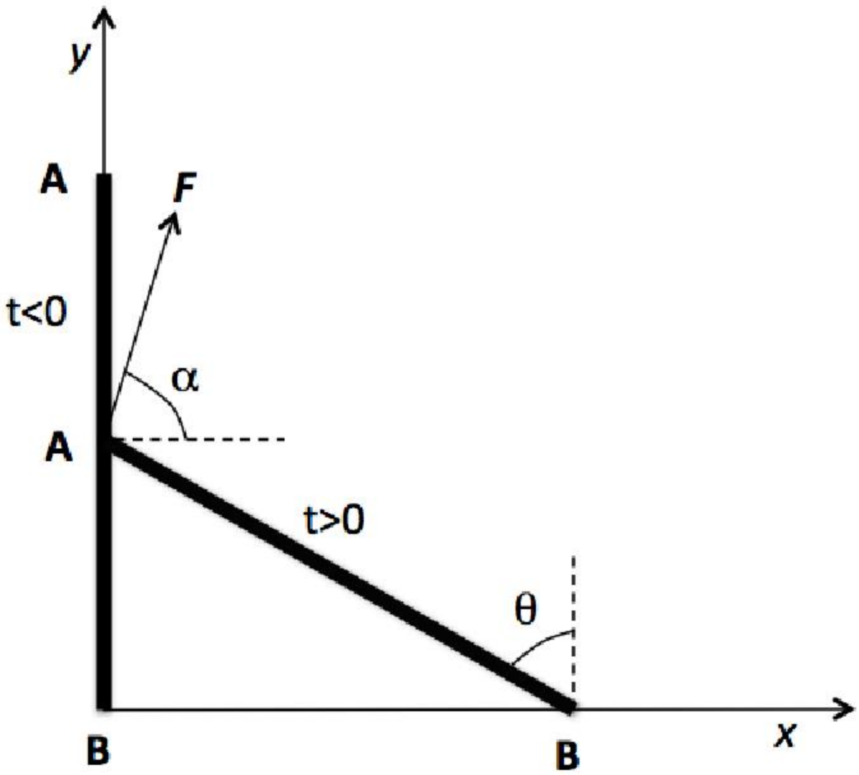


Figura 1.20.: La trave del problema, nella posizione iniziale e in una posizione generica per $t > 0$.

Una trave omogenea, di lunghezza l e massa m, è tenuta appoggiata al suolo in posizione verticale da una gru agganciata all'estremo superiore A.

Si fissi una terna cartesiana sinistrorsa avente gli assi x e y, rispettivamente orizzontale e verticale, come in Figura 1.20 e l'asse z di conseguenza.

All'istante $t = 0$ la trave viene messa in rotazione con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \hat{\boldsymbol{e}}_z$costante, da una opportuna forza impulsiva orizzontale agente sull'estremo B a contatto con il suolo. Il manovratore della gru deve regolare, istante per istante, la forza F sull'estremo A, in modo da mantere tale estremo lungo la verticale iniziale, l'estremo B a contatto con il suolo e la velocità angolare di rotazione della trave costante lungo l'intero tragitto, fino al contatto di tutta la trave con il suolo. L'estremo B scivola senza attrito lungo l'asse orizzontale.

Determinare:

1. il moto del baricentro G della trave: traiettoria, velocità e accelerazione;

2. l'andamento dell'energia cinetica della trave durante il moto;
3. i lavori fatti, nel portare la trave dalla posizione verticale a quella orizzontale, rispettivamente dalla forza di reazione del suolo $\boldsymbol{N}$, dalla forza peso $\boldsymbol{P}$ e dalla forza $\boldsymbol{F}$ applicata dalla gru all'estremo A;
4. la reazione $\boldsymbol{N}(t)$ del suolo sull'estremo B della trave;
5. il valore limite della velocità di rotazione ω_0 oltre il quale il manovratore non può mantenere l'estremo B della trave sempre a contatto con il suolo secondo le specifiche;
6. le componenti $F_x(t)$ e $F_y(t)$ della forza $\boldsymbol{F} = F_x\hat{\boldsymbol{e}}_x + F_y\hat{\boldsymbol{e}}_y$, verificando esplicitamente il risultato trovato al punto 3. sul lavoro compiuto da $\boldsymbol{F}$ durante il moto. Si verifichi, inoltre, se esistono dei valori di ω_0 e di t per i quali l'angolo formato da $\boldsymbol{F}$ con l'asse orizzontale sia minore di $\pi/2$, come arbitrariamente illustrato nel disegno.

Secondo problema

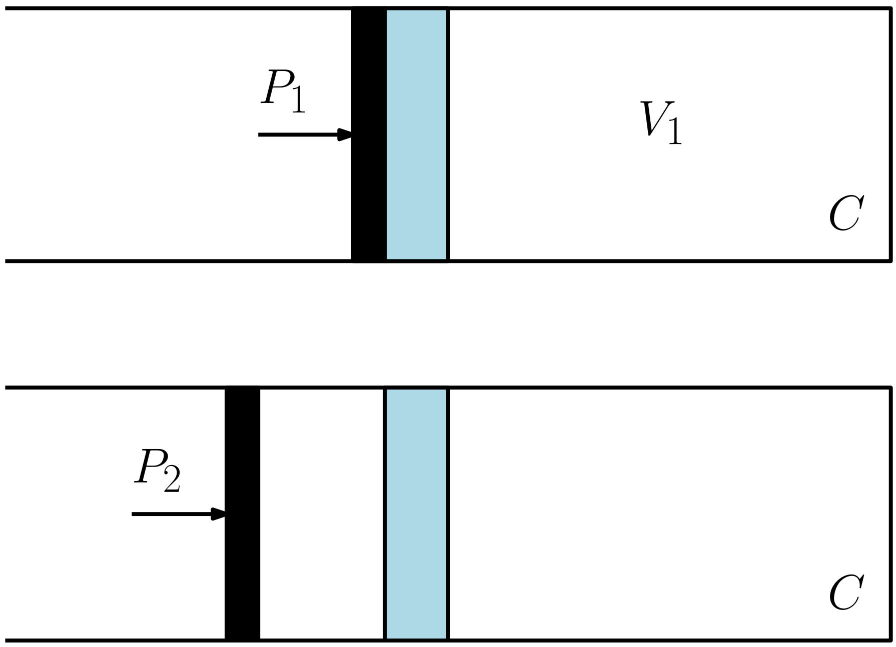


Figura 1.21.: Il cilindro, il pistone mobile e il setto poroso nello stato iniziale e in quello finale.

Un cilindro dotato di un pistone mobile e di un setto poroso fisso contiene n moli di gas ideale monoatomico. La sezione trasversa del cilindro ha area A. La camera C, costituita dalla porzione di cilindro compresa tra il setto poroso e il fondo, ha volume V_1.

Il setto poroso è sede di una diffusione del gas sufficientemente lenta da permettere alle due porzioni separate di gas di raggiungere una situazione di quasi equilibrio, a parte la lenta diffusione, con grandezze termodinamiche ben definite in ciascuna porzione. Inizialmente tutto il gas si trova nella camera C alla pressione P_1, il pistone è mantenuto appoggiato al setto poroso e tutto il sistema è all'equilibrio termodinamico.

L'intero cilindro viene isolato termicamente dall'ambiente esterno. Successivamente si riduce la forza esterna applicata al pistone in modo che la pressione da esso determinata, in condizioni di equilibrio, assuma il valore $P_2 < P_1$.

1. Determinare la temperatura del gas quando questo raggiunge il nuovo equilibrio termodinamico.
2. Determinare quante moli di gas restano nella camera C, quando viene raggiunto il nuovo equilibrio termodinamico.
3. Stabilire se la trasformazione subita sia reversibile o irreversibile.
4. Si supponga di eseguire lo stesso esperimento, ma senza isolare termicamente il cilindro rispetto all'ambiente circostante: determinare la variazione di entropia dell'universo in questo diverso caso.
5. Nel caso dell'equilibrio raggiunto con l'isolamento termico (domande 1, 2 e 3), successivamente si riporta istantaneamente la forza esterna applicata al pistone a un valore tale che, all'equilibrio, questo torni a esercitare sul gas una pressione P_1. Ci si chiede se lo stato finale del gas torni ad essere quello iniziale nella camera C, pertanto si determini la temperatura del gas al nuovo stato finale.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Il centro di massa G si trova a metà della trave e le sue coordinate sono

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{2} l \sin\theta \\ y_G &= \frac{1}{2} l \cos\theta \end{aligned}$$

Per ipotesi la velocità angolare è mantenuta costante: $\dot{\theta} = \omega_0$. Da questo segue

$$\theta(t) = \omega_0 t$$

dove abbiamo imposto la condizione iniziale $\theta(0) = 0$. Possiamo quindi scrivere le coordinate del centro di massa in funzione del tempo

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{2} l \sin\omega_0 t \\ y_G &= \frac{1}{2} l \cos\omega_0 t \end{aligned}$$

La traiettoria è un arco di circonferenza di raggio $l/2$. Derivando si ricavano velocità e accelerazione:

$$\dot{x}_G = \frac{1}{2} l\omega_0 \cos \omega_0 t \tag{1.29.1}$$

$$\dot{y}_G = -\frac{1}{2} l\omega_0 \sin \omega_0 t \tag{1.29.2}$$

$$\ddot{x}_G = -\frac{1}{2} l\omega_0^2 \sin \omega_0 t \tag{1.29.3}$$

$$\ddot{y}_G = -\frac{1}{2} l\omega_0^2 \cos \omega_0 t \tag{1.29.4}$$

Domanda 2

L'energia cinetica della trave, ad un generico istante, vale:

$$E_K = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega_0^2$$

Sostituendo la velocità trovata nelle Equazioni (1.29.1) e (1.29.2) e ricordando che per una trave $I_G = ml^2/12$, si ha:

$$E_K = \frac{1}{2}\left(m\frac{l^2\omega_0^2}{4} + \frac{ml^2}{12}\omega_0^2 \right) = \frac{1}{6} ml^2\omega_0^2$$

Pertanto l'energia cinetica è una costante del moto.

Domanda 3

Scriviamo il lavoro compiuto dalle forze esterne $\boldsymbol{N}$, $m\boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{F}$. La reazione vincolare $\boldsymbol{N}$ è perpendicolare allo spostamento del suo punto di applicazione B, per cui il suo lavoro è nullo:

$$L_N = 0$$

Il lavoro della forza peso è semplicemente uguale alla variazione dell'energia potenziale della trave:

$$L_P = mg\frac{l}{2}$$

Il lavoro dela forza $\boldsymbol{F}$, esercitata dalla gru, può essere trovato per differenza. Infatti, dal teorema delle forze vive, il lavoro totale svolto dalle forze esterne è uguale alla variazione di energia cinetica del corpo. Essendo l'energia cinetica una costante del moto, il lavoro totale delle forze esterne è nullo. Pertanto

$$L_F = L_{tot} - L_N - L_P = -mg\frac{l}{2}$$

Domanda 4

Per ricavare la reazione $\boldsymbol{N} = N\hat{\boldsymbol{e}}_y$, scriviamo la prima equazione cardinale della dinamica, utilizzando le Equazioni (1.29.3) e (1.29.4):

$$\begin{aligned} F_x &= m\ddot{x}_G \\ F_y + N - mg &= m\ddot{y}_G \end{aligned}$$

Abbiamo due equazioni e tre incognite (F_x, F_y e N). La terza equazione deriva dalla componente z della seconda equazione cardinale, le altre due componenti essendo nulle per un moto piano.

Prendiamo come polo il centro di massa. É conveniente considerare separatamente le due componenti F_x e F_y e scrivere il momento delle forze come

$$\boldsymbol{M}_G = \left(-F_x \frac{l}{2}\cos\theta - F_y \frac{l}{2}\sin\theta + N\frac{l}{2}\sin\theta\right)\hat{\boldsymbol{z}}$$

ma dato che la velocità angolare è costante il momento angolare rispetto al centro di massa non cambia, e quindi $\boldsymbol{M}_G = 0$. Dalla prima equazione cardinale troviamo

$$\begin{aligned} F_x &= m\ddot{x}_G \\ F_y &= m\ddot{y}_G + mg - N \end{aligned}$$

e sostituendo in $\boldsymbol{M}_G = 0$ otteniamo

$$-m\ddot{x}_G\cos\theta - (m\ddot{y}_G + mg - N)\sin\theta + N\sin\theta = 0$$

da cui

$$N = \frac{m}{2}\left(\ddot{x}_G\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \ddot{y}_G + g\right)$$

Inserendo le espressioni esplicite delle accelerazioni ottenute precedentemente abbiamo

$$N = \frac{mg}{2}\left(1 - \frac{l\omega_0^2}{g}\cos\theta\right)$$

Domanda 5

Se la trave rimane a contatto con il suolo si ha $N > 0$. Questo accade quando

$$\omega_0^2 < \frac{g}{l\cos\theta}$$

Perché questa condizione sia verificata a tutti gli angoli deve essere

$$\omega_0^2 < \frac{g}{l}$$

Domanda 6

Inseriamo N e le espressioni esplicite delle accelerazioni nelle espressioni trovate precedentemente per le componenti delle forze. Abbiamo

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{1}{2}ml\omega_0^2\sin\theta \\ F_y &= \frac{1}{2}mg \end{aligned}$$

La forza è applicata all'estremo A, che si muove solo verticalmente. Quindi il lavoro è

$$L_F = \int F_y dy = -\frac{1}{2}mgl$$

in accordo con il risultato trovato precedentemente.

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che il sistema è isolato termicamente il lavoro fatto su di esso deve essere uguale alla variazione dell'energia interna:

$$P_2\left(V_1 - V_2\right) = nc_V\left(T_2 - T_1\right)$$

D'altra parte nello stato di equilibrio iniziale e finale deve valere

$$\begin{aligned} P_1V_1 &= nRT_1 \\ P_2V_2 &= nRT_2 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi la temperatura iniziale

$$T_1 = \frac{P_1V_1}{nR}$$

e sostituendo i volumi nella Equazione troviamo

$$T_2 = \frac{\frac{P_2}{P_1} + \frac{c_V}{R}}{1 + \frac{c_V}{R}}T_1$$

La temperatura finale è quindi inferiore a quella iniziale, dato che $P_2/P_1 < 1$. Dato che $c_V/R = 3/2$ possiamo anche scrivere

$$T_2 = \frac{1}{5}\left(3 + 2\frac{P_2}{P_1}\right)T_1$$

Domanda 2

Dall'equazione di stato applicata al gas nella camera C abbiamo

$$P_2V_1 = n_C R T_2$$

mentre per tutto il gas vale

$$P_2V_2 = nRT_2$$

Dividendo membro a membro abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{n_C}{n} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}\frac{P_2}{P_1} &= \frac{1+\frac{c_V}{R}}{\frac{P_2}{P_1}+\frac{c_V}{R}} \\ &= \frac{5P_2}{3P_1+2P_2}\end{aligned}$$

Domanda 3

Anche se la trasformazione avviene molto lentamente, e istante per istante lo stato termodinamico dei gas nei due scomparti è ben definito, il processo è irreversibile. Infatti il processo inverso non avviene spontaneamente. Per verificare questa affermazione si può valutare la variazione di entropia del gas tra stato iniziale e stato finale. Abbiamo

$$\begin{aligned}\Delta S\left(\frac{P_2}{P_1}\right) &= nc_V \log\frac{T_2}{T_1} + nR\log\frac{V_2}{V_1} \\ &= nR\left[\left(1+\frac{c_V}{R}\right)\log\frac{T_2}{T_1}+\log\frac{P_1}{P_2}\right] \\ &= nR\left[\frac{5}{2}\log\frac{1}{5}\left(3+2\frac{P_2}{P_1}\right)-\log\frac{P_2}{P_1}\right]\end{aligned}$$

Chiaramente $\Delta S(1) = 0$, come si verifica direttamente. Inoltre

$$\frac{d}{dx}\Delta S(x) = nR\left[\frac{5}{2}\frac{1}{3+2x}-\frac{1}{x}\right]$$

e si trova che ΔS è una funzione decrescente di x per $0 < x < 1$. Quindi quando $P_2 < P_1$ l'entropia del sistema aumenta.

Domanda 4

Anche in questo caso non ci si aspetta che la trasformazione sia reversibile, dato che l'inversa non avviene spontaneamente. L'energia interna del gas non cambia, ma ad esso viene trasferito un calore Q. Dal primo principio abbiamo

$$P_2\left(V_1 - V_2\right) + Q = 0$$

da cuiQ
$$Q = P_2 (V_2 - V_1)$$
La variazione di entropia del gas sarà
$$\Delta S_{gas} = nR \log \frac{V_2}{V_1} = nR \log \frac{P_1}{P_2} > 0$$
Ma anche l'ambiente esterno varia la sua entropia, dato che è coinvolto in uno scambio di calore. In particolare sarà
$$\Delta S_{amb} = -\frac{Q}{T_1} = \frac{P_2}{T_1} (V_1 - V_2) = \frac{P_2 V_2}{T_1} \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right) = nR \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) < 0$$
La variazione di entropia dell'universo sarà
$$\Delta S \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = \Delta S_{gas} + \Delta S_{amb} = nR \left[\left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) - \log \frac{P_2}{P_1} \right]$$
Ancora una volta $\Delta S = 0$ se $P_2/P_1 = 1$. Inoltre derivando rispetto al rapporto delle pressioni troviamo
$$\frac{d}{dx} \Delta S (x) = nR \left(1 - \frac{1}{x} \right)$$
Segue che ΔS è minima per $P_2 = P_1$, e quindi è aumentata nella trasformazione considerata.

Domanda 5

Indichiamo con V_f e T_f il volume e la temperatura finale del gas. Ripetendo il ragionamento fatto rispondendo alla prima domanda abbiamo
$$\begin{aligned} P_1 (V_2 - V_f) &= nR (T_f - T_2) \\ P_1 V_f &= nRT_f \end{aligned}$$
Di conseguenza
$$\left(\frac{P_1}{P_2} \frac{\frac{P_2}{P_1} + \frac{c_V}{R}}{1 + \frac{c_V}{R}} T_1 - T_f \right) = \left(T_f - \frac{\frac{P_2}{P_1} + \frac{c_V}{R}}{1 + \frac{c_V}{R}} T_1 \right)$$
ossia
$$\begin{aligned} T_f &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{P_1}{P_2} \right) \frac{\frac{P_2}{P_1} + \frac{c_V}{R}}{1 + \frac{c_V}{R}} T_1 \\ &= \frac{1}{5} \left(1 + \frac{P_1}{P_2} \right) \left(\frac{P_2}{P_1} + \frac{3}{2} \right) T_1 \end{aligned}$$

La temperatura finale è dunque diversa da quella iniziale (a parte il caso ovvio $P_2 = P_1$). Per verificare se il risultato è accettabile calcoliamo il volume finale. Abbiamo

$$\begin{aligned}
V_F\left(\frac{P_1}{P_2}\right) &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{P_1}{P_2}\right)\frac{\frac{P_2}{P_1}+\frac{c_V}{R}}{1+\frac{c_V}{R}}\frac{nRT_1}{P_1} \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{P_1}{P_2}\right)\frac{\frac{P_2}{P_1}+\frac{c_V}{R}}{1+\frac{c_V}{R}}V_1 \\
&= 5\left(1+\frac{P_1}{P_2}\right)\left(\frac{P_2}{P_1}+\frac{3}{2}\right)V_1
\end{aligned}$$

Abbiamo $V_F(1) = V_1$. Inoltre

$$\frac{d}{dx}V_F(x) = 5\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{x^2}\right)V_1$$

che è crescente per $x > \sqrt{2/3}$. Di conseguenza il gas non rientra interamente nello scomparto C, possiamo ignorare l'effetto meccanico del setto poroso e l'analisi svolta è sensata.

1.30. 2 settembre 2015

Primo problema

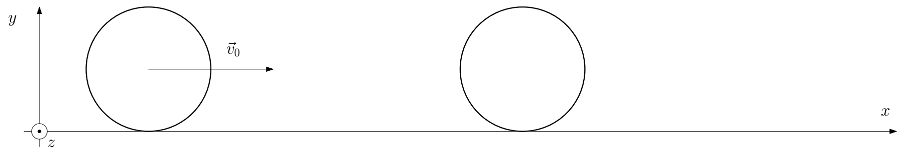


Figura 1.22.: I due cilindri nella situazione iniziale considerata nel problema.

Due cilindri di uguale raggio R hanno masse M_1 e M_2 e momenti di inerzia I_1 e I_2 rispetto al loro asse. In entrambi i casi la massa è distribuita in modo tale che le densità volumetriche rispettive ρ_1 e ρ_2 dipendano solo dalla distanza r dall'asse e non dalla quota né dall'azimut nei cilindri: $\rho_1 = \rho_1(r)$ e $\rho_2 = \rho_2(r)$.

I cilindri, paralleli e allineati tra loro, sono appoggiati su un piano orizzontale e, grazie ad un opportuno ingranaggio, sono vincolati a muoversi su di esso con un moto di rotolamento puro.

Inizialmente il cilindro a destra in figura (M_2, I_2) è in quiete, mentre quello a sinistra (M_1, I_1) ha una velocità del centro di massa uguale a $\vec{v}_0 = v_0\hat{x}$.

Tra i due cilindri non vi è attrito, e ad un certo istante si ha un urto elastico.

1. Si considerino le reazioni vincolari del piano orizzontale sui cilindri e si spieghi se durante l'urto queste reazioni siano impulsive o meno.

2. Se $M_1 = M_2$ e $I_1 = I_2$, quali sono le velocità dei centri di massa dei cilindri dopo l'urto?

3. Sempre nel caso $M_1 = M_2$ e $I_1 = I_2$ si consideri la forza impulsiva che il primo cilindro esercita sul secondo e si calcoli l'impulso di questa forza.

4. Calcolare le velocità finali dei centri di massa dei due cilindri per M_1, M_2, I_1 e I_2 qualsiasi.

5. Per quale relazione generale tra M_1, M_2, I_1 e I_2 il primo cilindro è fermo dopo l'urto? Fornire un esempio di distribuzioni di massa che soddisfino tale relazione, nonostante sia $\rho_1(r) \neq \rho_2(r)$.

Secondo problema

Un recipiente cilindrico impermeabile al calore di volume V_0 contiene una miscela di n_1 moli di un gas perfetto monoatomico e di n_2 moli di un gas perfetto biatomico. All'interno del recipiente si trova un setto scorrevole che può essere manovrato dall'esterno. Inizialmente il setto si trova ad una estremità del recipiente, e tutto il volume disponibile è riempito dalla miscela di gas, ad una temperatura iniziale T_0. Considerando V_0, T_0, n_1 e n_2 come quantità note

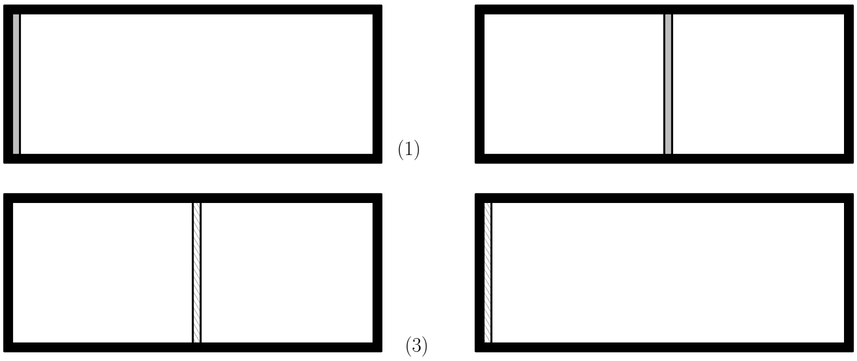


Figura 1.23.: La sequenza di trasformazioni considerate nel problema. Il setto è permeabile al gas nelle immagini (3) e (4).

1. Calcolare il lavoro necessario per spostare reversibilmente il setto in modo da dividere il recipiente in due parti di uguale volume.

2. Nello stato raggiunto precedentemente la miscela di gas occupa solo una delle due metà del recipiente. Improvvisamente, mentre il setto viene mantenuto fermo a metà cilindro, esso diviene permeabile al gas monoatomico (ma non a quello biatomico). Calcolare la pressione nelle due parti, quando si raggiunge nuovamente l'equilibrio termodinamico.

3. Adesso si sposta nuovamente e reversibilmente il setto, che rimane permeabile al gas monoatomico, verso l'estremità nella quale si trovava inizialmente. Calcolare la temperatura finale del sistema e la sua variazione di entropia rispetto alla condizione iniziale del problema.

4. Quanto vale il lavoro complessivo fatto sul sistema in tutte le trasformazioni precedenti, in particolare nel caso $n_1 = 0$ e $n_2 = 0$?

5. Se T_m è la temperatura minima di tutte le sorgenti termiche disponibili, quanto vale l'energia che è diventata permanentemente inutilizzabile per compiere lavoro? Si mostri schematicamente come si potrebbe organizzare, alternativamente, una trasformazione che porti il gas nello stesso stato finale, ma, senza degradare l'energia, la trasformi invece tutta in lavoro (la quantità di lavoro prodotto deve essere pari all'energia che nel testo diviene inutilizzabile).

Soluzione primo problema

Domanda 1

La reazione vincolare sul secondo cilindro deve essere impulsiva. Se non lo fosse, l'unica forza impulsiva agente sarebbe quella di contatto con il primo cilindro. Considerando un polo posto sull'asse, vediamo che questa avrebbe momento nullo. Di conseguenza il centro di massa si metterebbe in moto ma il cilindro non ruoterebbe, in contrasto con il vincolo di rotolamento puro. In modo del tutto analogo si può concludere che anche la reazione vincolare sul primo cilindro deve essere impulsiva: in caso contrario la velocità del cenro di massa cambierebbe, ma non la velocità angolare, quindi anche in questo caso il vincolo di rotolamento puro non sarebbe rispettato.

Domanda 2

Poniamoci in un sistema di riferimento che si muove verso destra con velocità $\frac{1}{2}v_0\hat{e}_x$. Prima dell'urto abbiamo due cilindri identici che si muovono l'uno verso l'altro con velocità rispettivamente $\frac{1}{2}v_0\hat{e}_x$ e $-\frac{1}{2}v_0\hat{e}_x$. Scegliendo opportunamente l'origine, possiamo fare in modo che l'urto avvenga in essa. Se ruotiamo il sistema di 180° attorno all'asse y, otteniamo un sistema indistinguibile. Questo significa che se indichiamo con $v_1\hat{e}_x$ e $v_2\hat{e}_x$ le velocità dei cilindri dopo l'urto (univocamente determinate) dovrà valere

$$v_1 = -v_2$$

cioè anche dopo l'urto le velocità dovranno essere opposte tra loro. Inoltre per la conservazione del'energia dovra essere

$$v_1 = -v_2 = \pm\frac{v_0}{2}$$

Scartando la soluzione $v_1 = v_0/2$ (corrispondente ad assenza di urto) avremo, nel sistema di riferimento iniziale,

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= 0\\ \vec{v}_2 &= v_0\hat{e}_x\end{aligned}$$

cioè i due cilindri hanno scambiato tra loro le velocità.

Alternativamente si potrebbe ottenere la soluzione dalle equazioni del moto, come mostrato nella risposta alla quarta domanda.

Domanda 3

Consideriamo la variazione del momento angolare del cilindro inizialmente fermo, che dopo l'urto avrà una velocità angolare $\omega_2\hat{e}_z = -v_0/R\hat{e}_z$. Scegliendo come polo il punto di contatto con il suolo abbiamo

$$\Delta\vec{L}_2 = \left(I_2 + M_2R^2\right)\omega_2\hat{e}_z = -JR\hat{e}_z$$

dove $\vec{J} = J\hat{e}_x$ è l'impulso trasferito dal cilindro inizialmente in moto. Notare che $\vec{J}$ è diretto lungo l'asse x, data l'assenza di attrito tra i cilindri. Troviamo quindi

$$J = \left(M_2 + \frac{I_2}{R^2}\right)v_0$$

Da notare che se $I_2 \neq 0$ questa quantità è maggiore della variazione della quantità di moto del secondo cilindro, $\Delta \vec{P}_2 = M_2 v_0 \hat{e}_x$. La ragione è che al secondo cilindro viene ceduto impulso non solo dal primo, ma anche dalla reazione vincolare con il terreno. Questa è una ulteriore conferma che tale reazione è impulsiva.

Domanda 4

Il momento angolare del sistema rispetto ad un polo posto sul piano di appoggio si conserva. Infatti:

1. la reazione vincolare verticale su ciascun cilindro deve essere uguale e opposta alla sua forza peso, dato che i centri di massa non accelerano verticalmente;
2. dovunque sia posto il polo, le due forze uguali e opposte considerate precedentemente hanno lo stesso braccio (la forza peso è applicata al centro di massa che è sulla verticale del punto di appoggio). Quindi anche il loro momento si annulla;
3. le uniche altre forze esterne sono le componenti orizzontali delle reazioni vincolari, che hanno braccio nullo.

Abbiamo quindi che durante l'urto

$$\Delta \left(\vec{L}_1 + \vec{L}_2 \right) = 0$$

dove i momenti angolari dei due cilindro sono

$$\begin{aligned}
\vec{L}_i &= M_i \left(R\hat{e}_y \wedge v_i \hat{e}_x \right) + I_i \omega_i \hat{e}_z \\
&= -M_i R v_i \hat{e}_z + I_i \omega_i \hat{e}_z \\
&= -\left(M_i R^2 + I_i \right) \frac{v_i}{R} \hat{e}_z \\
&\equiv -I_i^* \frac{v_i}{R} \hat{e}_z
\end{aligned}$$

e dunque

$$-I_1^* \frac{v_0}{R} = -I_1^* \frac{v_1}{R} - I_2^* \frac{v_2}{R}$$

dove v_1 e v_2 sono le velocità del centro di massa dei cilindri dopo l'urto. D'altra parte per la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2} I_1^* \frac{v_0^2}{R^2} = \frac{1}{2} I_1^* \frac{v_1^2}{R^2} + \frac{1}{2} I_2^* \frac{v_2^2}{R^2}$$

In conclusione abbiamo le due relazioni

$$\begin{aligned}
v_0 - v_1 &= \frac{I_2^*}{I_1^*} v_2 \\
v_0^2 - v_1^2 &= \frac{I_2^*}{I_1^*} v_2^2
\end{aligned}$$

Scartando la soluzione non rilevante $v_1 = v_0$ e dividendo membro a membro la seconda equazione per la prima otteniamo

$$\begin{aligned} v_0 - v_1 &= \frac{I_2^*}{I_1^*} v_2 \\ v_0 + v_1 &= v_2 \end{aligned}$$

e risolvendo

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{2I_1^*}{I_1^* + I_2^*} v_0 \\ v_1 &= \frac{I_1^* - I_2^*}{I_1^* + I_2^*} v_0 \end{aligned}$$

Se i cilindri sono identici $I_1^* = I_2^*$ e ritroviamo la soluzione ottenuta nella risposta alla prima domanda con considerazioni di simmetria.

Domanda 5

Dalla soluzione al quesito precedente vediamo che deve essere $I_1^* = I_2^*$. Un esempio possibile è il seguente. Il primo cilindro ha una massa M_1 interamente concentrata sull'asse, quindi $I_1 = 0$ e $I_1^* = M_1 R^2$. Il secondo ha una densità di massa costante, e quindi

$$I_2^* = M_2 R^2 + \frac{1}{2} M_2 R^2$$

Scegliendo $M_1 = \frac{3}{2} M_2$ otteniamo la relazione voluta.

Soluzione secondo problema

Domanda 1

La trasformazione del gas è adiabatica e reversibile, e quindi

$$\begin{aligned} 0 &= (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2})\, dT + P dV \\ &= (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2})\, dT + (n_1 + n_2)\, RT \frac{dV}{V} \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{dT}{T} + \frac{(n_1 + n_2)\, R}{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}} \frac{dV}{V} = 0$$

Integrando otteniamo

$$\log T V^{\gamma - 1} = \text{costante}$$

con

$$\gamma - 1 = \frac{(n_1 + n_2)\, R}{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{n_1 c_{P1} + n_2 c_{P2}}{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}} \\ &= \frac{5n_1 + 7n_2}{3n_1 + 5n_2}\end{aligned}$$

Possiamo calcolare il lavoro W fatto sul sistema direttamente, dato che per una adiabatica

$$W = \Delta U = (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2})\,(T_1 - T_0)$$

dove T_1 è la temperatura finale e

$$T_0 V_0^{\gamma-1} = T_1 \left(\frac{V_0}{2}\right)^{\gamma-1}$$

Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned}W &= (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2})\left(2^{\gamma-1} - 1\right) T_0 \\ &= (n_1 + n_2) R T_0 \frac{2^{\gamma-1} - 1}{\gamma - 1}\end{aligned}$$

Domanda 2

Anche questo processo è adiabatico, e sul sistema non viene fatto lavoro. L'energia interna non cambia: detta T_2 la temperatura nel nuovo stato di equilibrio finale, avremo

$$(n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2})\,T_1 = (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2})\,T_2$$

cioè $T_1 = T_2$. La pressione nello scompartimento di sinistra sarà data da

$$P_L = \frac{n_1}{2} R T_1 \left(\frac{V_0}{2}\right)^{-1} = n_1 \frac{R T_0}{V_0} 2^{\gamma-1}$$

e in quello di destra da

$$P_R = \left(\frac{n_1}{2} + n_2\right) R T_1 \left(\frac{V_0}{2}\right)^{-1} = (n_1 + 2n_2)\,\frac{R T_0}{V_0} 2^{\gamma-1}$$

Notare che questa è la somma del contributo del gas monoatomico e di quello biatomico: quest'ultima vale

$$P_2 = n_2 \frac{R T_0}{V_0} 2^{\gamma}$$

Domanda 3

Si tratta nuovamente di una adiabatica. Considerando che il gas monoatomico continua a occupare l'intero volume e quindi non fa lavoro abbiamo dal primo principio

$$0 = (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2})\, dT + P_2 dV$$

dove V è il volume dello scompartimento a destra e P_2 la pressione del gas biatomico. Quindi

$$0 = (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2})\, dT + n_2 RT \frac{dV}{V}$$

e come in precedenza

$$TV^{\gamma'-1} = \text{costante}$$

dove

$$\begin{aligned}\gamma' &= \frac{n_1 c_{V1} + n_2 c_{P2}}{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}} \\ &= \frac{3n_1 + 7n_2}{3n_1 + 5n_2} = \gamma - \frac{2n_1}{3n_1 + 5n_2}\end{aligned}$$

Per la temperatura finale T_f abbiamo quindi (ricordare che $T_1 = T_2$)

$$T_1 \left(\frac{V_0}{2}\right)^{\gamma'-1} = T_f \left(V_0\right)^{\gamma'-1}$$

cioè

$$T_f = \frac{1}{2^{\gamma'-1}} T_1 = 2^{\gamma-\gamma'} T_0$$

e dato che il volume è invariato la variazione di entropia sarà

$$\begin{aligned}\Delta S &= (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}) \log \frac{T_f}{T_0} \\ &= (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}) \log \frac{2^{\gamma-1}}{2^{\gamma'-1}}\end{aligned}$$

Dato che $\gamma > \gamma'$ si ha, come ci si poteva aspettare, $\Delta S > 0$

$$\begin{aligned}\Delta S &= (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}) \frac{2n_1}{3n_1 + 5n_2} \log 2 \\ &= n_1 R \log 2\end{aligned}$$

Notare che questa è la variazione di entropia dell'espansione libera (da $V_0/2$ a V_0) del solo gas monoatomico. Questa è l'unica trasformazione irreversibile del processo.

Domanda 4

Il lavoro complessivo si ottiene come nella prima domanda da

$$\begin{aligned} W_{tot} = \Delta U &= (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}) (T_f - T_0) \\ &= (n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}) \left(\frac{2^{\gamma-1}}{2^{\gamma'-1}} - 1 \right) T_0 \\ &= \frac{1}{\gamma' - 1} \left(2^{\gamma-\gamma'} - 1 \right) n_2 R T_0 \end{aligned}$$

Chiaramente $W_{tot} > 0$, quindi complessivamente si è fatto sul sistema un lavoro positivo.

Se $n_1 = 0$ il gas monoatomico non è presente, quindi sia la compressione che l'espansione sono la stessa adiabatica reversibile percorsa nei due sensi. Deve quindi essere $W_{tot} = 0$. Questo si verifica direttamente dalla formula precedente, tenendo conto che nel caso considerato $\gamma = \gamma'$. Se $n_2 = 0$ il lavoro nella trasformazione di espansione si annulla, e il lavoro totale è solo quello fatto durante la compressione

$$W_{tot} = n_1 R T_0 \frac{2^{\gamma-1} - 1}{\gamma - 1}$$

con $\gamma = 5/3$.

Domanda 5

Per portare il sistema reversibilmente nello stato finale possiamo procedere in due passi:

1. con una compressione adiabatica reversibile portiamo la miscela di gas alla temperatura finale richiesta T_f. Per fare questo dovremo comprimere fino ad un volume V determinato da
$$T_0 V_0^{\gamma-1} = T_f V^{\gamma-1}$$
cioè
$$V = \left(\frac{T_0}{T_f} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_0 = 2^{\frac{\gamma'-\gamma}{\gamma-1}} V_0$$
Il lavoro fatto dalla miscela in questa fase è uguale a parte il segno al lavoro totale fatto nella trasformazione completa considerata alla domanda precedente,
$$L_1 = -W_{tot} = -\Delta U < 0$$
Notare che l'entropia della miscela non cambia in questa fase;

2. adesso con una espansione isoterma riportiamo il volume al valore iniziale. Il lavoro fatto in questa fase è
$$L_2 = Q_{ass} = -T_f \Delta S_s = T_f \Delta S$$
dove Q_{ass} è il calore assorbito dalla miscela (e ceduto dalla sorgente a temperatura T_f con la quale deve essere mantenuto l'equilibrio termodinamico), ΔS_s la variazione

di entropia della sorgente e ΔS quella della miscela ($\Delta S + \Delta S_s = 0$ dato che la trasformazione è reversibile).

In conclusione rispetto al lavoro $L_1 = -W_{tot}$ fatto dal gas nella trasformazione considerata precedentemente, abbiamo ottenuto un lavoro aggiuntivo

$$L_2 = T_f \Delta S$$

in accordo con la formula generale per l'energia non più utilizzabile $T_m \Delta S$, dato che serve una unica sorgente esterna e quindi $T_f = T_m$.

1.31. 15 gennaio 2016

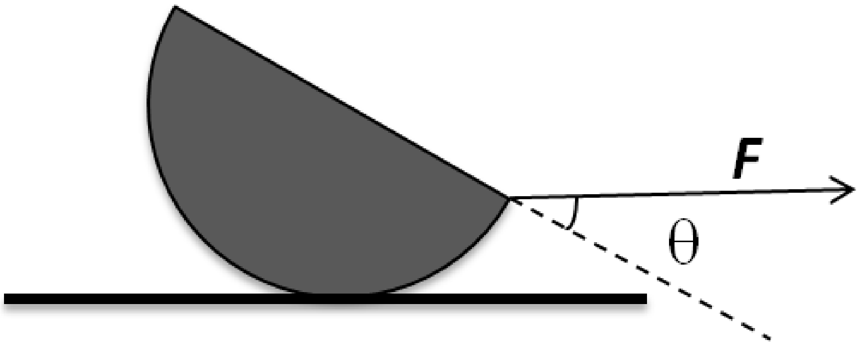


Figura 1.24.: La semisfera considerata nel primo problema.

Primo problema

Una semisfera uniforme, di massa m e raggio r, si trova appoggiata su un piano orizzontale ed è tirata da una forza orizzontale $\boldsymbol{F}$, di modulo incognito, applicata in un punto della circonferenza massima (come in Figura 1.24). In queste condizioni la semisfera si muove di velocità costante $\boldsymbol{v}$ senza oscillazioni, ma inclinata di un angolo incognito θ rispetto alla posizione che assume quando è ferma e nessuna forza esterna orizzontale è applicata. Il coefficiente di attrito dinamico tra semisfera e piano orizzontale vale $\mu_D = 1/4$. Il centro di massa della semisfera dista $3r/8$ dalla superficie piana della semisfera. Determinare:

1. la forza orizzontale responsabile del movimento della semisfera;
2. l'angolo θ di inclinazione della semisfera.
3. *(facoltativo)* Dimostrare che il centro di massa si trova a $3r/8$ dalla superficie piana della semisfera.

Secondo problema.

Un corpo C di massa m viene lanciato verticalmente verso l'alto con velocità iniziale $\boldsymbol{v}_0$. Giunto alla massima quota il corpo esplode in due frammenti C_1 e C_2 di masse $m_1 = m/4$ e $m_2 = 3m/4$. I due frammenti cadono e arrivano simultaneamente sulla superficie piana terrestre da cui era stato lanciato il corpo C. L'esplosione, che può essere considerata istantanea, fornisce ai due frammenti un'energia cinetica addizionale complessivamente pari a $mv_0^2/24$. Determinare:

1. i vettori velocità di C_1 e C_2 immediatamente dopo l'esplosione;
2. l'energia cinetica totale di C_1 e C_2 nell'istante in cui giungono sulla superficie piana terrestre;
3. la distanza tra le posizioni con cui C_1 e C_2 arrivano a terra.

Terzo problema

Un cilindro retto, rigido e adiabatico è diviso in due parti da un setto circolare di area A, anch'esso retto, rigido e adiabatico. Una parte, di volume V_1, contiene n_1 moli di gas ideale biatomico; l'altra parte, di volume V_2, contiene n_2 moli dello stesso gas. Inizialmente la pressione P delle due parti è la stessa ed il sistema si trova in equilibrio meccanico.

1. In tale condizione, si calcoli il rapporto fra le temperature T_1 e T_2 (si assuma nel seguito dell'esercizio che sia $T_1 > T_2$);

Rimanendo il setto bloccato in tale posizione, viene ad un certo punto meno la sua adiabaticità. Si calcolino, ad equilibrio raggiunto:

2. il modulo della forza vincolare che mantiene il setto bloccato;
3. la variazione di entropia del sistema.
4. Considerando ora il sistema nella sua configurazione iniziale, con setto adiabatico, determinare il massimo lavoro estraibile dal sistema usando un'opportuna macchina termica ciclica.

Soluzione primo problema

Usiamo un sistema di riferimento ortogonale con asse y verticale e rivolto verso l'alto, asse x orizzontale rivolto nel verso di $\boldsymbol{F}$.

Elenco delle forze che agiscono sulla semisfera:

- Forza peso verso il basso: $\boldsymbol{F}_p = -mg\boldsymbol{e}_y$
- Forza di sostegno verso l'alto esercitata dal piano orizzontale: $\boldsymbol{N} = mg\boldsymbol{e}_y$
- Forza di attrito orizzontale: $\boldsymbol{F}_a = -\mu_D N\boldsymbol{e}_x = -mg/4\boldsymbol{e}_x$
- Forza $\boldsymbol{F}$ di modulo incognito: $\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{e}_x$

Domanda 1

Poiché il moto è rettilineo uniforme, la forza risultante deve essere zero, da cui si trova $F = mg/4$.

Domanda 2

Il centro di massa del corpo si muove di moto rettilineo uniforme, e il corpo non ruota. Di conseguenza il suo momento angolare rispetto ad un polo fisso (qualsiasi) non cambia e il momento risultante di tutte le forze deve essere zero. Solo la componente z del momento e' non banale. Abbiamo una coppia di forze orizzontali (attrito e forza esterna)

$$\boldsymbol{M}_1 = -Fr\left(1-\sin\theta\right)\boldsymbol{e}_z = -\frac{1}{4}mgr\left(1-\sin\theta\right)\boldsymbol{e}_z$$

e una coppia di forze verticali (reazione normale del piano e forza peso)

$$\boldsymbol{M}_2 = \frac{3}{8} mgr \sin\theta \boldsymbol{e}_z$$

quindi il momento totale vale

$$\boldsymbol{M} = \left(\frac{5}{8} mgr \sin\theta - \frac{1}{4} mgr \right) \boldsymbol{e}_z$$

che si annulla se $\sin\theta = 2/5$. Quindi $\theta = \arcsin(2/5)$.

Domanda 3

Poniamo la semisfera con la faccia piana sul piano orizzontale (capovolta). La quantità di massa disponibile a una quota z sara‘ proporzionale, oltre a dz, al raggio al quadrato del cerchio orizzontale corrispondente: $A = \pi \left(r^2 - z^2\right)$; questo è il peso del contributo della variabile z. Abbiamo quindi

$$z_{CM} = \frac{\int_0^r Azdz}{\int_0^r Adz} = \frac{\int \pi \left(r^2 z - z^3\right) dz}{\int \pi \left(r^2 - z^2\right) dz} = \frac{\frac{1}{2} r^4 - \frac{1}{4} r^4}{r^3 - \frac{1}{3} r^3} = \frac{3}{8} r$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Al momento dell'esplosione il corpo era fermo, quindi eventuali componenti verticali di impulso sui due pezzi dovranno essere opposte, ma l'arrivo simultaneo a terra garantisce che ci siano solo le componenti orizzontali. Il centro di massa rimarrà sulla colonna verticale già percorsa in salita, quindi i vettori velocità $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ subito dopo l'esplosione saranno orizzontali e opposti in verso. In particolare, per lasciare il centro di massa nel punto in cui avviene l'esplosione, deve valere: $\boldsymbol{v}_1 = -3\boldsymbol{v}_2$. D'altra parte è nota l'energia cinetica addizionale, per cui:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{24} m v_0^2$$

Le due equazioni precedenti permettono di calcolare $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ orizzontali, eccetto la loro direzione. Eliminando v_1 dall'energia troviamo

$$\frac{9}{8} v_2^2 + \frac{3}{8} v_2^2 = \frac{1}{24} v_0^2$$

e quindi $v_2 = v_0/6$ e $v_1 = v_0/2$ con direzioni uguali e opposte.

Domanda 2

Quando i due pezzi arrivano al suolo, conservano le loro velocità orizzontali e riacquistano la componente verticale (cambiata di segno) di modulo v_0. L'energia cinetica totale vale quella iniziale più quella guadagnata nell'esplosione

$$E_c = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{24}mv_0^2 = \frac{13}{24}mv_0^2$$

Domanda 3

La velocità relativa tra le due componenti rimane costante e orizzontale:

$$v_{rel} = v_1 + v_2 = \frac{2}{3}v_0$$

Il tempo di caduta, partendo con velocità verticale nulla, è $t_c = v_0/g$. La distanza d tra le posizioni di arrivo è data semplicemente dal prodotto:

$$d = v_{rel}t_c = \frac{2}{3}\frac{v_0^2}{g}$$

Soluzione terzo problema

Domanda 1

Dall'equazione di stato troviamo

$$T_1 = \frac{PV_1}{n_1R}$$
$$T_2 = \frac{PV_2}{n_2R}$$

da cui

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{V_1}{V_1}\frac{n_2}{n_1}$$

Domanda 2

All'equilibrio, conservandosi l'energia interna, deve essere

$$\Delta U = n_1c_V\left(T_f - T_1\right) + n_2c_V\left(T_f - T_2\right)$$

da cui

$$T_f = \frac{n_1T_1 + n_2T_2}{n_1 + n_2}$$

e quindi

$$P_1 = \frac{n_1 R T_f}{V_1}$$
$$P_2 = \frac{n_2 R T_f}{V_2}$$

La forza vincolare necessaria a mantenere l'equilibrio sarà, in modulo,

$$|F| = A\,|P_2 - P_1| = ART_f \left|\frac{n_1}{V_1} - \frac{n_2}{V_2}\right|$$

Domanda 3

$$\begin{aligned}\Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 \\ &= n_1 c_V \ln \frac{T_f}{T_1} + n_2 c_V \ln \frac{T_f}{T_2}\end{aligned}$$

Domanda 4

Operando con una macchina reversibile arriveremo ad uno stato finale con una temperatura T_f^* comune ai due gas. Quindi

$$\Delta S = n_1 c_V \ln \frac{T_f^*}{T_1} + n_2 c_V \ln \frac{T_f^*}{T_2}$$

ma operando reversibilmente (per rendere massimo il lavoro estratto) avremo $\Delta S = 0$, e quindi

$$T_f^* = T_1^{\frac{n_1}{n_1+n_2}} T_2^{\frac{n_2}{n_1+n_2}}$$

La macchina termica avrà estratto dal corpo più caldo un calore

$$Q_1 = n_1 c_V \left(T_1 - T_f^*\right)$$

e ceduto al più freddo

$$Q_2 = n_2 c_V \left(T_f^* - T_2\right)$$

Il lavoro prodotto

$$W = Q_1 - Q_2 = n_1 c_V \left(T_1 - T_f^*\right) - n_2 c_V \left(T_f^* - T_2\right)$$

1.32. 4 febbraio 2016

Primo problema

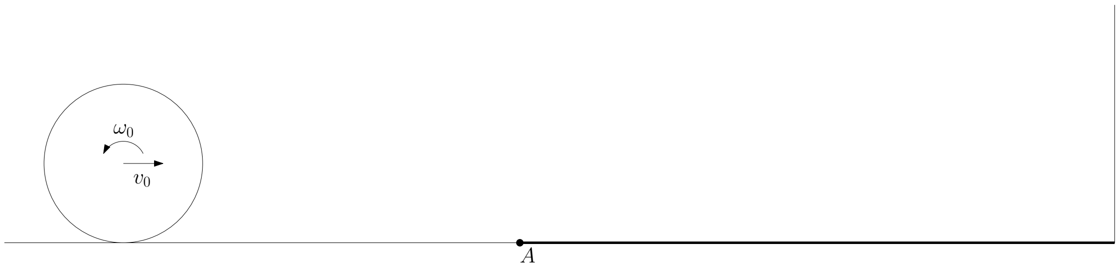


Figura 1.25.: Il cilindro sul piano orizzontale considerato nel problema.

Un cilindro omogeneo di massa m e raggio R viene lanciato su un piano orizzontale e privo di attrito con velocità del centro di massa iniziale v_0 e velocità angolare iniziale ω_0. Consideriamo positivi i versi di v_0 e ω_0 indicati in Figura 1.25. A destra di A il piano presenta notevole attrito (da assimilare a infinito) per cui il cilindro è vincolato a un moto di rotolamento puro.

1. Fissata la velocità v_0 determinare, se possibile, i valori ω_0 per i quali nel passaggio per A il moto traslatorio del cilindro si inverte.

2. Supponendo che inizialmente $\omega_0 = 0$, calcolare la variazione di energia nel passaggio dal lato sinistro al lato destro di A.

3. A destra di A si trova una parete verticale priva di attrito, sulla quale il cilindro rimbalza elasticamente. Al momento dell'urto con la parete, individuare punto di applicazione e direzione delle forze impulsive, sempre nel caso $\omega_0 = 0$.

4. Determinare l'impulso trasferito al cilindro dalla parete.

Secondo problema

Un cilindro provvisto di un pistone scorrevole contiene n moli di un gas perfetto monoatomico. Il gas viene sottoposto alla trasformazione ciclica quasistatica descritta in Figura 1.26.

1. Calcolare il volume V_C, e il lavoro che è necessario fornire per eseguire il ciclo.

2. Si dispone di una sorgente esterna alla temperatura T_B, che viene utilizzata per eseguire la trasformazione. L'adiabatica e l'isoterma sono reversibili. Per ottenere l'isocora, si pone il sistema nello stato A a contatto termico con la sorgente mediante una opportuna resistenza termica in modo che il calore fluisca molto lentamente. Calcolare l'aumento di entropia dell'universo dopo un ciclo.

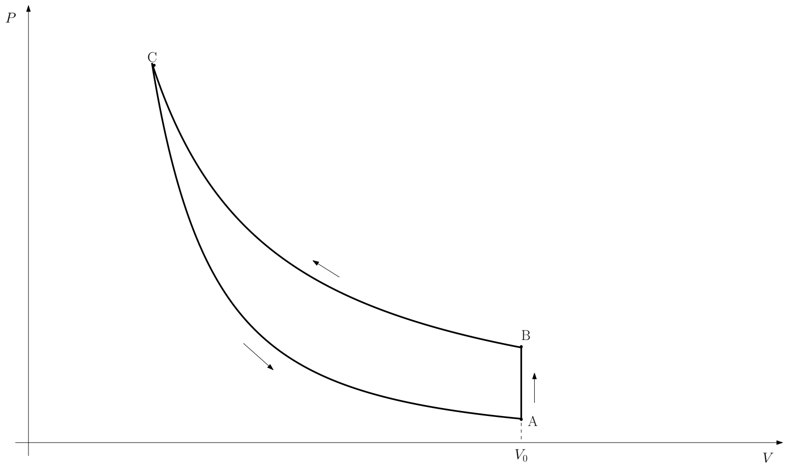


Figura 1.26.: La trasformazione termodinamica del problema. Dallo stato A (temperatura T_A e volume V_0), viene eseguita una trasformazione isocora fino allo stato B (temperatura T_B). Segue una compressione isoterma $B \to C$ e una compressione adiabatica $C \to A$. I parametri T_A, T_B e V_0 sono noti.

3. Si vuole adesso operare in modo reversibile. Per farlo si utilizza una macchina termica reversibile che utilizza il gas come sorgente fredda e la sorgente a temperatura T_B come sorgente calda per effettuare la trasformazione $A \to B$ in modo controllato. Calcolare il lavoro che è possibile ottenere dalla macchina termica in un ciclo.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Al momento del passaggio su A le uniche forze impulsive sono le reazioni vincolari applicate al punto di contatto. Di conseguenza si conserva il momento angolare rispetto al polo A. Possiamo dunque scrivere

$$-mv_0R + I\omega_0 = \left(I + mR^2\right)\omega$$

dove $I = mR^2/2$ è il momento di inerzia del cilindro rispetto all'asse passante per il centro di massa e ω la velocità angolare finale. Abbiamo scritto il momento angolare successivamente al contatto con A come momento di puro rotolamento attorno al punto di contatto e usato il teorema di Steiner. Segue che

$$\omega = \frac{I\omega_0 - mv_0R}{I + mR^2} \tag{1.32.1}$$

Il moto del cilindro si inverte se e solo se $\omega > 0$, data la condizione di puro rotolamento. Deve quindi essere

$$\omega_0 > \frac{mv_0R}{I} = \frac{2v_0}{R}$$

Domanda 2

Possiamo scrivere la variazione di energia nella forma

$$\Delta E = \frac{1}{2}m\left(v^2 - v_0^2\right) + \frac{1}{2}I\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)$$

dove v e ω sono le velocità del centro di massa e angolari dopo il passaggio su A. Usando la formula (1.32.1) troviamo

$$\omega = \frac{I\omega_0 - mv_0R}{I + mR^2}, \qquad v = -\omega R$$

e sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \frac{1}{2}m\left(v - v_0\right)\left(v + v_0\right) + \frac{1}{2}I\left(\omega - \omega_0\right)\left(\omega + \omega_0\right) \\
&= \frac{1}{2}m\left(R\frac{I\omega_0 - mv_0R}{I + mR^2} - v_0\right)\left(R\frac{I\omega_0 - mv_0R}{I + mR^2} + v_0\right) \\
&+ \frac{1}{2}I\left(\frac{I\omega_0 - mv_0R}{I + mR^2} - \omega_0\right)\left(\frac{I\omega_0 - mv_0R}{I + mR^2} + \omega_0\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{mI}{\left(I + mR^2\right)}\left(R\omega_0 + v_0\right)^2 \\
&= -\frac{1}{6}m\left(R\omega_0 + v_0\right)^2
\end{aligned}$$

Notare che la variazione dell'energia non è mai positiva, ed è proporzionale al quadrato della velocità del punto di contatto prima di A. In particolare $\Delta E = 0$ se il cilindro si trova inizialmente in una condizione di puro rotolamento. Ponendo $\omega_0 = 0$ troviamo il risultato cercato:

$$\Delta E = -\frac{1}{6}mv_0^2$$

Domanda 3

Dato che la velocità del centro di massa deve cambiare segno e che deve restare verificata la condizione di rotolamento puro

$$v = -\omega R$$

è necessario che anche la velocità angolare cambi segno. Quindi il momento angolare rispetto al centro di massa, negativo prima dell'urto, deve divenire positivo. Dato che la reazione della parete ha momento nullo rispetto al centro di massa del cilindro, la reazione nel punto di contatto deve avere una componente impulsiva orizzontale e diretta verso destra (il suo momento impulsivo deve essere positivo).

La forza impulsiva nel punto di contatto dovrebbe far aumentare la quantità di moto, che in realtà cambia segno. Quindi deve essere presente anche una reazione impulsiva orizzontale della parete, che dovrà essere diretta verso sinistra (e maggiore in valore assoluto di quella del punto di contatto).

Domanda 4

A destra di A abbiamo

$$\omega = -\frac{mv_0 R}{I + mR^2} = -\frac{2}{3}\frac{v_0}{R}$$

Scriviamo l'energia nella forma

$$E = \frac{1}{2}\left(I + mR^2\right)\omega^2$$

ma se l'urto è elastico questa si conserva, e quindi la velocità angolare cambia segno. La variazione del momento angolare rispetto ad un polo preso nel punto di contatto è

$$\Delta L = -2\left(I + mR^2\right)\omega$$

ma l'unica forza impulsiva con momento non nullo è la reazione della parete, quindi deve essere

$$-2\left(I + mR^2\right)\omega = -RJ$$

e quindi

$$J = \frac{2\left(I + mR^2\right)}{R}\left(-\frac{2}{3}\frac{v_0}{R}\right) = -2mv_0$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Lo stato C è collegato da una isoterma allo stato B e da una adiabatica allo stato A. Quindi

$$V_C T_B^{\frac{1}{\gamma-1}} = V_0 T_A^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

da cui

$$V_C = V_0\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = V_0\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Il lavoro da fornire è dato da

$$L = L_{C\to B} + L_{A\to C}$$

dove

$$\begin{aligned}
L_{C\to B} &= \int_{V_C}^{V_0} P dV = nRT_B \log\frac{V_0}{V_C} \\
L_{A\to C} &= nc_V\left(T_A - T_B\right)
\end{aligned}$$

da cui

$$L = \frac{3}{2}nR\left[T_B \log\frac{T_B}{T_A} - \left(T_B - T_A\right)\right]$$

Domanda 2

La variazione di entropia del gas è

$$\Delta S_{gas} = nc_V \log \frac{T_B}{T_A}$$

mentre quella della sorgente a temperatura T_B

$$\Delta S_B = -\frac{Q}{T_B} = -nc_V \frac{1}{T_B}(T_B - T_A)$$

e quindi

$$\Delta S = nc_V \left[\log \frac{T_B}{T_A} - \frac{1}{T_B}(T_B - T_A)\right] = \frac{L}{T_B}$$

Domanda 3

Detto Q_1 il calore fornito al gas e Q_2 quello sottratto alla sorgente alla temperatura T_B abbiamo dal primo principio

$$W = Q_2 - Q_1 = Q_2 - nc_V (T_B - T_A)$$

Per operare reversibilmente deve essere $\Delta S = 0$, quindi

$$\int_{T_A}^{T_B} \frac{nc_V dT}{T} - \frac{Q_2}{T_B} = 0$$

cioè

$$Q_2 = nc_V T_B \log \frac{T_B}{T_A}$$

e quindi

$$W = nc_V \left[T_B \log \frac{T_B}{T_A} - (T_B - T_A)\right] = L$$

1.33. 30 Maggio 2016

Problema 1

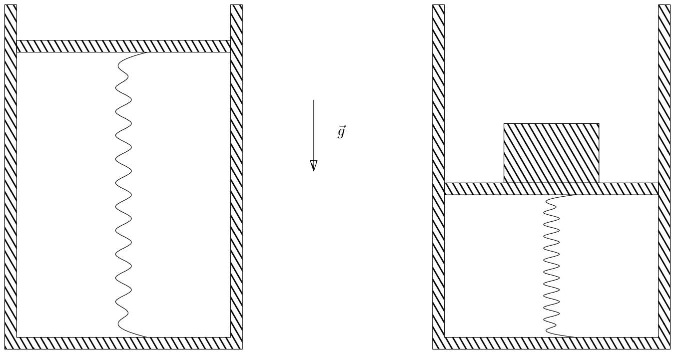


Figura 1.27.: Il recipiente cilindrico dl problema, nello stato di equilibrio iniziale e finale.

Un recipiente cilindrico, chiuso da un pistone scorrevole di sezione S e massa trascurabile, contiene una mole di un gas perfetto monoatomico e non permette trasmissione di calore. Una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla è fissata tra il fondo del recipiente e il pistone come in Figura 1.27. Inizialmente la temperatura del gas è T_0. All'esterno del recipiente c'è il vuoto.

1. Calcolare la pressione e il volume iniziale del gas.
2. Si pone una massa $M = g^{-1}\sqrt{kRT_0}$ sul pistone, e si attende il ristabilirsi dell'equilibrio termodinamico. Calcolare il volume finale del gas.
3. Considerando nuovamente il sistema nel suo stato iniziale, calcolare il massimo lavoro che è possibile ottenere avendo a disposizione una macchina termica e un bagno termico alla temperatura T_b.

Problema 2

Una guida parabolica liscia è descritta in coordinate cartesiane dall'equazione

$$y = \frac{x^2}{\ell}$$

dove ℓ è una costante positiva dalle opportune dimensioni. Una sbarretta sottile di lunghezza b e massa m è vincolata a muoversi con i due estremi fissati alla guida. Per descrivere la posizione della sbarretta si consiglia di utilizzare l'angolo θ che questa forma con la direzione orizzontale. Nel seguito interesserà il comportamento del sistema per $\theta \ll 1$.

1. Sotto quale condizione la posizione $\theta = 0$ è di equilibrio stabile?

2. Scrivere l'energia cinetica del sistema in funzione di una unica coordinata e della sua derivata.
3. Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione $\theta = 0$ se di equilibrio stabile.

Soluzione problema 2

Domanda 1

Dall'equilibrio meccanico del pistone troviamo

$$P = k\frac{V}{S^2}$$

e inoltre

$$PV = RT$$

da cui

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\frac{RS^2T}{k}} \\ P &= \sqrt{\frac{kRT}{S^2}} \end{aligned}$$

Ponendo $T = T_0$ otteniamo

$$\begin{aligned} V_0 &= \sqrt{\frac{RS^2T_0}{k}} \\ P_0 &= \sqrt{\frac{kRT_0}{S^2}} \end{aligned}$$

Domanda 2

Per la conservazione dell'energia del sistema gas+molla+massa abbiamo

$$U_0 = c_V T_f + \frac{k}{2}\frac{V_f^2}{S^2} + Mg\frac{V_f}{S}$$

con

$$\begin{aligned} U_0 &= c_V T_0 + \frac{k}{2}\frac{V_0^2}{S^2} + Mg\frac{V_0}{S} \\ &= \left(c_V + \frac{3}{2}R\right) T_0 \end{aligned}$$

Inoltre nello stato finale

$$P_f = k\frac{V_f}{S^2} + \frac{Mg}{S}$$

$$P_f V_f = k\left(\frac{V_f}{S}\right)^2 + Mg\frac{V_f}{S} = RT_f$$

Sostituendo troviamo, ponendo

$$x = \frac{V_f}{V_0} = \frac{V_f}{S}\sqrt{\frac{k}{RT_0}}$$

.

$$\left(\frac{c_V}{R} + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{c_V}{R} + 1\right)x = \left(\frac{c_V}{R} + \frac{3}{2}\right)$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado troviamo la soluzione positiva

$$x = \frac{-\gamma + \sqrt{4\gamma^2 + 2\gamma - 1}}{1+\gamma} = \frac{3}{4}$$

dove la seconda uguaglianza è valida per un gas monoatomico. In conclusione

$$V_f = \frac{3}{4}V_0$$

Domanda 3

Detti Q_1 e Q_2 i calori ceduti al sistema e al bagno termico abbiamo

$$W = -Q_1 - Q_2$$

Ma per il sistema il calore fornito è uguale alla variazione dell'energia. Quest'ultima all'equilibrio si può scrivere nella forma

$$U = c_V T + \frac{1}{2}k\frac{V^2}{S^2} = \left(c_V + \frac{R}{2}\right)T$$

e quindi

$$Q_1 = \left(c_V + \frac{R}{2}\right)(T_b - T_0)$$

Operando reversibilmente deve essere

$$\Delta S = \frac{Q_2}{T_b} + c_V \log\frac{T_b}{T_0} + R\log\frac{V_f}{V_0} = 0$$

12 ma dato che $V/S=\sqrt{RT/k}$ otteniamo

$$Q_2=-T_b\left(c_V+\frac{1}{2}R\right)\log\frac{T_b}{T_0}$$

e quindi

$$W=\left(c_V+\frac{1}{2}R\right)\left[T_b\log\frac{T_b}{T_0}-(T_b-T_0)\right]$$

Questa quantità non è mai negativa, infatti $W=0$ per $T_b=T_0$ come è ovvio, inoltre

$$\frac{dW}{dT_b}=\left(c_V+\frac{1}{2}R\right)\log\frac{T_b}{T_0}$$

quindi la W è crescente per $T_b>T_0$ e decrescente per $T_b<T_0$.

Soluzione problema 2

Domanda 1

Dette x_{cm}, y_{cm} le coordinate del centro di massa della sbarretta possiamo scrivere le coordinate degli estremi nella forma

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_{cm}-\frac{b}{2}\cos\theta\\
y_1 &= y_{cm}-\frac{b}{2}\sin\theta\\
x_2 &= x_{cm}+\frac{b}{2}\cos\theta\\
y_2 &= y_{cm}+\frac{b}{2}\sin\theta
\end{aligned}$$

Imponendo che questi si trovino sulla guida, abbiamo

$$\begin{aligned}
y_{cm}-\frac{b}{2}\sin\theta &= \frac{1}{\ell}\left(x_{cm}-\frac{b}{2}\cos\theta\right)^2\\
y_{cm}+\frac{b}{2}\sin\theta &= \frac{1}{\ell}\left(x_{cm}+\frac{b}{2}\cos\theta\right)^2
\end{aligned}$$

Svolgendo i calcoli troviamo

$$\begin{aligned}
y_{cm}-\frac{b}{2}\sin\theta &= \frac{1}{\ell}\left(x_{cm}^2+\frac{b^2}{4}\cos^2\theta-x_{cm}b\cos\theta\right)\\
y_{cm}+\frac{b}{2}\sin\theta &= \frac{1}{\ell}\left(x_{cm}^2+\frac{b^2}{4}\cos^2\theta+x_{cm}b\cos\theta\right)
\end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro troviamo

$$x_{cm} = \frac{\ell}{2}\tan\theta \simeq \frac{\ell}{2}\theta + O\left(\theta^3\right)$$

Sommando e sostituendo l'espressione precedente abbiamo infine

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \frac{1}{\ell}\left(x_{cm}^2 + \frac{b^2}{4}\cos^2\theta\right) \\ &= \frac{\ell}{4}\left(\tan^2\theta + \frac{b^2}{\ell^2}\cos^2\theta\right) \\ &\simeq \frac{\ell}{4}\left(\frac{b^2}{\ell^2} + \theta^2 - \frac{b^2}{\ell^2}\theta^2\right) + O\left(\theta^4\right) \end{aligned}$$

L'energia potenziale della sbarretta è, a meno di una costante,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4}Mg\ell y_{cm} \\ &\simeq \frac{1}{4}Mg\ell\left(1 - \frac{b^2}{\ell^2}\right)\theta^2 + O\left(\theta^4\right) \end{aligned}$$

ed ha un minimo per $\theta = 0$ quando $b < \ell$.

Domanda 2

L'energia cinetica della sbarretta si può scrivere nella forma

$$K = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_{cm}^2 + \dot{y}_{cm}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{M\ell^2}{12}\dot{\theta}^2$$

Derivando le coordinate del centro di massa rispetto al tempo troviamo

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cm} &\simeq \frac{\ell}{2}\dot{\theta} \\ \dot{y}_{cm} &\simeq 0 \end{aligned}$$

L'energia totale è quindi

$$E = \frac{1}{2}\frac{M\ell^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}Mg\ell\left(1 - \frac{b^2}{\ell^2}\right)\theta^2$$

Domanda 3

L'energia ottenuta precedentemente è quella di un oscillatore armonico con

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\left(1 - \frac{b^2}{\ell^2}\right)}$$

1.34. 27 Giugno 2016

Problema 1

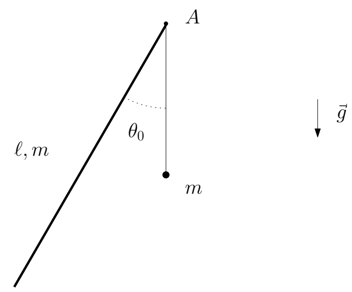


Figura 1.28.: La sbarra e il pendolo, nella configurazione iniziale.

Una sbarra sottile di massa m e lunghezza ℓ è vincolata ad un suo estremo in un punto A, attorno al quale è libera di girare. Sempre ad A è fissato un pendolo ideale di massa m e lunghezza $d < \ell$, come in Figura 1.28. Inizialmente il pendolo è in quiete nella sua posizione di equilibrio, e la sbarra è ferma ma inclinata rispetto alla verticale di un angolo θ_0. Si lascia libera la sbarra, che urta elasticamente la massa del pendolo.

1. Considerando noti i valori di θ_0, ℓ e m determinare d in modo che dopo l'urto la sbarra sia in quiete.
2. Calcolare l'angolo massimo di inclinazione raggiunto successivamente dal pendolo, assumendo per esso la lunghezza d precedentemente determinata.
3. Invece del pendolo si ha adesso una seconda asta di massa m e lunghezza $x\ell$. Detto θ_0^* il valore minimo di θ_0 al quale la seconda asta compie un giro completo, determinare la funzione $\theta_0^*(x)$.
4. Per quale valore di x l'angolo θ_0^* assume il valore minimo?

Problema 2

Un elastico di gomma si può descrivere da un punto di vista termodinamico utilizzando la tensione τ, la lunghezza ℓ e la temperatura T. Si sa che valgono le leggi

$$\tau(\ell, T) = \frac{a\ell T}{\ell_0}\left[1 - \left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^3\right]$$
$$U(\ell, T) = CT$$

dove a, C sono costanti dalle opportune dimensioni e ℓ_0 è la lunghezza dell'elastico in assenza di tensione. Supponendo che in assenza di tensione l'elastico si trovi ad una temperatura $T = T_0$

1. Determinare la capacità termica a tensione costante $\tau = \tau_0$ dell'elastico.

2. Supponendo che in assenza di tensione $T = T_0$ determinare $T(\ell)$ per una trasformazione adiabatica reversibile.

3. Partendo dallo stato A con $T = T_0$ e $\ell = \ell_0$ si esegue un ciclo reversibile operando le seguenti trasformazioni: espansione adiabatica fino ad uno stato B con $T = T_1 > T_0$, espansione isoterma fino ad uno stato C, trasformazione adiabatica fino ad uno stato D ed infine trasformazione isoterma fino allo stato iniziale. Rappresentare il ciclo nel piano $S - T$ e dire quale è la sua efficienza.

4. Rappresentare il ciclo nel piano $\ell - T$ (convenzione: ℓ è l'ascissa e T l'ordinata).

Domanda 1 Dalla conservazione dell'energia e del momento angolare rispetto al punto di sospensione, nell'ipotesi che l'asta si fermi, deve essere

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}md^2\omega^2$$
$$I\omega_0 = md^2\omega$$

dove ω_0 è la velocità angolare dell'asta prima dell'urto. Dividendo membro a membro la prima equazione iniziale per il quadrato della seconda si trova

$$\frac{1}{I} = \frac{1}{md^2}$$

e dato che $I = m\ell^2/3$ troviamo

$$d^2 = \frac{1}{3}\ell^2$$

Notare che in questo caso particolare la velocità angolare immediatamente dopo l'urto è uguale a quella immediatamente prima dell'urto:

$$\omega = \frac{I}{md^2}\omega_0 = \frac{\ell^2}{3d^2}\omega_0 = \omega_0$$

Domanda 2 Assumendo il valore di d determinato precedentemente, dalla conservazione dell'energia segue subito che

$$-mg\frac{\ell}{2}\cos\theta_0 - mgd = -mgd\cos\theta - mg\frac{\ell}{2}$$

e quindi

$$(1-\cos\theta) = \frac{\ell}{2d}(1-\cos\theta_0)$$

oppure

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\ell}{2d}}\sin\frac{\theta_0}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin\frac{\theta_0}{2}$$

Domanda 3 Dalla conservazione dell'energia e del momento angolare adesso abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}I\omega_0^2 &= \frac{1}{2}I\omega_1^2 + \frac{1}{2}I'\omega_2^2 \\ I\omega_0 &= I\omega_1 + I'\omega_2\end{aligned}$$

dove ω_1 è la velocità della prima asta immediatamente dopo l'urto, ω_2 quella della seconda. Risolvendo troviamo

$$\begin{aligned}I\left(\omega_0-\omega_1\right)\left(\omega_0+\omega_1\right) &= I'\omega_2^2 \\ I\left(\omega_0-\omega_1\right) &= I'\omega_2\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\left(\omega_0+\omega_1\right) &= \omega_2 \\ I\left(\omega_0-\omega_1\right) &= \frac{I'}{I}\omega_2\end{aligned}$$

Risolvendo troviamo

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{I'-I}{I'+I}\omega_0 \\ \omega_2 &= \frac{2I}{I+I'}\omega_0\end{aligned}$$

Affinché la seconda asta faccia un giro completo è necessario che

$$\frac{1}{2}I'\omega_2^2 > mgd$$

ossia

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 > mgd\frac{\left(I+I'\right)^2}{4II'}$$

D'altra parte l'energia cinetica della prima asta immediatamente prima dell'urto vale

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = mg\frac{\ell}{2}\left(1-\cos\theta_0\right)$$

e quindi deve essere

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\theta_0^*}{2} &= \frac{d}{\ell}\frac{\left(I+I'\right)^2}{4II'} \\ &= \frac{\left(x^2+1\right)^2}{4x} = \frac{1}{4}\left(x^3+2x+\frac{1}{x}\right)\end{aligned} \tag{1.34.1}$$

Domanda 4 Derivando l'espressione (1.34.1) rispetto a x troviamo la condizione per il minimo valore dell'angolo

$$3x^4 + 2x^2 - 1 = 0$$

e quindi

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Il valore del minimo è

$$\sin^2 \frac{\theta_0^*}{2} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

cioè $\theta_0^* \simeq 122.7°$.

Problema 2

Domanda 1 Dal primo principio troviamo

$$dQ = dU - \tau d\ell = CdT - \tau \left(\frac{\partial \ell}{\partial T} \right)_\tau dT$$

e quindi

$$C_\tau = C - \tau \left(\frac{\partial \ell}{\partial T} \right)_\tau$$

Per calcolare la derivata possiamo scrivere

$$T = \frac{\tau_0}{a} \frac{1}{\left[\frac{\ell}{\ell_0} - \left(\frac{\ell_0}{\ell} \right)^2 \right]}$$

da cui

$$\left(\frac{\partial \ell}{\partial T} \right)_\tau = \left(\frac{\partial T}{\partial \ell} \right)_\tau^{-1} = -\frac{a\ell_0}{\tau_0} \frac{\left[1 - \left(\frac{\ell}{\ell_0} \right)^3 \right]^2}{\left(\frac{\ell}{\ell_0} \right) \left[2 + \left(\frac{\ell}{\ell_0} \right)^3 \right]}$$

Quindi

$$C_\tau = C + a\ell_0 \frac{\left[1 - \left(\frac{\ell}{\ell_0} \right)^3 \right]^2}{\left(\frac{\ell}{\ell_0} \right) \left[2 + \left(\frac{\ell}{\ell_0} \right)^3 \right]}$$

Domanda 2 Ponendo $dQ = 0$ nell'espressione del primo principio troviamo

$$CdT = \tau d\ell$$

e quindi

$$\frac{dT}{T} = \frac{a\ell}{C\ell_0}\left[1 - \left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^3\right] d\ell$$

Integrando otteniamo

$$\log\frac{T}{T_0} = \frac{a\ell_0}{C}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^2 + \left(\frac{\ell_0}{\ell}\right) - \frac{3}{2}\right]$$

e quindi

$$T = T_0 \exp\left\{\frac{a\ell_0}{C}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^2 + \left(\frac{\ell_0}{\ell}\right) - \frac{3}{2}\right]\right\}$$

Notiamo che la funzione $T(\ell)$ ha un minimo quando

$$\frac{\ell}{\ell_0} - \left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^2 = 0$$

cioè per $\ell = \ell_0$.

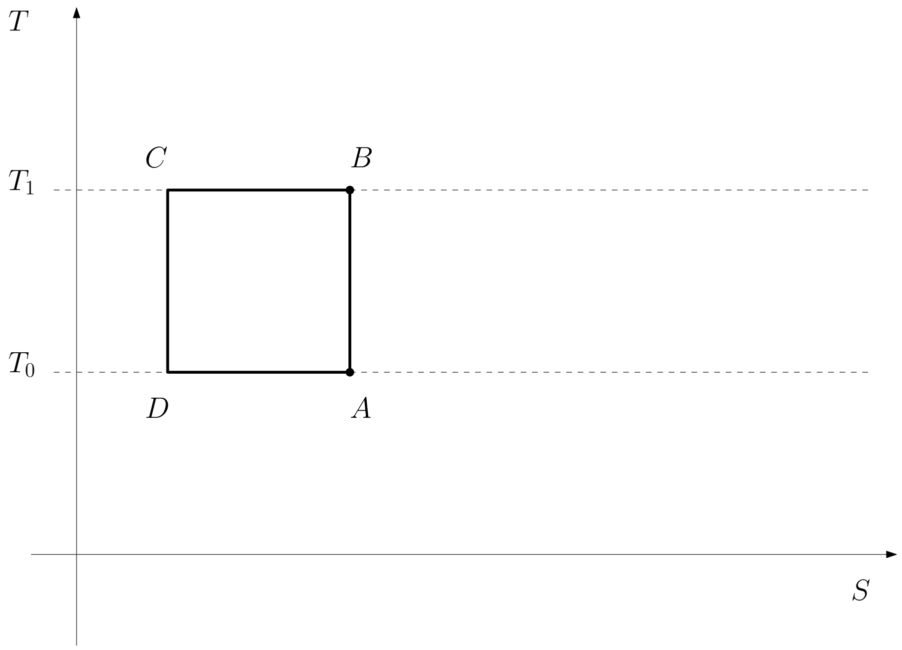


Figura 1.29.: Il ciclo rappresentato nel piano $S-T$. Notare che per ottenere lavoro positivo il verso di percorrenza deve essere invertito rispetto a quello indicato.

Domanda 3 Il ciclo è un ciclo di Carnot, quindi si rappresenta nel piano $S - T$ come un rettangolo, come in Figura (1.29). Il rendimento è quindi

$$\eta = 1 - \frac{T_0}{T_1}$$

Il verso di percorrenza si determina osservando che in una espansione isoterma

$$dS = \frac{dQ}{T} = -\frac{\tau d\ell}{T}$$

e quindi l'entropia diminuisce (per $\tau > 0$): l'elastico cede calore.

Domanda 4 Il ciclo si rappresenta nel piano $\ell - T$ notando che le isoterme sono rette orizzontali, e le adiabatiche corrispondono alla funzione $T(\ell)$ determinata precedentemente. Il grafico è riportato qualitativamente in Figura (1.30)

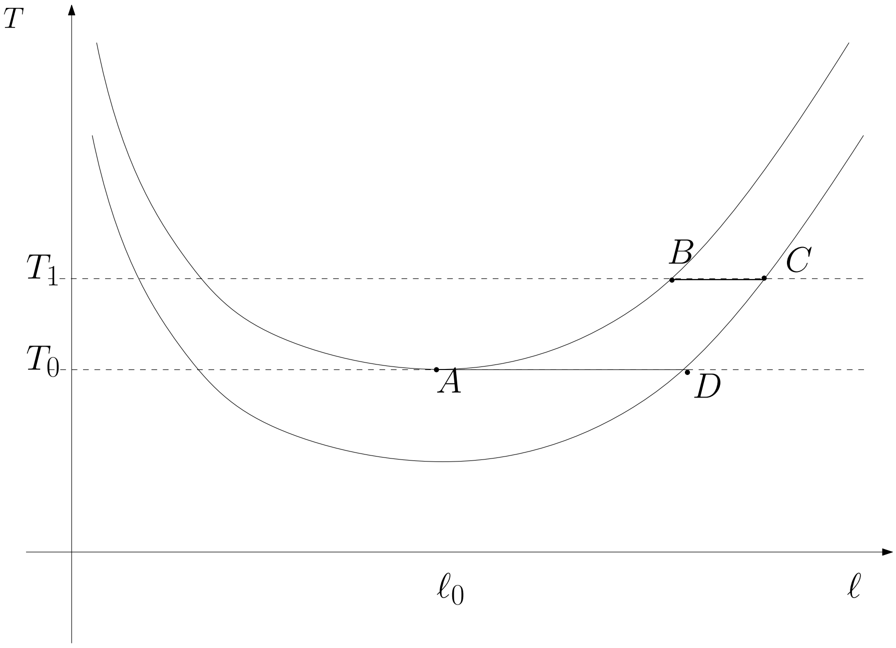


Figura 1.30.: Il ciclo considerato nel piano $\ell - T$.

1.35. 23 Settembre 2016

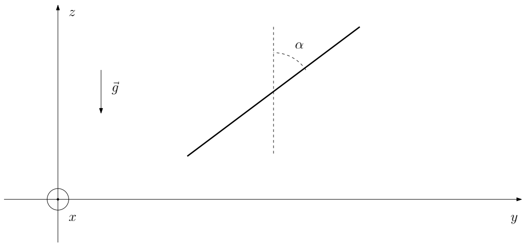


Figura 1.31.: L'asta in caduta libera.

Esercizio 1 Un'asta di massa m, lunghezza ℓ e momento di inerzia I si trova inizialmente in caduta verticale sotto l'azione di una forza gravitazionale costante $\vec{F} = -mg\hat{z}$. La massa non è distribuita uniformemente, ma il centro di massa si trova comunque nel punto medio dell'asta. Durante la caduta l'asta non ruota, e si trova nel piano $x = 0$, formando con la verticale un angolo α. Ad un certo istante un estremo dell'asta urta il piano rigido $z = 0$, ed in quel momento la velocità del centro di massa dell'asta è $\vec{v}_{cm} = -v_0\hat{z}$. Salvo che per l'ultima delle domande che seguono si può considerare l'urto elastico.

1. Calcolare la velocità angolare ω dell'asta dopo l'urto.
2. Come deve essere distribuita la massa sull'asta in modo da rendere minima in modulo ω?
3. Per quali valori di α, se esistono, il centro di massa è fermo immediatamente dopo l'urto?
4. Calcolare l'impulso applicato dal piano all'asta durante l'urto.
5. Se l'estremo che urta il piano resta vincolato ad esso, con l'asta libera di ruotare, quanto vale la velocità angolare dell'asta immediatamente dopo l'urto?

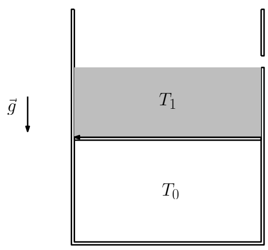


Figura 1.32.: Il recipiente descritto nell'esercizio, nella configurazione iniziale in presenza del foro.

Esercizio 2 Un recipiente cilindrico di sezione S è diviso in due scomparti da un setto mobile. Nello scomparto inferiore si trova una mole di un gas perfetto monoatomico, in quello superiore una massa m di liquido di densità ρ. Sia il recipiente che il setto non permettono il passaggio di calore. Sul liquido agisce la pressione atmosferica P_a.

Sapendo che il sistema è inizialmente in equilibrio, che il gas si trova ad una temperatura T_0 e il liquido ad una temperatura T_1

1. Calcolare il volume occupato dal gas.

2. Calcolare il lavoro massimo che è possibile estrarre dal sistema con una macchina termica ciclica che utilizzi il gas e il liquido come sorgenti. Si consideri costante la capacità termica del liquido C, e si trascurino gli scambi di calore tra questo e l'atmosfera.

3. Se nello scomparto superiore è praticato un foro laterale, all'altezza del livello iniziale del liquido, calcolare il calore minimo necessario da fornire al gas per far fuoriuscire tutto il liquido.

Soluzioni

Domanda 1.1 Si conserva la quantità di moto orizzontale, il momento angolare rispetto al punto di contatto e l'energia. Quindi

$$
\begin{aligned}
0 &= mv_x \\
-mv_0\frac{\ell}{2}\sin\alpha &= mv_y\frac{\ell}{2}\sin\alpha - mv_x\frac{\ell}{2}\cos\alpha + I\omega \\
\frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}m\left(v_x^2+v_y^2\right)+\frac{1}{2}I\omega^2
\end{aligned}
$$

Da cui $v_x = 0$ e

$$
\begin{aligned}
v_0^2 - v_y^2 &= \frac{I\omega^2}{m} \\
v_0 + v_y &= -\frac{2I\omega}{m\ell\sin\alpha}
\end{aligned}
$$

Dividendo membro a membro otteniamo

$$
v_0 - v_y = -\frac{\ell\omega\sin\alpha}{2} \tag{1.35.1}
$$

$$
v_0 + v_y = -\frac{2I\omega}{m\ell\sin\alpha} \tag{1.35.2}
$$

e sommando membro a membro troviamo

$$
\omega = -\frac{4v_0}{\ell}\frac{\sin\alpha}{\sin^2\alpha+\frac{4I}{m\ell^2}}
$$

Domanda 1.2 Per rendere minimo in modulo ω si deve avere il più grande valore possibile di I compatibile con i vincoli del problema. Quindi si deve distribuire la massa sugli estremi, metà per parte per avere il centro di massa nel punto medio dell'asta. In questo caso

$$I = m\frac{\ell^2}{4}$$

e quindi

$$\omega = -\frac{4v_0}{\ell}\frac{\sin\alpha}{\sin^2\alpha + 1}$$

Domanda 1.3 Ponendo $v_y = 0$ nelle equazioni precedenti abbiamo

$$\begin{aligned} v_0 &= -\frac{\ell\omega\sin\alpha}{2} \\ v_0 &= -\frac{2I\omega}{m\ell\sin\alpha} \end{aligned}$$

e dividendo membro a membro ($\sin\alpha \neq 0$) troviamo

$$\sin^2\alpha = \frac{4I}{m\ell^2} < 1$$

Il caso $I = 0$ va trattato a parte, e si vede immediatamente che non ammette soluzioni.

Domanda 1.4 Calcoliamo la velocità del centro di massa dopo l'urto, sottraendo membro a membro le equazioni (1.35.1) e (1.35.2):

$$\begin{aligned} v_y &= \left(\frac{m\ell^2\sin^2\alpha - 4I}{4m\ell\sin\alpha}\right)\omega \\ &= -v_0\frac{\sin^2\alpha - \frac{4I}{m\ell^2}}{\sin^2\alpha + \frac{4I}{m\ell^2}} \end{aligned}$$

Dato che l'impulso trasferito è uguale alla variazione della quantità di moto del sistema

$$\begin{aligned} J &= -mv_0\frac{\sin^2\alpha - \frac{4I}{m\ell^2}}{\sin^2\alpha + \frac{4I}{m\ell^2}} + mv_0 \\ &= \left(\frac{\frac{4I}{m\ell^2}}{\sin^2\alpha + \frac{4I}{m\ell^2}}\right)2mv_0 \end{aligned}$$

Domanda 1.5 In questo caso l'unica quantità conservata è il momento angolare rispetto al punto di contatto. Quindi

$$-mv_0\frac{\ell}{2}\sin\alpha = \left(I + m\frac{\ell^2}{4}\right)\omega$$

da cui

$$\omega = -\frac{\frac{2v_0}{\ell}}{1+\frac{4I}{m\ell^2}}\sin\alpha$$

Domanda 2.1 La pressione è data da

$$P_0 = \frac{mg}{S} + P_a$$

e quindi

$$V_0 = \frac{RT_0}{\frac{mg}{S} + P_a}$$

Domanda 2.2 Durante la trasformazione il gas rimane a pressione costante. Detto dQ_1 il calore ad esso fornito e dQ_2 quello fornito al liquido potremo scrivere il lavoro prodotto dalla macchina come

$$dW = -dQ_1 - dQ_2$$

ma

$$dQ_1 = c_P dT$$

Per il liquido

$$dQ_2 = dU + P_2 S d\ell_2 - P_1 S d\ell_1$$

dove P_2 è la pressione alla superficie superiore e P_1 quella alla superficie inferiore, ℓ_2 e ℓ_1 i corrispondenti livelli. Ma dato che $P_2 - P_1 = -mg/S$ e $dU = CdT + mgdh$, dove $h = (\ell_1 + \ell_2)/2$, abbiamo ($d\ell_2 = d\ell_1 = dh = dV/S$)

$$\begin{aligned} dQ_2 &= CdT + (mg + P_2 S - P_1 S)\frac{dV}{S} \\ &= CdT \end{aligned}$$

Integrando fino alla temperatura finale abbiamo

$$W = c_P (T_0 - T_f) + C(T_1 - T_f)$$

Per determinare la temperatura finale imponiamo la reversibilità. Abbiamo

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dQ_1}{T} + \frac{dQ_2}{T'} \\ &= C\frac{dT'}{T'} + c_P\frac{dT}{T} = 0 \end{aligned}$$

e integrando troviamo

$$T_f = T_1^{\frac{C}{C+c_P}} T_0^{\frac{c_P}{C+c_P}}$$

Domanda 2.3 Dal primo principio applicato al gas abbiamo

$$dQ = c_V dT + PdV$$

Ma la pressione del gas è funzione del suo volume:

$$P = P_a + \rho g h$$

L'altezza del liquido è una funzione lineare del volume del gas

$$h = \frac{P_0 - P_a}{\rho g} - \frac{V - V_0}{S}$$

e quindi

$$dQ = c_V dT + \left(P_0 - \rho g \frac{V - V_0}{S}\right) dV$$

Integrando otteniamo

$$\begin{aligned} Q &= c_V \left(T^* - T_0\right) + P_0 \Delta V - \frac{\rho g}{2S} \Delta V^2 \\ &= c_V \left(T^* - T_0\right) + \left(\frac{mg}{S} + P_a\right) \Delta V - \frac{\rho g}{2S} \Delta V^2 \end{aligned}$$

dove ΔV è il volume del liquido

$$\Delta V = \frac{m}{\rho}$$

La temperatura finale del gas è data da

$$T^* = \frac{P_a \left(V_0 + \Delta V\right)}{R}$$

Quindi

$$Q = \frac{m}{\rho} \left(\frac{c_V}{R} + 1\right) P_a - \frac{c_V T_0}{1 + \frac{S P_a}{mg}} + \frac{m^2 g}{2 \rho S}$$

1.36. 16 Gennaio 2017

Primo problema (15 punti)

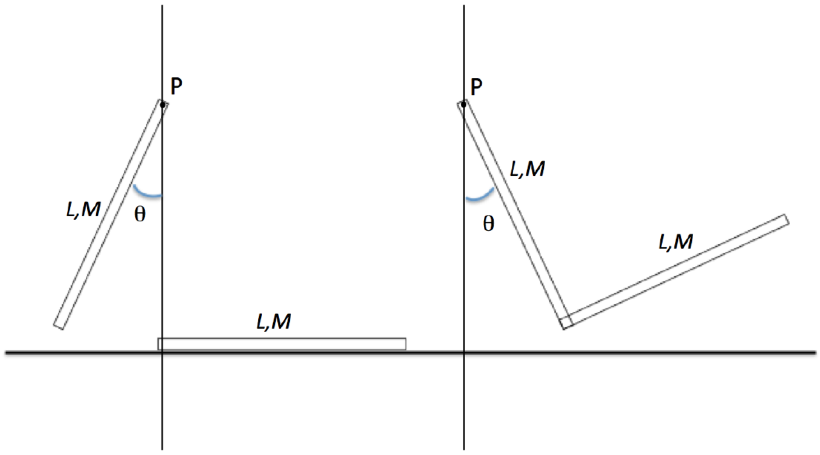


Figura 1.33.: Le aste prima dell'urto (a sinistra) e la struttura a L (a destra).

Un'asta omogenea di lunghezza L e massa M è appesa per un estremo e può oscillare liberamente.

Quando arriva nella posizione verticale il suo estremo libero si incastra nell'estremo di un'altra sbarra della stessa lunghezza e massa, inizialmente orizzontale, formando con esse un profilo rigido a forma di L. Il piano orizzontale sul quale appoggiava la seconda sbarra viene rimosso e da quel momento la struttura è libera di oscillare.

1. Se la prima asta parte dalla posizione orizzontale, quale è la velocità angolare con la quale il profilo ad L si mette in moto subito dopo l'urto?

2. Trovare il valore assoluto massimo raggiunto dall'angolo θ (definito in Figura 1.33) durante il moto successivo.

3. Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni del sistema rispetto alla sua posizione di equilibrio stabile.

Secondo problema (15 punti)

Un recipiente munito di pistone scorrevole contiene n moli di un gas perfetto monoatomico, ed una massa M di ghiaccio ad una temperatura iniziale $T_0 < T_f$, dove T_f è la temperatura di fusione. Ghiaccio e gas sono in equilibrio termodinamico, e la pressione del gas è P_0. Recipiente e pistone sono impermeabili al calore.

1. Si fa compiere al sistema una compressione adiabatica reversibile, che viene interrotta non appena tutto il ghiaccio si è sciolto. Calcolare il lavoro fatto sul sistema e la pressione finale.

2. Partendo dalla stessa condizione iniziale si applica bruscamente una forza esterna al pistone, che viene scelta in modo tale da raggiungere uno stato finale di equilibrio dove $T = T_f$ e tutto il ghiaccio si è sciolto. Calcolare la pressione finale.

3. Nei due casi considerati calcolare la variazione di entropia del sistema.

Soluzioni

Domanda 1.1 Dato che durante l'urto l'unica forza impulsiva esterna è la reazione vincolare in P, si conserva il relativo momento angolare. La velocità angolare dell'asta libera immediatamente prima dell'urto si trova utilizzando la conservazione dell'energia:

$$0 = \frac{1}{2}I\omega_1^2 - Mg\frac{L}{2}$$

dove $I = ML^2/3$ è il momento di inerzia di questa rispetto a P. Quindi

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Il momento angolare prima dell'urto è

$$L_1 = I\omega_1 = \sqrt{\frac{gM^2L^3}{3}}$$

e dopo l'urto

$$L_2 = I_L\omega_2$$

dove $I_L = I + I'$ è il momento di inerzia della struttura ad L. Utilizzando il teorema di Steiner calcoliamo il momento di inerzia della seconda sbarra, sempre rispetto a P,

$$I' = M\frac{L^2}{12} + M\left(\frac{L^2}{4} + L^2\right) = \frac{4}{3}ML^2$$

da cui

$$I_L = \frac{5}{3}ML^2$$

Ponendo $L_1 = L_2$ otteniamo infine

$$\omega_2 = \frac{I}{I_L}\omega_1 = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Domanda 1.2 Applicando la conservazione dell'energia dopo l'urto otteniamo

$$\frac{1}{2}I_L\omega_2^2 - Mg\frac{L}{2} - MgL = -Mg\frac{L}{2}\cos\theta + Mg\left[-L\cos\theta + \frac{L}{2}\sin\theta\right]$$

da cui

$$\frac{1}{5} = 3 - 3\cos\theta + \sin\theta$$

Ponendo $t = \tan\frac{\theta}{2}$ otteniamo

$$\frac{29}{5}t^2 + 2t - \frac{1}{5} = 0$$

e quindi le due soluzioni

$$t = \frac{1}{29}\left(-5 \pm 3\sqrt{6}\right)$$

La soluzione negativa è quella in valore assoluto maggiore, e corrisponde al valore di θ cercato, che viene raggiundo quando la struttura si ferma per la seconda volta. L'angolo corrispondente è

$$\theta = 2\arctan t = -0.26\pi$$

L'altra soluzione corrisponde al valore raggiunto la prima volta che la struttura si ferma, e vale

$$\theta = 0.05\pi$$

Domanda 1.3 Utilizzando l'espressione precendente dell'energia scritta per un angolo generico

$$E = \frac{1}{2}I_L\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}MgL\left(\sin\theta - 3\cos\theta\right)$$

troviamo il valore di θ corrispondente alla posizione di equilibrio stabile, che corrisponde al minimo dell'energia potenziale

$$U(\theta) = \frac{1}{2}MgL\left(\sin\theta - 3\cos\theta\right)$$

cioè alla soluzione di

$$\frac{dU}{d\theta} = \frac{1}{2}MgL\left(\cos\theta + 3\sin\theta\right) = 0$$

ossia

$$\tan\theta_0 = -\frac{1}{3}$$

Introduciamo adesso una nuova coordinata, corrispondente a una piccola variazione rispetto alla posizione di equilibrio:

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon$$

In termini di questa il potenziale si scrive

$$U = \frac{1}{2}MgL\left[\sin\left(\theta_0+\varepsilon\right) - 3\cos\left(\theta_0+\varepsilon\right)\right]$$

ed espandendo al secondo ordine troviamo

$$U = \frac{1}{2}MgL\left[-\frac{1}{2}\sin\left(\theta_0\right) + \frac{3}{2}\cos\left(\theta_0\right)\right]\varepsilon^2$$

$$U = \frac{1}{2}MgL\left[\sin\theta_0 + \varepsilon\cos\theta_0 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\sin\theta_0 - 3\cos\theta_0 + 3\varepsilon\sin\theta_0 + \frac{3}{2}\varepsilon^2\cos\theta_0 + o\left(\varepsilon^2\right)\right]$$

Il termine lineare in ε si annulla nella posizione di equilibrio e a meno di una costante irrilevante otteniamo

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}MgL\left[\frac{3}{2}\cos\theta_0 - \frac{1}{2}\sin\theta_0\right]\varepsilon^2 \\ &= \frac{1}{2}MgL\left[\frac{\frac{3}{2}\cos\theta_0 - \frac{1}{2}\sin\theta_0}{\sqrt{\cos^2\theta_0+\sin^2\theta_0}}\right]\varepsilon^2 \\ &= \frac{1}{2}MgL\left[\frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\tan\theta_0}{\sqrt{1+\tan^2\theta_0}}\right]\varepsilon^2 \\ &= \frac{1}{2}MgL\sqrt{\frac{5}{2}}\varepsilon^2 \end{aligned}$$

L'energia nella approssimazione di piccole oscillazioni si scrive quindi

$$E = \frac{1}{2}I_L\dot{\varepsilon}^2 + \frac{1}{2}MgL\sqrt{\frac{5}{2}}\varepsilon^2$$

e corrisponde ad un oscillatore armonico di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{MgL}{I_L}\sqrt{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{\sqrt{10}}\frac{g}{L}}$$

Lo stesso risultato si poteva ottenere direttamente osservando che abbiamo a che fare con un pendolo fisico con momento di inerzia I_L, massa totale $2M$ e distanza tra punto di sospensione e centro di massa uguale a

$$d = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}L$$

Di conseguenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2Mgd}{I_L}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{\sqrt{10}}\frac{g}{L}}$$

Domanda 2.1 Il lavoro fatto sul sistema corrisponde alla variazione della sua energia interna, dato che la trasformazione è adiabatica. Quindi

$$W = (nc_V + Mc)(T_f - T_0) + \lambda M$$

dove λ è il calore latente di fusione.

Per una trasformazione adiabatica $dQ = 0$. Fino a quando non viene raggiunta la temperatura di fusione si ha

$$0 = (nc_V + Mc)\, dT + PdV$$

ed usando la legge dei gas perfetti

$$0 = (nc_V + Mc)\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V}$$

Integrando otteniamo

$$(nc_V + Mc)\log\frac{T_f}{T_0} + nR\log\frac{V_1}{V_0} = 0$$

oppure, in termini del rapporto tra le pressioni,

$$(nc_P + Mc)\log\frac{T_f}{T_0} + nR\log\frac{P_0}{P_1} = 0$$

dove P_1 e V_1 sono i valori della pressione e del volume quando il ghiaccio inizia a sciogliersi. Quindi

$$P_1 = P_0\left(\frac{T_f}{T_0}\right)^{\Gamma}$$

dove

$$\Gamma = \frac{nc_P + Mc}{nR}$$

Durante lo scioglimento del ghiaccio il gas subisce una trasformazione isoterma. Il lavoro fatto dal gas deve quindi essere uguale al calore ceduto al ghiaccio:

$$\int PdV = -\lambda M$$

quindi, dato che

$$dV = -\frac{nRT_f}{P^2}dP$$

abbiamo

$$nRT_f\int_{P_1}^{P_2}\frac{dP}{P} = \lambda M$$

ossia

$$P_2 = P_1 e^{\frac{\lambda M}{nRT_f}}$$

dove P_2 è la pressione finale cercata. In conclusione

$$P_2 = P_0 \left(\frac{T_f}{T_0}\right)^{\Gamma} e^{\frac{\lambda M}{nRT_f}}$$

Domanda 2.2 Il volume iniziale è

$$V_0 = \frac{nRT_0}{P_0}$$

e detto V' il volume finale, abbiamo un lavoro fatto sul sistema uguale a

$$W = P' \left(V_0 - V'\right)$$

dove P' è la pressione finale, legata alla forza esterna applicata. Questo deve essere uguale alla variazione dell'energia interna, e quindi

$$P' \left(V_0 - V'\right) = (nc_V + cM)(T_f - T_0) + \lambda M$$

Utilizzando la legge dei gas perfetti troviamo

$$nRP' \left(\frac{T_0}{P_0} - \frac{T_f}{P'}\right) = (nc_V + cM)(T_f - T_0) + \lambda M$$

e risolvendo otteniamo la pressione finale

$$P' = P_0 \left[\left(\frac{nc_V + cM}{nR}\right)\left(\frac{T_f}{T_0} - 1\right) + \frac{\lambda M}{nRT_0} + \frac{T_f}{T_0}\right]$$

Domanda 2.3 Nel primo caso la variazione di entropia è nulla, dato che il sistema compie una trasformazione adiabatica reversibile. Nel secondo caso abbiamo

$$\Delta S = \Delta S_{gas} + \Delta S_{ghiaccio}$$

dove

$$\begin{aligned}
\Delta S_{gas} &= nc_V \log \frac{T_f}{T_0} + nR \log \frac{V'}{V_0} \\
&= nc_V \log \frac{T_f}{T_0} + nR \log \frac{T_f}{T_0}\frac{P_0}{P'} \\
&= nc_p \log \frac{T_f}{T_0} - nR \log \left[\left(\frac{nc_V + cM}{nR}\right)\left(\frac{T_f}{T_0} - 1\right) + \frac{\lambda M}{nRT_0} + \frac{T_f}{T_0}\right]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Delta S_{ghiaccio} &= cM\int_{T_0}^{T_f}\frac{dT}{T}+\frac{\lambda M}{T_f}\\ &= cM\log\frac{T_f}{T_0}+\frac{\lambda M}{T_f}\end{aligned}$$

Dato che la trasformazione è irreversibile sarà $\Delta S > 0$.

1.37. 6 febbraio 2017

Esercizio 1

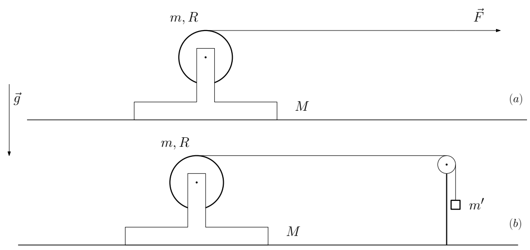


Figura 1.34.: Il sistema descritto nel problema.

Un supporto di massa M è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito. Sul supporto è montato un cilindro di massa m e raggio R, libero di ruotare attorno al proprio asse. Un filo inestensibile di massa trascurabile è avvolto attorno al cilindro, e all'estremo libero è applicata una forza $\vec{F}$ costante che lo mantiene orizzontale, come in Figura 1.34-(a).

1. Si blocca il supporto a terra. Se inizialmente il cilindro è fermo, calcolare la sua velocità angolare quando il filo si è srotolato di un tratto ℓ.
2. Il supporto viene lasciato libero di muoversi. Calcolare la sua accelerazione.
3. Calcolare l'accelerazione angolare del cilindro, ancora nel caso in cui il supporto è libero di muoversi.
4. Ad un certo momento la rotazione del cilindro viene impedita: quanto vale da quel momento l'accelerazione del supporto?
5. Calcolare l'accelerazione del supporto e l'accelerazione angolare del cilindro se il sistema è modificato come nella Figura 1.34-(b).
6. Sempre per il sistema in Figura 1.34-(b), quanto vale l'accelerazione del supporto se la rotazione del cilindro viene impedita?

Esercizio 2

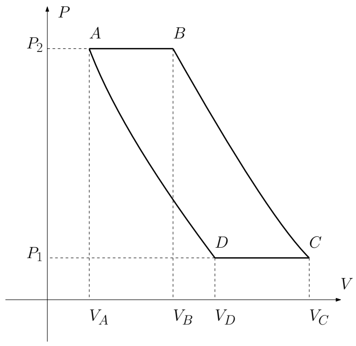


Figura 1.35.: La trasformazione considerata nell'esercizio.

Si consideri la trasformazione ciclica rappresentata in figura, costituita da due trasformazioni isobare e due trasformazioni adiabatiche di n moli di un gas monoatomico. Le pressioni delle trasformazioni isobare P_1 e P_2 sono note, ed anche i volumi V_A e $V_B = 2V_A$.

1. Calcolare i volumi V_C e V_D, e la temperatura massima e minima raggiunta dal gas durante il ciclo, nell'ipotesi che tutte le trasformazioni siano reversibili.
2. Calcolare il rendimento del ciclo, ed esprimerlo in funzione del rapporto $\rho = P_1/P_2$.
3. Si consideri adesso un ciclo modificato, nel quale la pressione applicata esternamente varia bruscamente da P_2 a P_1 (sulla adiabatica $B \to C$) e da P_1 a P_2 (sulla adiabatica $D \to A$). Ancora una volta sono noti P_1, P_2, V_A e V_B. Calcolare nuovamente V_C e V_D.
4. Per quali valori di ρ il ciclo modificato ha rendimento positivo?

Soluzione esercizio 1

Domanda 1 Possiamo applicare il teorema delle forze vive: la variazione dell'energia cinetica del cilindro è uguale al lavoro fatto. Quindi

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = F\ell$$

Dato che $I = mR^2/2$ troviamo

$$\omega^2 = \sqrt{\frac{4F\ell}{mR^2}}$$

Domanda 2 L'accelerazione del supporto è la stessa dell'accelerazione del centro di massa del sistema, dunque

$$a_s = \frac{F}{M+m}$$

Domanda 3 Per quanto riguarda l'accelerazione angolare del cilindro, sarà

$$\alpha_c = -\frac{FR}{I} = -\frac{2F}{mR}$$

Domanda 4 Se la rotazione del corpo viene impedita l'equazione scritta per il centro di massa (domanda 2) resta valida, e quindi a_s ha lo stesso valore calcolato precedentemente.

Domanda 5 In questo caso

$$\begin{aligned}(M+m)a_s &= T\\ I\alpha_c &= -TR\\ m'(a_s - \alpha_c R) &= m'g - T\end{aligned}$$

dove T è la forza dovuta alla tensione del filo. Risolvendo troviamo

$$\begin{aligned}\alpha_c &= -\frac{2m'(m+M)}{(m+M)\,m + (3m+2M)\,m'}\frac{g}{R}\\ a_s &= \frac{mm'}{(m+M)\,m + (3m+2M)\,m'}g\end{aligned}$$

Domanda 6 Se il cilindro è bloccato le equazioni diventano

$$\begin{aligned}(M+m)a_s &= T\\ m'a_s &= m'g - T\end{aligned}$$

ed in questo caso

$$a_s = \frac{m'}{M+m+m'}g$$

Notare che

$$T = \left(\frac{M+m}{M+m+m'}\right)m'g < m'g$$

Soluzione esercizio 2

Domanda 1 Dato che le adiabatiche sono reversibili possiamo scrivere

$$\begin{aligned}P_2V_A^\gamma &= P_1V_D^\gamma\\ P_2V_B^\gamma &= P_1V_C^\gamma\end{aligned}$$

da cui

$$V_D = V_A \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/\gamma} = \frac{1}{\rho^{1/\gamma}} V_A$$
$$V_C = V_B \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/\gamma} = \frac{1}{\rho^{1/\gamma}} V_B$$

Considerando che la pendenza di una adiabatica è maggiore in valore assoluto di quella di una isoterma si vede che la temperatura massima si raggiunge in B, quella minima in D. Entrambe si possono calcolare utilizzando la legge dei gas perfetti:

$$T_D = \frac{P_1 V_D}{nR} = \frac{P_1 V_A}{nR} \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/\gamma}$$
$$T_B = \frac{P_2 V_B}{nR}$$

Domanda 2 Il calore viene assorbito dal sistema solo sulla isobara $A \to B$, e vale

$$Q_{ass} = nc_P \left(T_B - T_A\right)$$

Il lavoro totale è dato dalla somma di

$$L_{A\to B} = P_2 \left(V_B - V_A\right)$$
$$L_{B\to C} = -\Delta U_{B\to C} = nc_V \left(T_B - T_C\right)$$
$$L_{C\to D} = P_1 \left(V_D - V_C\right)$$
$$L_{D\to A} = -\Delta U_{D\to A} = nc_V \left(T_D - T_A\right)$$

Quindi

$$\eta = \frac{P_2 \left(V_B - V_A\right) + P_1 \left(V_D - V_C\right) + nc_V \left(T_B - T_C + T_D - T_A\right)}{nc_P \left(T_B - T_A\right)}$$
$$\eta = 1 - \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - \rho^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Domanda 3 In questo caso non è più possibile utilizzare l'equazione dell'adiabatica reversibile. Sappiamo però calcolare il lavoro fatto sul sistema durante $B \to C$ e $D \to A$, che sarà uguale e opposto al lavoro fatto dal gas e, per il primo principio, uguale alla variazione dell'energia interna. Quindi

$$P_1 \left(V_B - V_C\right) = nc_V \left(T_C - T_B\right)$$
$$P_2 \left(V_D - V_A\right) = nc_V \left(T_A - T_D\right)$$

Dalla legge dei gas perfetti troviamo

$$\begin{aligned} P_1\left(V_B - V_C\right) &= \frac{c_V}{R}\left(P_1 V_C - P_2 V_B\right) \\ P_2\left(V_D - V_A\right) &= \frac{c_V}{R}\left(P_2 V_A - P_1 V_D\right) \end{aligned}$$

e risolvendo

$$\begin{aligned} V_C &= \frac{1}{\gamma}\left(\gamma + \frac{1}{\rho} - 1\right) V_B \\ V_D &= \left(\frac{\gamma}{\gamma + \rho - 1}\right) V_A \end{aligned}$$

Domanda 4 Il calore assorbito è lo stesso del caso reversibile. Per il lavori abbiamo invece

$$\begin{aligned} L_{A\to B} &= P_2\left(V_B - V_A\right) \\ L_{B\to C} &= P_1\left(V_C - V_B\right) \\ L_{C\to D} &= P_1\left(V_D - V_C\right) \\ L_{D\to A} &= P_2\left(V_A - V_D\right) \end{aligned}$$

Quindi

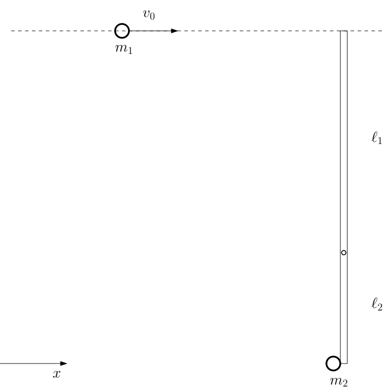
$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\left(P_1 - P_2\right)\left(V_D - V_B\right)}{n c_P\left(T_B - T_A\right)} \\ &= \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{(1-\rho)}{\left(V_B - V_A\right)}\left[V_B - \left(\frac{\gamma}{\gamma + \rho - 1}\right) V_A\right] \\ &= \frac{\gamma - 1}{\gamma}(1-\rho)\left(\frac{\gamma + 2\rho - 2}{\gamma + \rho - 1}\right) \end{aligned}$$

Per avere rendimento positivo dovrà essere

$$\rho > 1 - \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{6}$$

1.38. 3 maggio 2017

Esercizio 1



Un'asta è imperniata in un punto attorno al quale può ruotare liberamente rimanendo in un piano orizzontale. La massa dell'asta è trascurabile. Le lunghezze dei due tratti della sbarra, dai due lati del perno, sono rispettivamente ℓ_1 e ℓ_2. Nel sistema di riferimento in figura, la sbarra si trova inizialmente orientata lungo l'asse y.

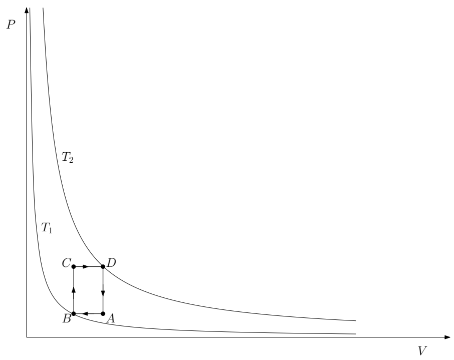
Una massa puntiforme m_2 si trova inizialmente a contatto con un estremo della sbarra, mentre una massa m_1 si muove verso l'altro con velocità $\vec{v} = v_0\hat{x}$. Studiare i casi che seguono.

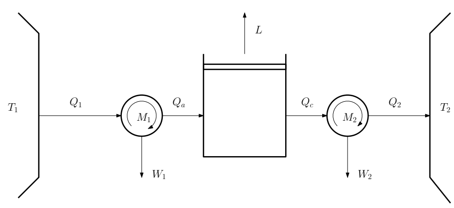
1. La massa m_2 è fissata alla sbarra e la massa m_1 rimane attaccata ad essa durante l'urto. Calcolare la velocità angolare finale del sistema.

2. La massa m_2 è libera. Supponendo che la massa m_1 urti elasticamente la osbarra calcolare le velocità finali delle due masse supponendo l'urto istantaneo.

3. Se la massa m_2 è libera e la massa m_1 rimane fissata alla sbarra dopo l'urto, quanta energia può essere dissipata al massimo in questo?

Esercizio 2





Una trasformazione ciclica quasistatica di n moli di un gas perfetto monoatomico è costituita da due trasformazioni isocore e due trasformazioni isobare, come in figura a sinistra. La temperatura massima e minima raggiunta durante il ciclo è rispettivamente T_2 e T_1.

1. Tra tutte le trasformazioni del tipo descritto, mostrare che per fissate T_1 e T_2 il lavoro è funzione del solo rapporto $x = V_B/V_D$. Determinare per quale valore di x il lavoro fatto dal gas è massimo. Calcolare il rendimento per tale valore di x, e dire se si tratta del rendimento massimo.

2. La trasformazione determinata viene realizzata ponendo alternativamente in contatto termico il recipiente contenente il gas con due bagni termici a temperatura T_1 e T_2, e mantenendo opportunamente costanti pressione e volume. Si ottiene una trasformazione quasistatica facendo fluire il calore in modo sufficientemente lento con una opportuna resistenza termica. In quali fasi si ha contatto termico con il bagno T_1 e in quali con il bagno T_2? Calcolare infine la variazione di entropia dell'universo in un ciclo.

3. Si realizza adesso la trasformazione sostituendo alle resistenze termiche delle macchine reversibili come in figura, a destra (al centro è rappresentato il contenitore con il gas perfetto). Il tratto $B \to C \to D$ viene realizzato attivando la macchina termica M_2, il tratto $D \to A \to B$ attivando la macchina termica M_1. Determinare il segno dei lavori W_1, W_2 e L prodotti dalle due macchine termiche e dal sistema in un ciclo di quest'ultimo. Determinare l'efficienza complessiva della trasformazione, definita come
$$\eta = \frac{L + W_1 + W_2}{Q_2}$$
giustificando il risultato.

Soluzione esercizio 1

Domanda 1 Durante l'urto si conserva il momento angolare del sistema rispetto al perno. Di conseguenza
$$-m_1 v_0 \ell_1 = (m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2)\omega$$
da cui
$$\omega = -\frac{m_1 v_0 \ell_1}{m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2}$$

Domanda 2 In questo caso si conserva il momento angolare rispetto al perno, l'energia e le quantità di moto lungo y delle due masse che rimangono nulle prima e dopo. Di conseguenza
$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$
$$-m_1 v_0 \ell_1 = -m_1 v_1 \ell_1 + m_2 v_2 \ell_2$$

Risolvendo otteniamo

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{m_1\ell_1^2 - m_2\ell_2^2}{m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2} v_0 \\ v_2 &= -\frac{2\ell_1\ell_2 m_1}{m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2} v_0 \end{aligned}$$

Domanda 3 Il momento angolare del sistema rispetto al perno è ancora conservato. Quindi

$$-m_1\ell_1 v_0 = m_1\ell_1^2\omega + m_2\ell_2 v_2$$

$$\frac{-m_1\ell_1 v_0 - m_2\ell_2 v_2}{m_1\ell_1^2} = \omega$$

Sostituendo nell'energia finale

$$\begin{aligned} E_f &= \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_1\ell_1^2\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_1\ell_1^2\left(\frac{m_1\ell_1 v_0 + m_2\ell_2 v_2}{m_1\ell_1^2}\right)^2 \end{aligned}$$

Determiniamo il minimo derivando rispetto a v_2:

$$v_2 = -v_0\frac{\ell_2}{\ell_1}\frac{m_1\ell_1^2}{m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2}$$

Da notare che questo significa

$$\omega = -\frac{m_1\ell_1^2}{m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2}\frac{v_0}{\ell_1}$$

cioè

$$v_2 = \ell_2\omega$$

in altre parole la massa m_2 ha inizialmente la stessa velocità dell'estremità dell'asta con la quale è in contatto. Sostituendo troviamo

$$E_{f,min} = \left(\frac{m_1\ell_1^2}{m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2}\right)\frac{1}{2}m_1 v_0^2$$

e quindi la massima energia dissipata è

$$E_{diss,max} = \left(\frac{m_2\ell_2^2}{m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2}\right)\frac{1}{2}m_1 v_0^2$$

Soluzione esercizio 2

Domanda 1 Il lavoro fatto dal gas in un ciclo si scrive

$$\begin{aligned}
L &= (P_D - P_B)(V_D - V_B) \\
&= P_D V_D + P_B V_B - P_D V_B - P_B V_D \\
&= nR(T_1 + T_2) - nRT_2 \frac{V_B}{V_D} - nRT_1 \frac{V_D}{V_B} \\
&= nR(T_1 + T_2) - nR\left(T_2 x + T_1 \frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

ed a temperature estreme fissate è funzione del solo rapporto tra volume massimo e minimo. Il lavoro massimo si ottiene ponendo

$$\frac{dL}{dx} = -nR\left(T_2 - T_1 \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

cioè

$$x = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

e vale

$$L = nR(T_2 + T_1) - 2nR\sqrt{T_1 T_2}$$

Il calore assorbito vale invece

$$\begin{aligned}
Q_{ass} &= nc_V (T_C - T_B) + nc_P (T_D - T_C) \\
&= nT_2 (1 - x)[xc_V + c_P]
\end{aligned}$$

da cui l'efficienza

$$\eta = \frac{T_1\left(1 - \frac{1}{x}\right) + T_2(1 - x)}{\frac{c_P}{R} T_2 - \frac{c_V}{R} T_1 - T_2 x}$$

Derivando troviamo la condizione di efficienza massima

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{Q_{ass}} \frac{dL}{dx} - \frac{L}{Q_{ass}^2} \frac{dQ_{ass}}{dx} = 0$$

Dato che per il valore di x che rende massimo il lavoro $dL/dx = 0$, anche l'efficienza sarà massima se contemporameamente $dQ_{ass}/dx = 0$. Ma

$$\frac{dQ_{ass}}{dx} = -nRT_2$$

e quindi il ciclo di efficienza massima corrisponderà ad un valore di x maggiore.

Domanda 2 Il calore deve fluire spontaneamente, quindi si manterrà il recipiente in contatto col bagno termico a temperatura T_2 nel tratto $B \to C \to D$ e con il bagno termico a temperatura T_1 nel tratto $D \to A \to B$.

In un ciclo l'entropia del gas non cambia, quindi è sufficiente considerare le variazioni di entropia dei bagni termici. Per il secondo abbiamo

$$\Delta S_2 = -\frac{Q_{ass}}{T_2} = -n\left(1-x\right)\left[xc_V + c_P\right]$$

e per il secondo

$$\Delta S_1 = \frac{Q_{ced}}{T_1}$$

Il calore ceduto vale

$$\begin{aligned} Q_{ced} &= nc_P\left(T_2 - T_A\right) + nc_V\left(T_A - T_1\right) \\ & nT_1\left(\frac{1}{x}-1\right)\left[\frac{1}{x}c_P + c_V\right] \end{aligned}$$

da cui

$$\Delta S_1 = n\left(\frac{1}{x}-1\right)\left[\frac{1}{x}c_P + c_V\right]$$

In conclusione

$$\begin{aligned} \Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 &= n\frac{(1-x)(1-x^2)}{x^2}\left[c_P + xc_V\right] \\ &= nR\frac{(1-x)(1-x^2)\left(5+3x\right)}{2x^2} \end{aligned}$$

Domanda 3 Dato che sia in $B \to C \to D$ che nel tratto $D \to A \to B$ il calore fluirebbe spontaneamente abbiamo $W_1 > 0$ e $W_2 > 0$. Sappiamo già che $L > 0$. Infine, l'efficienza complessiva della unica macchina termica reversibile che lavora tra i due bagni termici deve essere equivalente all'efficienza di un cicli di Carnot, e quindi

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

1.39. 1 giugno 2017

Problema 1

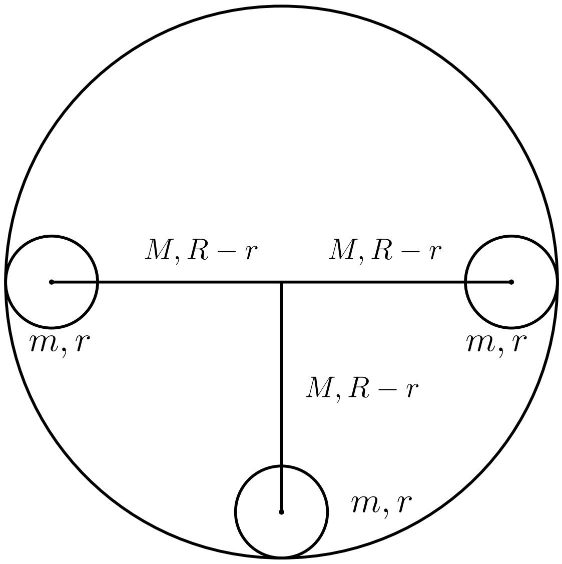


Figura 1.36.: La cavità cilindrica del problema con la struttura al suo interno. Le pareti della cavità sono fisse.

In una cavità cilindrica di raggio R è posta la struttura costruita come in figura, utilizzando tre aste rigide di massa M e lunghezza $R-r$ e tre cilindri di massa m e raggio r. Le tre aste sono saldate rigidamente e perpendicolarmente tra loro, mentre i cilindri possono ruotare liberamente attorno all'estremo dell'asta al quale sono fissati, mentre rotolano senza strisciare sulla superficie interna della cavità. L'asse della cavità cilindrica è orizzontale, ed è presente un campo gravitazionale costante $\vec{g}$.

1. Supponendo che inizialmente il sistema si trovi nella sua posizione di equilibrio stabile, come in figura, determinare la velocità angolare iniziale minima delle aste che permette alla struttura di fare un giro completo.

2. Detta ω la velocità angolare delle aste, calcolare la componente del momento angolare del sistema nella direzione parallela all'asse della cavità cilindrica, scegliendo il polo nel centro della cavità. Dire se si conserva in assenza di gravità, giustificando la risposta.

3. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

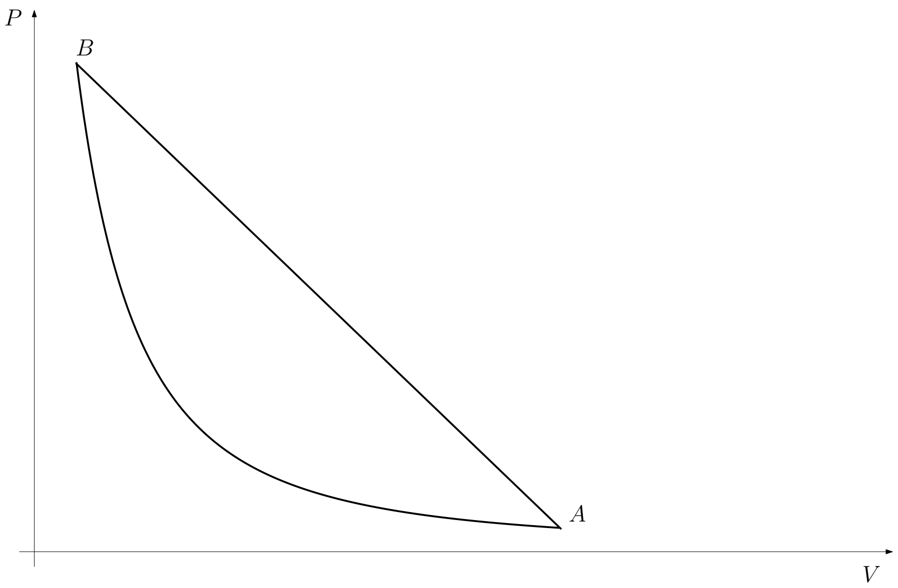


Figura 1.37.: La trasformazione termodinamica considerata nel problema.

Problema 2

Una mole di gas perfetto monoatomico subisce la trasformazione rappresentata in figura, formata da una adiabatica reversibile e dalla retta

$$\frac{P - P_A}{P_B - P_A} = \frac{V - V_A}{V_B - V_A}$$

che unisce lo stato A e lo stato B. Si conoscono la pressione P_B e il volume V_B nello stato B e il volume V_A nello stato A.

1. Determinare P_A. Nelle domande successive sarà sufficiente esprimere i risultati in funzione di P_A, P_B, V_A e V_B.
2. Determinare la temperatura massima T_{max} e minima T_{min} raggiunta dal gas e il lavoro L fatto dal gas in un ciclo, esprimendo queste quantità in funzione di P_A, P_B, V_A e V_B.
3. Determinare in quali fasi del ciclo il gas assorbe calore e in quali lo cede.

Soluzioni

Domanda 1.1

Possiamo utilizzare la conservazione dell'energia. Detta ω la velocità angolare delle aste, determiniamo quella dei cilindri. Usando la condizione di rotolamento puro vediamo che deve essere

$$\omega\,(R - r) = -\omega_c r$$

da cui

$$\omega_c = \frac{r-R}{r}\omega$$

L'energia cinetica si può scrivere nella forma

$$K = 3\left[\frac{1}{2}I_{asta}\omega^2 + \frac{1}{2}I_c\omega_c^2\right]$$

dove

$$I_{asta} = \frac{1}{3}M\left(R-r\right)^2$$

è il momento di inerzia di ciascuna asta rispetto ad un suo estremo e

$$I_c = \frac{3}{2}mr^2$$

il momento di inerzia di ciascun cilindro rispetto al punto di contatto.

Calcoliamo la distanza del centro di massa del sistema dal centro della cavità. Abbiamo

$$\begin{aligned} d_{CM} &= \frac{m\left(R-r\right) + M\frac{1}{2}\left(R-r\right)}{3m+3M} \\ &= \frac{m+\frac{1}{2}M}{3m+3M}\left(R-r\right) \end{aligned}$$

Detto θ l'angolo tra l'asta posta ortogonalmente alle altre due e la direzione verticale abbiamo

$$\begin{aligned} E &= \frac{3}{2}\left[I_{asta} + I_c\left(\frac{r-R}{r}\right)^2\right]\omega^2 - 3\left(m+M\right)gd_{cm}\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[M + \frac{9}{2}m\right]\left(R-r\right)^2\omega^2 - 3\left(m+M\right)gd_{cm}\cos\theta \end{aligned}$$

Usando la conservazione dell'energia abbiamo la condizione

$$\frac{3}{2}\left[I_{asta} + I_c\left(\frac{r-R}{r}\right)^2\right]\omega^2 - 3\left(m+M\right)gd_{cm} = 3\left(m+M\right)gd_{cm}$$

da cui

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{4\left(m+M\right)gd_{cm}}{I_{asta} + I_c\left(\frac{r-R}{r}\right)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{M+2m}{2M+9m}\frac{4g}{\left(R-r\right)}} \end{aligned}$$

Domanda 1.2

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned}L &= 3\left[I_{asta}\omega + \frac{1}{2}mr^2\omega_c + m\left(R-r\right)^2\omega\right] \\ &= 3\left[\left(\frac{1}{3}M+m\right)\left(R-r\right) - \frac{1}{2}mr\right]\left(R-r\right)\omega\end{aligned}$$

In assenza di gravità L si conserva: infatti le uniche forze che possono avere momento non nullo rispetto al polo sono le componenti tangenti $F_{T,i}$ alla superficie della cavità delle forze di contatto. Se consideriamo i cilindri, vediamo che il loro momento angolare relativo al centro di massa deve soddisfare

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\omega}_c = F_{T,i}r$$

e quindi tutte le $F_{T,i}$ hanno lo stesso valore. Infine

$$\frac{dL}{dt} = 3\left[\left(\frac{1}{3}M+m\right)\left(R-r\right) - \frac{1}{2}mr\right]\left(R-r\right)\dot{\omega} = 3F_{T,i}R$$

di conseguenza

$$\left[\left(\frac{1}{3}M+m\right)\left(R-r\right) - \frac{1}{2}mr\right]\frac{R-r}{R}\dot{\omega} = \frac{1}{2}mr\dot{\omega}_c$$

ossia

$$\left(\frac{1}{3}M+\frac{3}{2}m\right)\left(1-\frac{r}{R}\right)\dot{\omega} = 0$$

ma questo è possibile solo se $\dot{\omega} = 0$.

Più semplicemente si può notare che dalla conservazione dell'energia in assenza di gravità segue $\dot{\omega} = \dot{\omega}_c = 0$. Segue che nessun momento può essere applicato ai cilindri, relativamente al centro di massa, e quindi le componenti delle reazioni vincolari parallele alla superficie della cavità devono essere nulle.

Domanda 1.3

Per piccole oscillazioni l'energia vale, a meno di una costante,

$$\begin{aligned}E &= \frac{3}{2}\left[I_{asta} + I_c\left(\frac{r-R}{r}\right)^2\right]\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}\left(m+M\right)gd_{cm}\theta^2 \\ &= \frac{3}{2}\left[\frac{M}{3}+\frac{3}{2}m\right]\left(R-r\right)^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}\left(m+M\right)gd_{cm}\theta^2\end{aligned}$$

di conseguenza

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(m+M)\,gd_{cm}}{I_{asta}+I_c\left(\frac{r-R}{r}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{M+2m}{2M+9m}\frac{g}{(R-r)}}
\end{aligned}
$$

Domanda 2.1

Dato che A e B appartengono alla stessa adiabatica avremo

$$
P_A = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^\gamma P_B
$$

Domanda 2.2

Dato che su una adiabatica

$$
T = \frac{K}{V^{\gamma-1}}
$$

con $\gamma > 1$ e $K > 0$ la temperatura minore sarà sul punto a maggiore volume dell'adiabatica del ciclo considerato, cioà in A. Di conseguenza

$$
T_{min} = \frac{1}{R}P_A V_A
$$

La temperatura massima sarà sul punto della retta BA tangente ad una isoterma. Partiamo dall'equazione della retta

$$
P = P_B + \frac{P_A - P_B}{V_A - V_B}(V - V_B)
$$

abbiamo

$$
\begin{aligned}
RT &= PV \\
&= P_B V + \frac{P_A - P_B}{V_A - V_B}(V - V_B)\,V
\end{aligned}
$$

La temperatura massima si ottiene quando

$$
V = \frac{1}{2}\frac{P_A V_B - P_B V_A}{P_B - P_A}
$$

e vale

$$
T_{max} = \frac{1}{4R}\frac{(P_B V_A - P_A V_B)^2}{(P_B - P_A)(V_A - V_B)}
$$

Calcoliamo il lavoro

$$\begin{aligned} L_{B\to A} &= \int_{V_B}^{V_A} PdV \\ &= \frac{1}{2}\left(P_A + P_B\right)\left(V_A - V_B\right) \end{aligned}$$

Sulla adiabatica

$$L_{A\to B} = U_A - U_B = c_V\left(T_A - T_B\right)$$

In conclusione

$$W = \frac{c_V}{R}\left(P_A V_A - P_B V_B\right) + \frac{1}{2}\left(P_A + P_B\right)\left(V_A - V_B\right)$$

Domanda 2.3

Sull'adiabatica non avviene alcuno scambio di calore. Dal primo principio abbiamo

$$\delta Q = c_V dT + PdV$$

e quindi il gas assorbirà calore quando

$$c_V \frac{dT}{dV} + P > 0$$

D'altra parte

$$PV = P_B V + \frac{P_A - P_B}{V_A - V_B}\left(V - V_B\right) V = RT$$

e quindi

$$R\frac{dT}{dV} = P_B + \frac{P_A - P_B}{V_A - V_B}\left(2V - V_B\right)$$

In conclusione dovrà essere

$$\frac{c_V}{R}\left[P_B + \frac{P_A - P_B}{V_A - V_B}\left(2V - V_B\right)\right] + P_B + \frac{P_A - P_B}{V_A - V_B}\left(V - V_B\right) > 0$$

cioè

$$V < \frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{P_B V_A - P_A V_B}{P_B - P_A}$$

1.40. 27 giugno 2017

Problema 1

Una piattaforma di massa $M = 5m$ è appoggiata su un piano orizzontale privo di attrito. Sulla piattaforma è posto un cilindro di massa m e raggio r, che rotola senza strisciare su di essa. Attorno al cilindro è avvolto un filo che viene mantenuto orizzontale e ad una tensione costante T riavvolgendolo con un apposito dispositivo A, come in Figura 1.38.

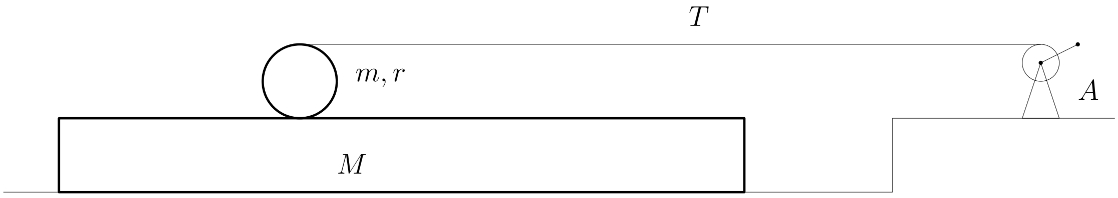


Figura 1.38.: La piattaforma appoggiata e il cilindro considerati nel problema.

1. Calcolare l'energia cinetica del sistema quando il filo è stato riavvolto per una lunghezza ℓ.
2. Calcolare la velocità v_c e la velocità angolare ω_c del cilindro quando quest'ultimo si è spostato di un tratto d relativamente al sistema inerziale fisso rispetto al piano.
3. Quando la velocità del cilindro raggiunge il valore determinato precedentemente il filo si spezza. Successivamente la pedana urta elasticamente contro un ostacolo. Determinare la velocità v'_c e la velocità angolare ω'_c del cilindro dopo l'urto.

Problema 2

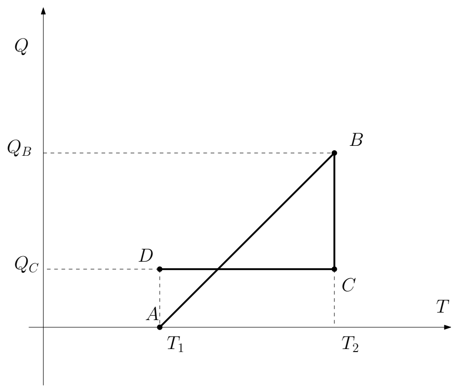


Figura 1.39.: La trasformazione del sistema rappresentato nel piano $Q - T$.

Una mole di un gas perfetto monoatomico subisce una trasformazione reversibile rappresentata nel grafico in Figura 1.39. Sull'asse orizzontale è riportata la temperatura, su quello verticale il calore trasferito al gas. Si conosce la temperatura T_1 del gas negli stati che corrispondono ad A e D e la temperatura T_2 negli stati che corrispondono a B e C.

1. Determinare Q_B in modo che la trasformazione $A \to B$ sia una isobara, e Q_C in modo che la trasformazione complessiva $A \to B \to C \to D$ sia ciclica.

2. Con i dati a disposizione e assumendo i valori Q_B e Q_C calcolati precedentemente calcolare il rendimento del ciclo e la variazione di entropia $\Delta S_{A\to D}$ del gas da A a D.

3. Assumendo per Q_B il valore determinato precedentemente e $Q_C = 0$ calcolare il lavoro compiuto dal gas e la sua variazione di entropia $\Delta S_{A\to D}$.

Soluzione

Problema 1

1. La forza dovuta alla tensione del filo è applicata ad un punto del cilindro che si muove, per il puro rotolamento, con la stessa velocità del filo stesso. Di conseguenza per il teorema delle forze vive l'energia cinetica del sistema è data da

$$K = T\ell$$

2. La prima equazione cardinale per il cilindro da

$$ma_c = T - F_a$$

dove F_a è l'attrito statico tra cilindro e piattaforma. La seconda equazione cardinale, prendendo il polo nel centro di massa del cilindro da

$$\frac{1}{2}mr^2\alpha_c = -Tr - F_a r$$

e la prima equazione cardinale per la piattaforma da

$$Ma = F_a$$

Infine la condizione di puro rotolamento fornisce la relazione

$$a_c = a - \alpha_c r$$

Ricavando a e F_a dalle ultime due relazioni

$$\begin{aligned} a &= a_c + \alpha_c r \\ F_a &= Ma_c + M\alpha_c r \end{aligned}$$

e sostituendo nelle prime due otteniamo

$$
\begin{aligned}
(m+M)\,a_c + Mr\alpha_c &= T \\
Ma_c + \left(\frac{1}{2}m + M\right) r\alpha_c &= -T
\end{aligned}
$$

e risolvendo

$$
\begin{aligned}
a_c &= \frac{(m+4M)}{m(m+3M)}T \\
\alpha_c &= -\frac{2(m+2M)}{m(m+3M)r}T
\end{aligned}
$$

Il cilindro si sposta di un tratto d al tempo

$$
t = \sqrt{\frac{2d}{a_c}}
$$

e in quell'istante avremo

$$
\begin{aligned}
v_c = \sqrt{2da_c} &= \sqrt{\frac{2d(m+4M)}{m(m+3M)}T} \\
&= \sqrt{\frac{21}{8}\frac{dT}{m}}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\omega_c = \alpha_c t &= -\sqrt{\frac{8d(m+2M)^2}{m(m+3M)(m+4M)r^2}T} \\
&= -\frac{1}{r}\sqrt{\frac{121}{42}\frac{dT}{m}}
\end{aligned}
$$

Notare che la forza di attrito applicata alla piattaforma è negativa,

$$
F_a = -\frac{2M}{(m+3M)}T
$$

e quindi questa ha una accelerazione negativa

$$
a = \frac{F_a}{M} = -\frac{2}{(m+3M)}T
$$

3. Dopo che il filo si è spezzato si conserva l'energia cinetica e il momento angolare del cilindro rispetto al punto di contatto. Imponendo l'uguaglianza di queste due

quantità prima e dopo l'urto abbiamo

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I\omega_c^2 = \frac{1}{2}Mv'^2 + \frac{1}{2}mv_c'^2 + \frac{1}{2}I\omega_c'^2$$
$$-mrv_c + I\omega_c = -mrv_c' + I\omega_c'$$

Usando le condizioni di rotolamento puro

$$v_c = v - \omega_c r$$
$$v_c' = v' - \omega_c' r$$

possiamo eliminare le velocità della pedana ottenendo il sistema

$$M\left(v_c + \omega_c r\right)^2 + mv_c^2 + I\omega_c^2 = M\left(v_c' + \omega_c' r\right)^2 + mv_c'^2 + I\omega_c'^2$$
$$-mrv_c + I\omega_c = -mrv_c' + I\omega_c'$$

Risolvendo troviamo

$$\omega_c' = -\frac{4v_c + r\omega_c}{3r}$$
$$v_c' = \frac{1}{3}\left(v_c - 2r\omega_c\right)$$

Problema 2

1. Se la trasformazione $A \to B$ è una isobara deve essere $Q = c_p\left(T - T_1\right)$ di conseguenza
$$Q_B = c_p\left(T_2 - T_1\right)$$
Se la trasformazione $A \to B \to C \to D$ è ciclica A e D devono corrispondere allo stesso stato termodinamico. Sappiamo già che hanno la stessa temperatura: possiamo imporre che anche la pressione sia la stessa. Da A a B la pressione rimane costante, mentre sull'isoterma
$$Q_C - Q_B = L_{B\to C} = RT_2 \log \frac{V_C}{V_B}$$
$$= RT_2 \log \frac{P_A}{P_C}$$
da cui
$$P_C = P_A e^{-\frac{1}{RT_2}\left(Q_C - Q_B\right)}$$
Infine sull'adiabatica $PT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ è costante e quindi deve essere
$$P_D T_1^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P_C T_2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = T_2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} P_A e^{-\frac{1}{RT_2}\left(Q_C - Q_B\right)}$$

Imponendo $P_D = P_A$ otteniamo

$$\begin{aligned} Q_C &= Q_B - \frac{\gamma}{\gamma-1} R T_2 \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \\ &= c_p\left(T_2 - T_1\right) - \frac{\gamma}{\gamma-1} R T_2 \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \end{aligned}$$

2. Dato che la trasformazione è ciclica la variazione di entropia è nulla. Per quanto riguarda il rendimento abbiamo che nella trasformazione viene assorbito un calore Q_B e ceduto un calore $Q_B - Q_C$, quindi

$$\eta = 1 - \frac{Q_B - Q_C}{Q_B} = \frac{Q_C}{Q_B}$$

cioè

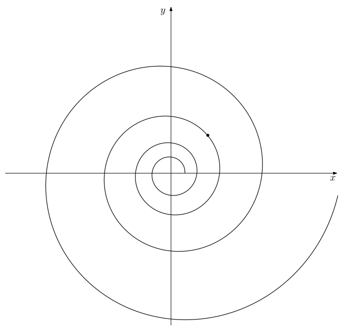
$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_2 - T_1} \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

3. Il lavoro compiuto dal gas è la differenza tra calore assorbito e calore ceduto, cioè Q_C. Di conseguenza in questo caso è nullo. Per quanto riguarda l'entropia, abbiamo

$$\begin{aligned} \Delta S_{A\to D} = \Delta S_{A\to C} &= c_p \log\frac{T_2}{T_1} - \frac{Q_B}{T_2} \\ &= c_p\left(\log\frac{T_2}{T_1} + \frac{T_1}{T_2} - 1\right) \end{aligned}$$

1.41. 4 settembre 2017

Problema 1



Una guida a forma di spirale è descritta nel piano, in un opportuno sistema di riferimento inerziale e in coordinate polari, dalla relazione

$$r = r_0 e^{\beta\theta}$$

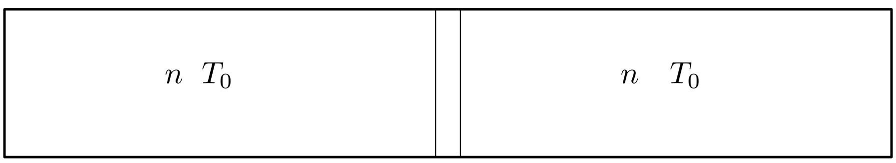
dove r_0 e β sono due parametri positivi e $-\infty < \theta < \infty$. Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi sulla guida, e gli attriti presenti sono trascurabili. Nel seguito si indicheranno con θ_p e r_p le coordinate polari che specificano la posizione di tale punto.

1. All'istante iniziale si ha $\theta_p(0) = 0$ e $\dot{\theta}_p(0) = \omega_0$. Determinare il modulo della velocità della pallina $v_p(t)$.

2. Supponiamo che il sistema di riferimento non sia inerziale, ma ruoti con velocità costante Ω attorno all'origine. Se inizialmente $\theta_p(0) = 0$ e $\dot{\theta}_p(0) = 0$ calcolare $v_p(t)$. La forza di Coriolis influisce sul moto del punto?

3. Calcolare la potenza $W(t)$ del motore che mantiene la guida in rotazione costante, con le condizioni iniziali per il punto materiale specificate precedentemente.

Problema 2



Un tubo cilindrico di sezione S e lunghezza L, chiuso agli estremi, è diviso in due parti inizialmente dello stesso volume, come in figura, mediante una massa m. Anche la masse è cilindrica, con la stessa sezione del tubo e altezza trascurabile. In ciascuna delle due parti sono contenute n moli di un gas perfetto monoatomico, inizialmente alla stessa temperatura T_0. La massa permette scambi di calore, e si può modellare come una resistenza termica R_T.

1. Si sposta molto lentamente agendo dall'esterno la massa, fino a quando il volume del secondo scomparto non si dimezza. Calcolare la nuova temperatura del gas.

2. Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni della massa attorno alla posizione di equilibrio iniziale, supponendo che il moto sia abbastanza lento da poter definire istante per istante pressione e temperatura dei gas nei due scomparti. Si supponga inoltre che $R_T \to \infty$, in modo da poter considerare la massa isolante.

3. Cosa cambia nel problema precedente se $R_T = 0$? Si continui a considerare i parametri termodinamici del sistema ben definiti.

Soluzione

Problema 1

Domanda 1

Dato che la particella è vincolata alla guida deve essere istante per istante

$$r_p = r_0 e^{\beta\theta_p}$$

e derivando

$$\dot{r}_p = \beta\dot{\theta}_p r_0 e^{\beta\theta_p} = \beta\dot{\theta}_p r_p$$

Quindi

$$\begin{aligned} v_p &= \sqrt{\dot{r}_p^2 + r_p^2\dot{\theta}_p^2} \\ &= |\dot{r}_p| \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2}} \end{aligned}$$

Possiamo esprimere v_p anche in funzione della velocità angolare

$$v_p = r_p \left|\dot{\theta}_p\right| \sqrt{1+\beta^2}$$

In particolare usando quest'ultima otteniamo

$$v_p(0) = r_0\omega_0\sqrt{1+\beta^2}$$

Ma dato che non si hanno attriti l'energia cinetica (e quindi il modulo della velocità) si conservano, quindi

$$\boxed{v_p(t) = r_0\omega_0\sqrt{1+\beta^2}}$$

Domanda 2

Osserviamo che la forza di Coriolis è proporzionale al prodotto vettore tra velocità angolare (ortogonale al piano) e velocità (parallela alla guida). Quindi è perpendicolare al vincolo e non ha effetti sul moto.

Aggiungendo un potenziale centrifugo possiamo scrivere l'energia totale conservata nella forma

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}mv_p^2 - m\Omega^2 r_p^2 \\ &= \frac{1}{2}m\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\dot{r}_p^2 - \frac{1}{2}m\Omega^2 r_p^2\end{aligned}$$

Derivando rispetto al tempo troviamo l'equazione del moto

$$\ddot{r}_p - \frac{\Omega^2\beta^2}{1+\beta^2}r_p = 0$$

che ha per soluzione

$$r_p = Ae^{\frac{\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t} + Be^{-\frac{\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t}$$

Dalle condizioni al contorno segue che

$$\begin{aligned}r_p(t) &= r_0\cosh\frac{\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t \\ \dot{r}_p(t) &= \frac{\Omega\beta r_0}{\sqrt{1+\beta^2}}\sinh\frac{\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t\end{aligned}$$

e quindi

$$v_p(t) = |\dot{r}_p|\sqrt{1+\frac{1}{\beta^2}} = \left|\Omega r_0\sinh\frac{\Omega\beta t}{\sqrt{1+\beta^2}}\right|$$

Domanda 3

Rispondiamo lavorando nel sistema di riferimento inerziale. La potenza è uguale alla derivata dell'energia cinetica della particella. Questa si scrive nel sistema scelto

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}_{pi}^2 + r_{pi}^2\dot{\theta}_{pi}^2\right)$$

e in termini delle variabili nel sistema rotante

$$E = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}_p^2 + r_p^2\left(\dot{\theta}_p + \Omega\right)^2\right]$$

Abbiamo già calcolato $\dot{r}_p$ e r_p e sappiamo che $\dot{\theta}_p = \frac{1}{\beta r_p}\dot{r}_p$, quindi

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}m\left[\dot{r}_p^2 + \left(\frac{1}{\beta}\dot{r}_p + r_p\Omega\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{1+\beta^2}{\beta^2}\right)\dot{r}_p^2 + \frac{2}{\beta}\dot{r}_p r_p\Omega + r_p^2\Omega^2\right] \\
&= \frac{1}{2}m\Omega^2 r_0^2\left[\sinh^2\frac{\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t + \cosh^2\frac{\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t + 2\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}\sinh\frac{\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t\cosh\frac{\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t\right] \\
&= \frac{1}{2}m\Omega^2 r_0^2\left[\cosh\frac{2\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t + \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}\sinh\frac{2\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t\right]
\end{aligned}
$$

Derivando rispetto al tempo otteniamo la potenza

$$
W = mr_0^2\frac{\Omega^3\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\left[\sinh\frac{2\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t + \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}\cosh\frac{2\Omega\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}t\right]
$$

Per $\beta = 0$ la spirale si riduce a una circonferenza e $W = 0$.

Problema 2

Domanda 1

Dato che sono possibili scambi di calore il gas nei due scomparti ha la stessa temperatura. Possiamo scrivere per essi

$$
\begin{aligned}
dQ &= nc_V dT + P_1 dV_1 \\
-dQ &= nc_V dT + P_2 dV_2
\end{aligned}
$$

Sommando membro a membro

$$
0 = 2nc_V dT + P_1 dV_1 + P_2 dV_2
$$

e usando le equazioni di stato

$$
0 = \frac{dT}{T} + \frac{R}{2c_V}\left(\frac{dV_1}{V_1} + \frac{dV_2}{V_2}\right)
$$

Integrando otteniamo

$$
0 = \log\frac{T}{T_0} + \frac{R}{2c_V}\left(\log\frac{3}{2} + \log\frac{1}{2}\right)dV_1
$$

$$
0 = \log\frac{T}{T_0} + \frac{\gamma-1}{2}\log\frac{3}{4}
$$

e quindi

$$T = T_0 \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}(\gamma-1)}$$

Per risolvere il problema si poteva anche osservare che l'entropia totale non doveva cambiare, dato che la trasformazione è reversibile e i gas non scambiano calore. Quindi

$$\Delta S = 2nc_V \log \frac{T}{T_0} + nR \log \frac{\frac{3}{2}V_0}{V_0} + nR \log \frac{\frac{1}{2}V_0}{V_0} = 0$$

da cui segue lo stesso risultato.

Domanda 2

Possiamo scrivere l'equazione del moto nella forma

$$m\ddot{x} = S\left(P_1 - P_2\right)$$

dove x è lo spostamento del setto dalla posizione di equilibrio iniziale. Non si ha trasferimento di calore tra i due scomparti, quindi i gas subiscono una trasformazione adiabatica. Quindi

$$P_1 = P_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma}$$
$$P_2 = P_0 \left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\gamma}$$

quindi

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= SP_0 \left[\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma} - \left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\gamma}\right] \\ &= SP_0 \left[\left(\frac{V_0}{V_0 + Sx}\right)^{\gamma} - \left(\frac{V_0}{V_0 - Sx}\right)^{\gamma}\right] \end{aligned}$$

Per piccole oscillazioni

$$\ddot{x} = -\frac{2\gamma S^2 P_0}{mV_0} x$$

e quindi

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2\gamma S^2 P_0}{mV_0}} = \sqrt{\gamma}\sqrt{\frac{8nRT_0}{mL^2}}$$

Domanda 3

In questo caso le temperature dei due gas sono istante per istante identiche. L'equazione del moto precedente si può scrivere nella forma

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= S\left(P_1 - P_2\right) \\ &= nRTS\left(\frac{1}{V_0 + Sx} - \frac{1}{V_0 - Sx}\right) \end{aligned}$$

ma per piccole oscillazioni il contributo tra parentesi è del primo ordine, e quindi si può porre $T = T_0$. Segue che

$$\ddot{x} = -\frac{2nRS^2T_0}{mV_0^2}x$$

e quindi

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2nRS^2T_0}{mV_0^2}} = \sqrt{\frac{8nRT_0}{mL^2}}$$

Notare che $\omega_1 = \sqrt{\gamma}\omega_2$.

1.42. 7 ottobre 2017

Problema 1

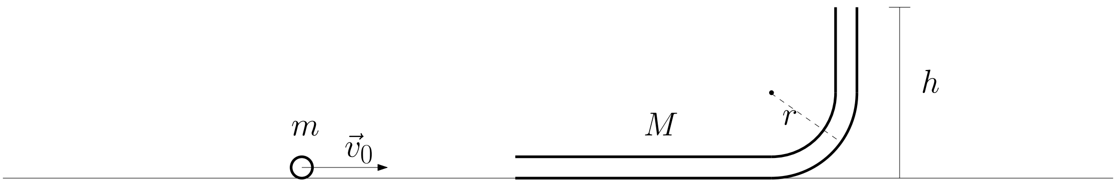


Figura 1.40.: Il sistema descritto nel problema.

Su un piano orizzontale è appoggiata una guida curva come in Figura 1.40, ottenuta congiungendo due tratti rettilinei con un quarto di circonferenza di raggio r. La guida ha una massa totale M ed è vincolata in modo che la parte a contatto con il piano orizzontale non si possa staccare. Una massa m viene lanciata verso la guida con velocità iniziale $\vec{v}_0$, ed entra in essa. Tra piano orizzontale e guida e tra piano orizzontale e massa non c'è attrito mentre ci può essere attrito tra la guida e la massa.

1-a. Trovare eventuali quantità conservate giustificando la risposta.

1-b. Si osserva che per un certo modulo della velocità iniziale v_1 la massa arriva all'altra estremità della guida con componente verticale della velocità nulla. Calcolare la componente orizzontale.

D'ora in poi si può supporre che non vi sia attrito tra guida e massa.

2-a. Trovare eventuali quantità conservate giustificando la risposta.

2-b. Calcolare il minimo modulo della velocità iniziale v_{min} che permetta alla massa di uscire dall'altra estremità della guida. Quanto vale la componente orizzontale della velocità della massa al momento della fuoriuscita?

3. Preso $|\vec{v}_0| = v_3 > v_{min}$ calcolare la massima altezza (dal piano orizzontale) raggiunta dalla massa.

Problema 2

Un recipiente cilindrico di sezione S e impermeabile al calore viene chiuso da un pistone, pure impermeabile al calore e collegato al fondo del recipiente da una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k. All'interno del recipiente si trovano n moli di un gas perfetto monoatomico mentre la pressione esterna è trascurabile.

1. Inizialmente il sistema si trova all'equilibrio a una temperatura T_0. Calcolare la pressione e il volume totale occupato dal gas.

2. Si applica ora al pistone una forza orizzontale di modulo F e si attende che si ristabilisca l'equilibrio grazie agli attriti interni. Calcolare la nuova temperatura.

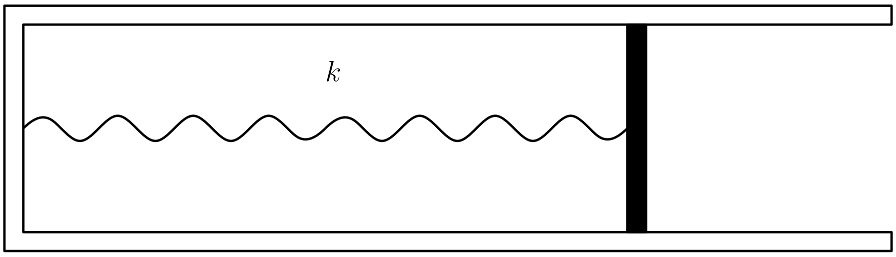


Figura 1.41.: Il cilindro con il pistone e la molla descritti nel problema.

3. Calcolare di quanto è cambiata l'entropia del sistema.

Soluzioni Problema 1

Domanda 1.a

Dato che non si ha attrito tra piano orizzontale e guida e tra piano orizzontale e massa tutte le forze esterne applicate al sistema massa+guida sono verticali. Si conserva quindi la quantità di moto orizzontale del sistema.

Domanda 1.b

Dalla conservazione della quantità di moto orizzontale segue che

$$mv_1 = (m+M)v_f$$

dove v_f è la velocità finale orizzontale comune alla massa e alla guida. Quindi

$$v_f = \frac{m}{m+M}v_1$$

Domanda 2.a

Per le considerazioni fatte nella prima domanda la quantità di moto orizzontale del sistema si conserva ancora. In assenza di attriti si conserva anche l'energia meccanica totale, inserendo in essa l'energia potenziale gravitazionale della massa.

Domanda 2.b

Usando la conservazione dell'energia nel sistema del centro di massa si trova

$$\frac{1}{2}\mu v_{min}^2 = mgh$$

dove μ è la massa ridotta del sistema,

$$\mu = \frac{mM}{m+M}$$

Di conseguenza

$$v_{min} = \sqrt{\frac{2mgh}{\mu}} = \sqrt{2gh\left(1 + \frac{m}{M}\right)}$$

Al momento della fuoriuscita le velocità orizzontali di guida e massa sono uguali. Per la conservazione della quantità di moto orizzontale si trova, analogamente ai casi precedenti,

$$v_{orizzontale} = \frac{m}{m+M} v_{min}$$

Domanda 3

In questo caso

$$\frac{1}{2}\mu v_3^2 = mgh'$$

dove h' è l'altezza massima raggiunta, che vale quindi

$$h' = \frac{\mu v_3^2}{2mg}$$

Soluzioni Problema 2

Domanda 1

Preso come positivo il verso da sinistra a destra abbiamo per l'equilibrio meccanico del pstone

$$P_0 S - k\frac{V_0}{S} = 0$$

e dalla equazione dei stato dei gas perfetti

$$P_0 V_0 = nRT_0$$

Troviamo quindi

$$P_0 = \frac{1}{S}\sqrt{nkRT_0}$$
$$V_0 = S\sqrt{\frac{nRT_0}{k}}$$

Domanda 2

Usando il primo principio e tenendo conto che non si ha scambio di calore con l'esterno abbiamo

$$\Delta U = W$$

dove W è il lavoro fatto sul sistema. Includendo nel sistema anche la molla possiamo scrivere esplicitamente

$$\frac{k}{2S^2}\left(V_f^2 - V_0^2\right) + nc_V\left(T_f - T_0\right) = \frac{F}{S}\left(V_f - V_0\right)$$

Dalla legge dei gas perfetti e dalle condizioni di equilibrio meccanico per il pistone troviamo

$$\begin{aligned} V_f P_f &= \left(k\frac{V_f^2}{S^2} - \frac{F}{S}V_f\right) = nRT_f \\ V_0 P_0 &= \frac{k}{S^2}V_0^2 = nRT_0 \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{k}{2S^2}\left(V_f^2 - V_0^2\right) + \frac{c_V}{R}\left(k\frac{V_f^2}{S^2} - \frac{k}{S^2}V_0^2 - \frac{F}{S}V_f\right) = \frac{F}{S}\left(V_f - V_0\right)$$

Questa è una equazione di secondo grado per V_f

$$V_f^2 - \frac{2FS}{k}\frac{\gamma}{\gamma+1}V_f + \frac{2FS}{k}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}V_0 - V_0^2 = 0$$

Risolvendo troviamo

$$\begin{aligned} V_f &= \frac{FS}{k}\frac{\gamma}{\gamma+1} + \sqrt{\left(\frac{FS}{k}\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^2 + V_0^2 - \frac{2FS}{k}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}V_0} \\ &= V_k + \sqrt{V_k^2 + V_0^2 - \frac{4}{5}V_k V_0} \end{aligned}$$

dove si è posto

$$V_k = \frac{5}{7}\frac{FS}{k}$$

Di conseguenza la temperatura, sostituendo in

$$T_f = \frac{k}{nRS^2}\left(V_f - \frac{7}{5}V_k\right)V_f$$

Domanda 3

La variazione di entropia si può ottenere dalla espressione generale

$$\Delta S = nc_V \log\frac{T_f}{T_0} + nR\log\frac{V_f}{V_0}$$

ed è positiva, dato che la trasformazione considerata è irreversibile.

1.43. 15 gennaio 2018

Esercizio 1

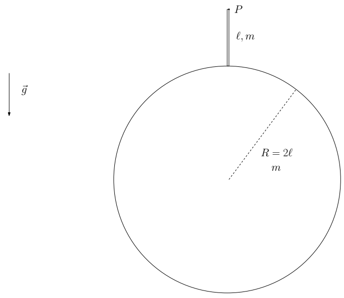


Figura 1.42.: Il pendolo fisico descritto nel problema.

Un pendolo fisico e costituito da una sbarra sottile di lunghezza ℓ e massa m, saldata ad un estremo ad un disco di uguale massa e raggio $R = 2\ell$, ed appeso all'estremo opposto.

1. Calcolare la distanza tra il punto di sospensione ed il centro di massa del pendolo.
2. Calcolare il momento di inerzia del pendolo rispetto ad un asse perpendicolare al piano di oscillazione e passante per il punto di sospensione.
3. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni ω_P rispetto alla posizione di equilibrio stabile.
4. Si fa oscillare orizzontalmente il punto di sospensione P secondo la legge
$$x_P(t) = a \cos \Omega t$$
Scrivere l'equazione del moto per l'inclinazione del pendolo e risolverla cercando una soluzione con lo stesso andamento temporale di $x_P(t)$.
5. Determinare Ω in modo che a regime il centro del disco rimanga fermo, supponendo che l'approssimazione di piccole oscillazioni resti valida.

Soluzione

Domanda 1

Combinando i contributi del disco e della sbarra abbiamo

$$d = \frac{m\frac{\ell}{2} + m\left(\ell + R\right)}{2m} = \frac{7}{4}\ell$$

Domanda 2

Sommando i contributi di disco e sbarra, e utilizzando il teorema di Steiner, abbiamo

$$\begin{aligned} I &= m\frac{\ell^2}{3} + \left[\frac{1}{2}m\left(2\ell\right)^2 + m\left(\ell+R\right)^2\right] \\ &= \frac{34}{3}m\ell^2 \end{aligned}$$

Domanda 3

La seconda equazione cardinale si scrive

$$I\ddot{\theta} + 2mgd\theta = 0$$

da cui

$$\omega_P = 2\pi f = \sqrt{\frac{2mgd}{I}} = \sqrt{\frac{21}{68}\frac{g}{\ell}}$$

Domanda 4

Nel sistema di riferimento solidale al punto di sospensione la seconda equazione cardinale si scrive adesso, per piccole oscillazioni,

$$I\ddot{\theta} + 2mgd\theta = -2md\ddot{x}_P$$

Cerchiamo una soluzione della forma

$$\theta = \theta_0 \cos\Omega t$$

Sostituendo abbiamo

$$-\Omega^2 I\theta_0 + 2mgd\theta_0 = 2mad\Omega^2$$

da cui

$$\theta_0 = \frac{2mad\Omega^2}{2mgd - I\Omega^2} = \frac{\omega_P^2}{\omega_P^2 - \Omega^2}\frac{a\Omega^2}{g}$$

Domanda 5

Nel sistema di laboratorio il centro del disco si muove orizzontalmente come

$$x_O = x_P + (\ell + R)\,\theta$$

ossia

$$x_O = a\cos\Omega t + (\ell+R)\,\theta_0\cos\Omega t$$

e quindi è fermo quando

$$a + (\ell+R)\,\theta_0 = 0$$

Sostituendo troviamo la condizione

$$\Omega^2 = \frac{2mgd}{I - (\ell + R)\, 2md} = \frac{9}{7}\frac{g}{\ell}$$

Esercizio 2

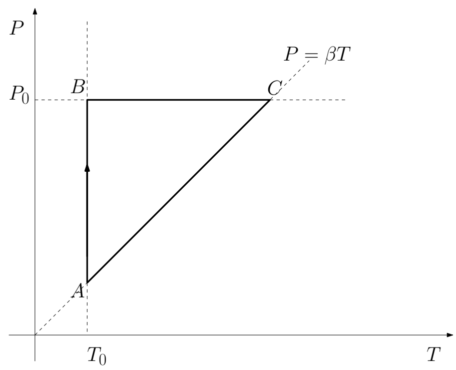


Figura 1.43.: Il ciclo termodinamico descritto nel problema.

Si sottopongono n moli di un gas perfetto monoatomico alla trasformazione termodinamica ciclica e quasistatica rappresentata in figura nel piano PT. Il tratto $A \to B$ avviene ad una temperatura costante T_0, il tratto $B \to C$ ad una pressione costante P_0 e sul tratto $C \to A$ vale $P = \beta T$ dove β è una costante nota di opportune dimensioni.

1. Rappresentare la trasformazione nel piano PV.
2. Determinare la temperatura massima T_{max} e minima T_{min} raggiunta dal gas.
3. Supponendo che il sistema possa scambiare calore solo con due bagni termici esterni alle temperature T_{min} e T_{max} calcolate precedentemente, determinare la variazione di entropia del gas in un ciclo.
4. Nelle stesse condizioni precedenti, calcolare la minima variazione di entropia dei bagni termici in un ciclo.

Soluzione

Domanda 1

La trasformazione $C \to A$ è isocora, infatti

$$P = \frac{nRT}{V} = \beta T$$

da cui

$$V = \frac{nR}{\beta}$$

La rappresentazione nel piano PV è riportata in Figura1.44.

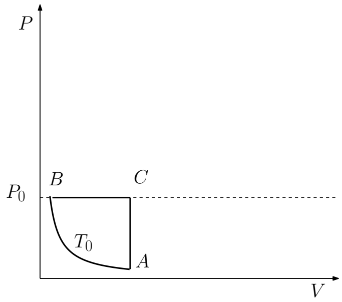


Figura 1.44.: Il ciclo nel piano $P - V$.

Domanda 2

La temperatura aumenta sulla isobara all'aumentare del volume, e sulla isocora all'aumentare della pressione. Quindi $T_{min} = T_0$ e

$$T_{max} = T_C = \frac{P_0}{\beta}$$

Domanda 3

Dato che l'entropia è una funzione di stato, dopo un ciclo non è cambiata per il gas, dato che questo torna nello stesso stato iniziale.

Domanda 4

Nella trasformazione $A \to B$ il bagno termico a T_{min} scambia con il gas il calore

$$Q_{A\to B} = nRT_{min} \log \frac{V_A}{V_B}$$

ed aumenta la propria entropia di

$$\Delta S_1 = \frac{Q_{A\to B}}{T_{min}} = nR \log \frac{P_0}{\beta T_0}$$

Nella trasformazione $B \to C$ il bagno termico a T_{max} scambia con il gas il calore

$$Q_{B\to C} = nc_P \left(T_{min} - T_{max}\right)$$

e riduce la sua entropia di

$$\Delta S_2 = \frac{Q_{B\to C}}{T_{max}} = nc_P \frac{T_{min} - T_{max}}{T_{max}}$$

Nella trasformazione $C \to A$ infine il bagno termico a T_{min} scambia con il gas il calore

$$Q_{C\to A} = nc_V \left(T_{max} - T_{min}\right)$$

e aumenta la sua entropia di

$$\Delta S_3 = \frac{Q_{C\to A}}{T_{min}} = nc_V \frac{T_{max} - T_{min}}{T_{min}}$$

La somma di queste variazioni è anche la variazione totale di entropia dell'universo:[1]0

$$\begin{aligned}
\Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 \\
&= nR \log \frac{P_0}{\beta T_0} + nc_P \left(\frac{T_{min}}{T_{max}} - 1\right) + nc_V \left(\frac{T_{max}}{T_{min}} - 1\right) \\
&= nR \log \frac{P_0}{\beta T_0} + nc_P \left(\frac{\beta T_0}{P_0} - 1\right) + nc_V \left(\frac{P_0}{\beta T_0} - 1\right)
\end{aligned}$$

[1]Questa è sempre positiva. Ponendo $x = \frac{P_0}{\beta T_0}$ abbiamo

$$\Delta S = nR \log x + nc_P \left(\frac{1}{x} - 1\right) + nc_V \left(x - 1\right)$$

Per $x = 1$ abbiamo $\Delta S = 0$. Ma

$$\frac{d}{dx} \Delta S = n \frac{\left(c_P + x c_V\right)\left(x - 1\right)}{x^2}$$

quindi $\Delta S(x)$ è crescente per $x > 1$ e decrescente per $x < 1$. Quindi $\Delta S \geq 0$.

1.44. 5 febbraio 2018

Esercizio 1

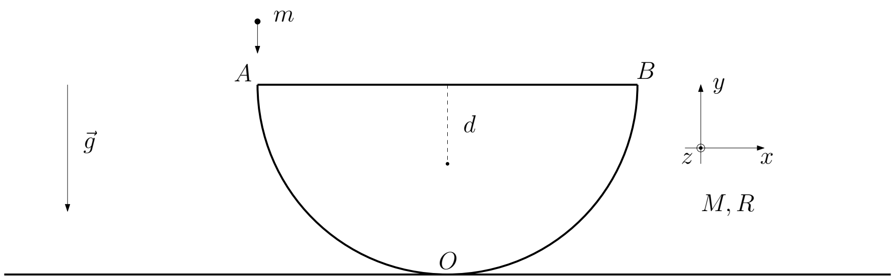


Figura 1.45.: Il sistema considerato nel problema.

La metà di un cilindro di massa M e raggio R è appoggiato su un piano orizzontale nella posizione di equilibrio stabile rappresentata in Figura 1.45. Una particella di massa m viene lasciata cadere verticalmente in modo da urtare lo spigolo del semicilindro con una velocità di modulo v_0. L'urto è completamente anelastico e istantaneo, e il semicilindro ruota senza strisciare sul piano. Il cilindro è omogeneo, quindi il suo centro di massa si trova ad una distanza $d = \frac{4R}{3\pi}$ dall'asse.

1. Calcolare il momento di inerzia I_O del mezzo cilindro rispetto ad un asse passante per il punto O di contatto col piano e parallelo all'asse z del sistema di riferimento riportato in figura.

2. Calcolare il momento angolare del sistema rispetto ad un polo opportunamente scelto immediatamente prima e immediatamente dopo l'urto.

3. Calcolare l'energia dissipata durante l'urto.

4. Per quale valore minimo di v_0 il punto di impatto A riesce ad arrivare a terra?

Soluzione

Domanda 1

Detto I_{CM} il momento di inerzia del semicilindro rispetto al suo centro di massa, dal teorema di Steiner abbiamo

$$\frac{1}{2}MR^2 = I_{CM} + Md^2$$
$$I_O = I_{CM} + M\left(R-d\right)^2$$

da cui

$$\begin{aligned} I_O &= \frac{1}{2}MR^2 + M\left(R-d\right)^2 - Md^2 \\ &= \frac{3}{2}MR^2 - 2MRd \\ &= \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right)MR^2 \end{aligned}$$

Domanda 2

Se poniamo il polo in O, durante l'urto il momento angolare si conserva perché le uniche forze impulsive esterne sono le reazioni del piano orizzontale, che hanno braccio nullo. Quindi sia prima che dopo l'urto

$$\vec{L} = mv_0R\hat{z}$$

$$mv_0R = \left(2mR^2 + I_O\right)\omega$$

da cui

$$\omega = \frac{mv_0R}{2mR^2 + I_O}$$

Domanda 3

Dopo l'urto il momento angolare si può scrivere nella forma

$$\vec{L} = \left(2mR^2 + I_O\right)\omega\hat{z}$$

Otteniamo quindi l'equazione

$$mv_0R = \left(2mR^2 + I_O\right)\omega$$

che permette di calcolare la velocità angolare del sistema dopo l'urto

$$\omega = \frac{mv_0R}{2mR^2 + I_O}$$

L'energia prima dell'urto vale

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2$$

e dopo

$$\begin{aligned} E_f &= \left(mR^2 + \frac{1}{2}I_O\right)\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{m^2R^2}{2mR^2 + I_O}v_0^2 \end{aligned}$$

L'energia dissipata è dunque

$$E_i - E_f = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{mR^2 + I_O}{2mR^2 + I_O}\right)$$

Domanda 4

Dopo l'urto vale la conservazione dell'energia meccanica, dunque

$$\frac{1}{2}\frac{m^2R^2}{2mR^2 + I_O}v_0^2 - Mdg \geq U_{max}$$

Nell'equazione precedente U_{max} è il massimo dell'energia potenziale tra $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$, dove θ è l'inclinazione della faccia superiore del semicilindro. Dato che

$$U(\theta) = -Mgd\cos\theta - mgR\sin\theta$$

vediamo che si ha solo un minimo nell'intervallo considerato. Possiamo quindi considerare il valore del potenziale a $\theta = \pi/2$. Se

$$U(\pi/2) = -mgR \leq -Mdg$$

il punto A tocca terra indipendentemente da v_0. Questo è quanto accade se

$$m \geq \frac{4}{3\pi}M$$

.

In caso contrario deve essere

$$\frac{1}{2}\frac{m^2R^2}{2mR^2 + I_O}v_0^2 \geq Mdg - mgR$$

cioè

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2gR\left(\frac{4}{3\pi}\frac{M}{m} - 1\right)\left(2 + \frac{I_O}{mR^2}\right)}{mR^2}}$$

Esercizio 2

Due corpi di capacità termica $C = \alpha T$ si trovano inizialmente alle temperature T_1 e T_2.

1. Si mettono in contatto i due corpi. Calcolare la temperatura finale di equilibrio.
2. Calcolare la variazione di entropia del sistema.
3. Considerando nuovamente lo stato iniziale, calcolare il massimo lavoro che è possibile estrarre dal sistema.

Soluzione

Domanda 1

Dato che il sistema dei due corpi è isolato, la somma dei calori assorbiti deve essere nulla. Quindi

$$\int_{T_1}^{T_f} \alpha T dT + \int_{T_2}^{T_f} \alpha T dT = 0$$

da cui

$$T_f = \sqrt{\frac{1}{2}\left(T_1^2 + T_2^2\right)}$$

Domanda 2

$$\begin{aligned}
\Delta S &= \int_{T_1}^{T_f} \alpha dT + \int_{T_2}^{T_f} \alpha dT \\
&= 2\alpha\left(T_f - \frac{T_1 + T_2}{2}\right) \\
&= 2\alpha\left(\sqrt{\frac{T_1^2 + T_2^2}{2}} - \frac{T_1 + T_2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Domanda 3

Per ottenere il massimo lavoro si deve procedere reversibilmente, quindi $\Delta S = 0$. Questo significa

$$T_f = \frac{1}{2}\left(T_1 + T_2\right)$$

Detti Q_1 e Q_2 i calori ceduti ai due corpi, dal primo principio abbiamo

$$Q_1 + Q_2 + W = 0$$

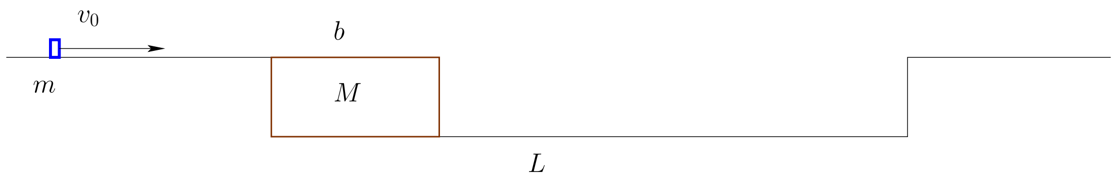
dove W è il lavoro ottenuto. Di conseguenza

$$\begin{aligned}
W = -Q_1 - Q_2 &= \frac{\alpha}{2}\left[T_1^2 + T_2^2 - 2T_f^2\right] \\
&= \alpha\left\{\frac{1}{2}\left(T_1^2 + T_2^2\right) - \left[\frac{1}{2}\left(T_1 + T_2\right)\right]^2\right\} \\
&= \frac{\alpha}{4}\left(T_1 - T_2\right)^2
\end{aligned}$$

2. Prove Scritte Fisica I vecchio ordinamento

2.1. 10 gennaio 2007

Primo problema (15 punti)



Nel sistema in figura tra il blocco di massa M e lunghezza b e la massa m è presente un attrito descritto da coefficienti statici e dinamici μ_s e μ_d. Inizialmente la particella si muove sul piano a sinistra (privo di attrito) con velocità v_0. Il blocco è libero di muoversi nella scanalatura, anche essa priva di attrito, e arrivando al bordo a destra vi rimane attaccato.

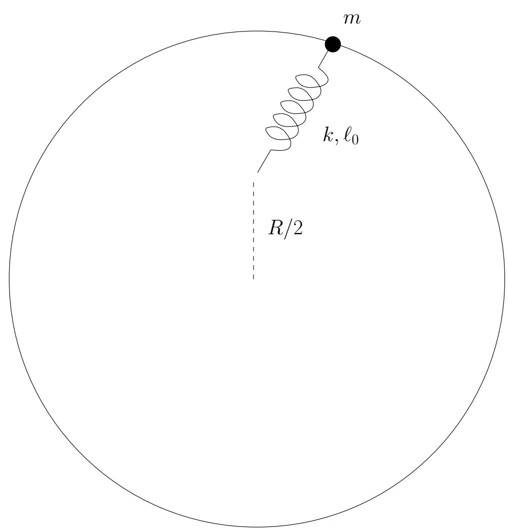
1. Supponendo che la particella non cada nella scanalatura calcolare la velocità del centro di massa del sistema massa+blocco. Rimane la stessa anche dopo l'urto?

2. Per quali valori di μ_d la particella cade nella scanalatura?

3. Se la particella si ferma relativamente al blocco prima dell'arrivo di questo sul bordo destro, cosa accade al momento dell'urto? In generale sotto quali condizioni la particella passa oltre il bordo destro, e con che velocità?

Secondo problema (15 punti)

La particella di massa m è vincolata alla guida circolare di raggio R posta in un piano orizzontale. Inoltre è fissata ad una molla di costante k e lunghezza a riposo ℓ_0. L'altro estremo della molla è fissato a un punto posto a una distanza $R/2$ dal centro della guida.



1. Se $\ell_0 = 0$ determinare la minima velocità che deve avere la particella nel punto di minimo allungamento della molla per poter percorrere completamente la guida.
2. In funzione di $\ell_0 \geq 0$ discutere le posizioni di equilibrio del sistema.
3. Scelta una opportuna coordinata scrivere le equazioni del moto per il sistema, sempre per ℓ_0 generico.

Soluzione primo problema

Domanda 1

La quantità di moto del sistema blocco+massa si conserva durante il moto nella scanalatura. La velocità del centro di massa è quindi uguale a quella iniziale, ossia

$$v_{cm} = \frac{mv_0}{m+M}\,.$$

La conservazione cessa di valere durante l'urto, perchè sul sistema agisce una forza orizzontale, la reazione vincolare della parete. Dopo l'urto in effetti avremo

$$v_{cm} = \frac{mv}{m+M}$$

dove v è la velocità della particella dopo l'urto. Ma $v < v_0$ perchè parte dell'energia si è dissipata per attrito.

Domanda 2

La particella cade nella scanalatura se percorre una distanza b relativa al blocco prima dell'urto con la parete. La forza di attrito applicata al cuneo vale

$$F_a = \mu_d mg$$

quindi il moti del cuneo e della particella sono uniformemente accelerati, dati da ($\gamma = m/M$)

$$\begin{aligned} s &= v_0 t - \frac{1}{2}\mu_d g t^2 \\ S &= \frac{1}{2}\gamma\mu_d g t^2\,. \end{aligned}$$

Il tempo τ_b necessario a percorrere una distanza relativa b è determinata da

$$s - S = v_0\tau_b - \frac{1}{2}\mu_d\left(1+\gamma\right)g\tau_b^2 = b$$

e quello a cui avviene l'urto da

$$S = \frac{1}{2}\gamma\mu_d g\tau_u^2 = L - b\,.$$

Segue che

$$\begin{aligned}
\tau_b &= \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2b\mu_d (1+\gamma) g}}{\mu_d (1+\gamma) g} \\
\tau_u &= \sqrt{\frac{2(L-b)}{\gamma \mu_d g}}\,.
\end{aligned}$$

La soluzione accettabile per τ_b è la più piccola, corrispondente al segno negativo. Abbiamo quindi la condizione $\tau_b < \tau_u$, ossia

$$v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2b\mu_d (1+\gamma) g} < \sqrt{2(L-b)\mu_d \gamma^{-1} (1+\gamma)^2 g}\,.$$

Per discutere questa equazione conviene introdurre i parametri adimensionali

$$x = \frac{2\mu_d g (1+\gamma) b}{v_0^2} \geq 0$$

e

$$\beta = \frac{1+\gamma}{\gamma}\left(\frac{L}{b} - 1\right) \geq 0\,.$$

La disequazione diviene

$$1 - \sqrt{1-x} < \sqrt{\beta x}$$

che ha per soluzione

$$0 \leq x < \min\left[1, \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}\right]$$

ossia

$$0 \leq \mu_d < \frac{v_0^2}{2g(1+\gamma)b} \min\left\{1, \frac{4\gamma(1+\gamma)\left(\frac{L}{b}-1\right)}{\left[\frac{L}{b}(1+\gamma)-1\right]^2}\right\}\,.$$

Domanda 3

Se la particella si ferma relativamente al blocco prima dell'urto, immediatamente dopo continuerà a muoversi con la stessa velocità relativa al sistema di laboratorio. Questa è data dalla velocità del centro di massa del sistema prima dell'urto determinata in precedenza.

Condizione necessaria per passare oltre il bordo destro è ovviamente quella di non cadere nella scanalatura, cioè per quanto visto al punto precedente

$$x \geq \min\left[1, \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}\right]\,.$$

Se inoltre $x \geq 1$ la particella è ferma rispetto al blocco prima dell'urto, con una energia cinetica nel sistema di laboratorio di

$$K = \frac{1}{2}m\left(\frac{mv_0}{m+M}\right)^2 .$$

Per poter passare oltre il bordo destro questa dovà essere maggiore del lavoro che verrà fatto dalle forze di attrito dopo l'urto sul tratto non ancora percorso sul blocco. Il tratto già percorso si può trovare eguagliando l'energia disponibile nel centro di massa al lavoro fatto sul sistema dall'attrito:

$$\frac{1}{2}\mu v_0^2 = \mu_d mg\left(\delta - \Delta\right)$$

dove δ e Δ sono gli spostamenti di particella e blocco. Ma nel sistema del centro di massa

$$m\delta + M\Delta = 0$$

per cui

$$\frac{1}{2}\mu v_0^2 = \mu_d mg\left(1+\frac{m}{M}\right)\delta$$

e quindi

$$\delta = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\mu_d g}\left(\frac{M}{m+M}\right)^2 .$$

La velocità finale si otterrà quindi dall'equazione

$$K = \frac{1}{2}m\left(\frac{mv_0}{m+M}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \mu_d mg\left[b - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\mu_d g}\left(\frac{M}{m+M}\right)^2\right]$$

e $v^2 > 0$ corrisponderà alla condizione per la quale la particella passa sul bordo. Quando $x < 1$ avremo sicuramente il passaggio del bordo, e la valocità finale si potrà ottenere semplicemente da

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \mu_d mgL$$

da cui

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2\mu_d gL}\,.$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Possiamo scegliere come coordinata l'angolo θ tra il raggio corrispondente alla posizione della particella e quello corrispondente alla posizione di massimo avvicinamento. L'energia cinetica si scriverà quindi

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

e quella potenziale

$$U = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

Con

$$\ell = \sqrt{R^2 \sin^2\theta + (R\cos\theta - R/2)^2} = R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta}\,.$$

Nel nostro caso $\ell_0 = 0$ quindi

$$E = K + U = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{kR^2}{2}\left(\frac{5}{4} - \cos\theta\right)\,.$$

Eguagliando l'energia nel punto di massimo e di minimo avvicinamento otteniamo

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k\ell_{min}^2 > \frac{1}{2}k\ell_{max}^2$$

da cui

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(\ell_{max}^2 - \ell_{min}^2\right)}$$

ossia

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}R^2\left(\frac{9}{4} - \frac{1}{4}\right)} = R\sqrt{\frac{2k}{m}}\,.$$

Domanda 2

Se sulla molla vi è tensione, una posizione sarà di equilibrio solo quando questa è ortogonale al vincolo. Ciò è possibile chiaramente soltanto in $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

L'altra possibilità è che non vi sia tensione. Questo accade quando la molla è alla sua lunghezza di riposo, il che significa

$$\ell_0^2 = R^2\left(\frac{5}{4} - \cos\theta\right)$$

cosa possibile solo se

$$\frac{1}{2}R \le \ell_0 \le \frac{3}{2}R\,.$$

Il relativo angolo è dato da

$$\cos\theta = \frac{5}{4} - \frac{\ell_0^2}{R^2}\,.$$

Domanda 3

Possiamo ottenere le equazioni del moto derivando l'energia totale rispetto al tempo:

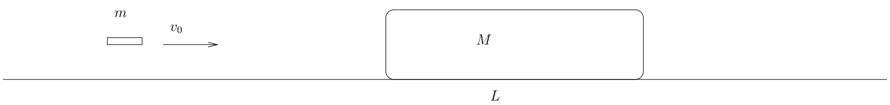
$$\begin{aligned}\dot{E} &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{k}{2}\left(R\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\theta}-\ell_0\right)^2\right] \\ &= mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + k\left(R\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\theta}-\ell_0\right)\frac{\sin\theta}{2\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\theta}}\dot{\theta}\end{aligned}$$

da cui

$$mR^2\ddot{\theta} + \frac{k}{2}\left(R - \frac{\ell_0}{\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\theta}}\right)\sin\theta = 0\,.$$

2.2. 18 giugno 2008

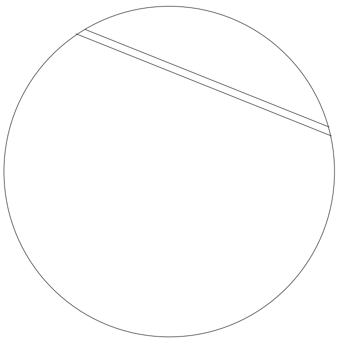
Problema 1 (15 punti)



Un proiettile di massa m viene lanciato con velocità v_0 contro un cuneo di massa M e lunghezza L. Tra proiettile e cuneo in moto relativo si esercita una forza di attrito costante F_0, ed il cuneo è libero di muoversi su un piano orizzontale senza attrito

1. Per quale velocità iniziale v_0 minima il proiettile attraversa il cuneo?
2. Calcolare e rappresentare graficamente l'energia dissipata in funzione di v_0.
3. Calcolare la velocità finale del cuneo nel limite $v_0 \to \infty$.

Problema 2 (15 punti)



Per spostarsi da un punto all'altro della terra si pensa di scavare un tunnel rettilineo che unisca la partenza e la destinazione, come in figura. Una cabina di massa m viene lasciata libera di muoversi nel tunnel, accelerata dalla forza di gravità. Si suppone di poter trascurare gli attriti. Nel seguito si tenga presente che vale la seguente proprietà: all'interno di un qualsiasi guscio sferico di densità omogenea le forze gravitazionali sono nulle. Assumere uniforme la densità della terra.

1. Immaginare di voler fare un viaggio agli antipodi, scavando quindi una galleria passante per il centro della terra. Determinare l'energia potenziale gravitazionale della cabina in funzione della sua distanza dal centro della terra e calcolare il tempo necessario al viaggio.
2. Adesso si vuole viaggiare da Roma (longitudine= $12°27'$, latitudine= $41°55'$) a New York (longitudine= $-70°15'$, latitudine= $40°45'$). Calcolare anche in questo caso il tempo necessario al viaggio.
3. Alternativamente, si vuole fare uno dei due viaggi precedenti (a scelta) su una cabina lanciata in orbita circolare al livello del suolo (trascurare anche in questo caso qualsiasi forma di attrito). Calcolare nuovamente il tempo di percorrenza.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Domanda 2

Domanda 3

Soluzione secondo problema

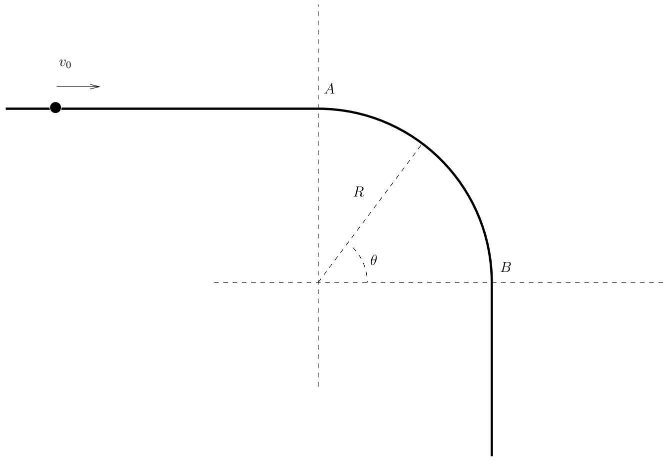
Domanda 1

Domanda 2

Domanda 3

2.3. 18 luglio 2008

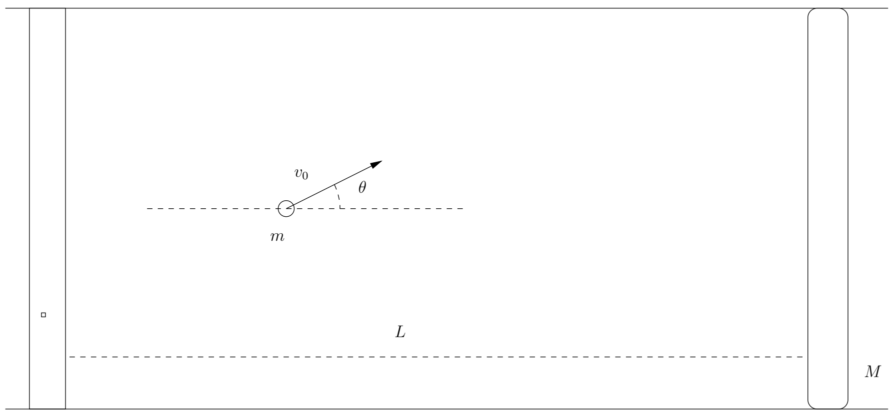
Problema 1



Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi sulla guida in figura, in assenza di attrito e sotto l'azione della forza di gravità. Il tratto compreso tra A e B è un quarto di circonferenza di raggio R. Inizialmente di trova nel tratto orizzontale, con velocità v_0.

1. Supponendo il vincolo bilatero, calcolare la velocità della particella nell'istante in cui arriva in B.
2. Considerando adesso il vincolo monolatero, calcolare per quale angolo θ il punto si stacca dalla guida.
3. Sempre nel caso di vincolo monolatero esiste la possibilità, per una data velocità iniziale v_0, di disegnare la guida tra il punto A e il punto B in modo tale da evitare il distacco? Motivate la vostra risposta e in caso positivo trovate un esempio.

Problema 2



Una particella di massa m è posta all'interno di un contenitore cilindrico. Inizialmente è in movimento con velocità iniziale v_0 in modulo su una traiettoria inclinata di un angolo θ rispetto all'asse del cilindro, come in figura. Le basi del cilindro sono due setti separati inizialmente da una distanza L, quello a sinistra è fissato, quello a destra può scorrere ed è di massa M. La particella urta elasticamente in un tempo trascurabile su pareti e setti, tra il setto mobile e pareti c'è attrito.

1. Inizialmente anche il setto di destra viene bloccato. Mostrare che la media temporale della forza esercitata su un setto dalla particella è proporzionale alla sua energia cinetica, e trovare la costante di proporzionalità.

2. Con le stesse condizioni iniziali si lascia il setto di destra libero di muoversi. Calcolare l'angolo θ della traiettoria della particella dopo un rimbalzo su ciascuno dei due setti, e la sua energia dopo un gran numero di urti.

3. Muovendo con velocità costante molto piccola il setto si riduce della metà il volume del recipiente. Trovare una quantità conservata durante il processo, e calcolare l'energia cinetica finale della particella.

Soluzione problema 1

Domanda 1

Domanda 2

Domanda 3

Soluzione problema 2

Domanda 1

Domanda 2

Domanda 3

2.4. 11 settembre 2008

Problema 1 (15 punti)

Un punto materiale è vincolato a muoversi sotto l'azione della gravità su una superficie liscia, la cui equazione in coordinate cilindriche è $\rho = \alpha z^2$.

1. Determinare le quantità conservate.
2. Studiare l'esistenza di orbite circolari $\rho = r_c$ e determinarne la velocità in funzione di r_c.
3. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni radiali attorno alle orbite circolari.

Problema 2 (15 punti)

Un pendolo di lunghezza ℓ e massa m è montato su un blocco di massa M poggiato su un piano orizzontale. Tra blocco e piano è presente solo attrito statico μ_s ($\mu_d = 0$). Il blocco e il pendolo sono inizialmente in moto con velocità v_0, col pendolo nella sua posizione di equilibrio, e urtano frontalmente un secondo blocco in modo elastico. In seguito all'urto il primo blocco si arresta.

1. Determinare la massa del secondo blocco.
2. Supponendo μ_s abbastanza grande da impedire strisciamenti, determinare il valore minimo di v_0 affinchè il pendolo percorra un giro completo (il vincolo del filo si intende monolatero).
3. Per $v_0 = \sqrt{5g\ell}$ determinare il minimo valore di μ_s affinchè il blocco resti in quiete. Volendo è possibile considerare solo il caso $M \gg m$, dando il risultato al primo ordine in m/M.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Domanda 2

Domanda 3

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Domanda 2

Domanda 3

2.5. 21 gennaio 2009

Problema 1 (15 punti)

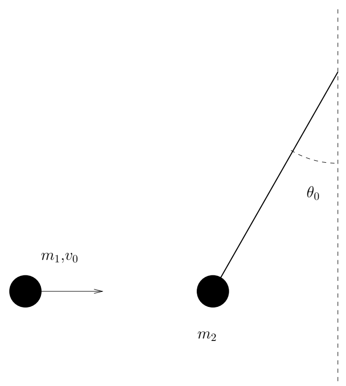
Un cultore di Bungee Jumping ($m = 80\,kg$) vuole lanciarsi da un ponte sospeso ad una altezza di $h = 152\,m$, utilizzando un cavo elastico di lunghezza a riposo ℓ_0 e costante elastica k. Nel seguito si ignori qualsiasi forma di attrito e la massa del cavo, tenendo conto del fatto che quest'ultimo ha effetto solo quando in tensione.

1. Che relazione deve valere tra i parametri in gioco per essere certi di non toccare terra dopo il salto?

2. Calcolare la massima tensione sopportata dal cavo e l'accelerazione minima e massima della massa sospesa.

3. Calcolare il periodo T delle oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio, dicendo in particolare se T dipende dall'ampiezza.

Problema 2 (15 punti)



Nel sistema in figura il pendolo costituito dalla massa m_2 e da una bacchetta rigida di massa trascurabile si trova, al momento dell'urto con la massa m_1, in quiete nella posizione indicata, parametrizzata dall'angolo θ_0.

1. Supponendo l'urto istantaneo e completamente anelastico, trovare se esistono eventuali quantità conservate durante esso.

2. Trovare l'ampiezza dell'oscillazione del pendolo dopo l'urto se la velocità iniziale della massa m_1 vale v_0.

3. Per quali valori di θ_0 l'energia dissipata nell'urto è massima e minima?

Soluzione primo problema

Domanda 1

Domanda 2

Domanda 3

Soluzione secondo problema

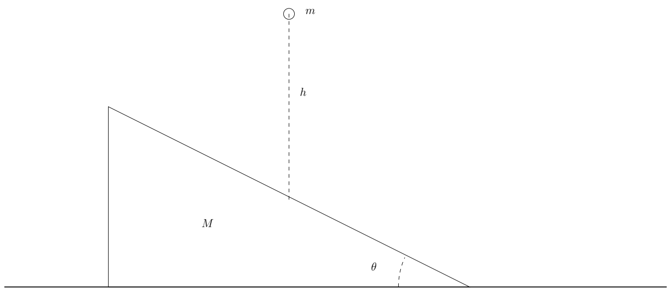
Domanda 1

Domanda 2

Domanda 3

2.6. 12 febbraio 2009

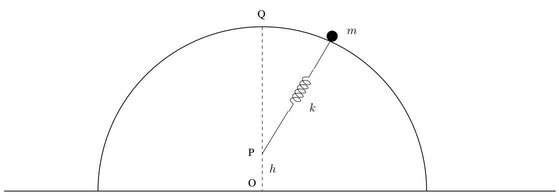
Problema 1 (15 punti)



Il piano inclinato in figura, di massa M e inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo θ, è inizialmente fissato al suolo. Una particella di massa m è lasciata cadere da un'altezza h (misurata rispetto al punto in cui il piano verrà urtato).

1. Calcolare la velocità della particella dopo l'urto (elastico) con il piano inclinato, in modulo, direzione e verso.
2. Stessa domanda, supponendo adesso che il piano inclinato non sia più fissato, ma libero di scivolare senza attrito sul piano di appoggio.
3. Supponendo che tra piano inclinato e suolo sia presente un attrito statico con coefficiente μ_s, per quali valori di μ_s e θ il piano inclinato rimane in quiete dopo l'urto?

Problema 2 (15 punti)



Una particella di massa m può muoversi su una semicirconferenza di raggio R, collegata inoltre al punto P in figura da una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k. P si trova sulla verticale del centro della semicirconferenza O, e $\overline{PO} = h$. Inizialmente la particella si trova nel punto Q.

1. Supponendo $h = 0$ (quindi P coincide con O) trovare per quale valore minimo di k la particella può arrivare fino al piano orizzontale senza staccarsi dalla semicirconferenza, se inizialmente viene spostato di poco da Q.
2. Per un fissato h, con $0 \leq h \leq R$ per quali valori della costante elastica Q è una posizione di equilibrio stabile?

3. È possibile scegliere h e la velocità iniziale della particella in modo che questa percorra il quarto di circonferenza senza staccarsi da essa, e senza che vi sia alcuna reazione vincolare?

Soluzione primo problema

Domanda 1

Domanda 2

Domanda 3

Soluzione secondo problema

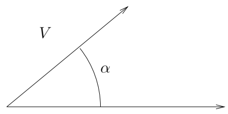
Domanda 1

Domanda 2

Domanda 3

2.7. 23 giugno 2009

Problema 1 (15 punti)



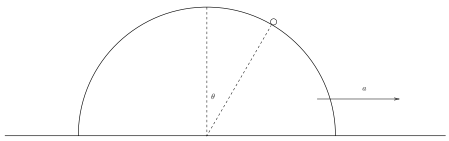
Una nave spaziale di massa M con propulsione a reazione mantiene la direzione del getto di gas inclinata di un angolo α con la direzione del suo movimento, come in figura. Il gas viene emesso con velocità costante V relativa alla nave, e anche la quantità di gas emessa per unità di tempo $\dot{m}$ è costante. Data una velocità iniziale v_0:

1. Calcolare il modulo della velocità della navicella in funzione della massa di gas emessa.

2. Nel caso particolare $\alpha = \pi/2$ determinare la traiettoria della nave

3. Considerando adesso il caso $\alpha = \pi$, la nave inizialmente ferma espelle la metà della sua massa raggiungendo una data velocità finale, quindi riorienta i propulsori ponendo $\alpha = 0$. Calcolare la massa che è necessario espellere per fermarsi.

Problema 2 (15 punti)



La calotta sferica in figura, di raggio R e massa M, è mantenuta in accelerazione costante a mediante una opportuna forza esterna F. Un punto materiale di massa m può scivolare senza attrito sulla sua superficie.

1. Determinare la posizione di equilibrio del punto materiale.

2. Supponendo che questo venga spinto leggermente lontano dalla posizione precedentemente determinata, determinare gli angoli di distacco.

3. Nella situazione precedente determinare la forza esterna F nella condizione iniziale e al momento del distacco.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Detta $\vec{v} = v\hat{\tau}$ la velocità della nave, abbiamo che la velocità del gas si potrà scrivere

$$\vec{v}_g = (V \sin\alpha)\,\hat{n} + (V \cos\alpha + v)\,\hat{\tau} \tag{2.7.1}$$

dove $\hat{\tau}$ è un versore normale e $\hat{n}$ un versore tangente alla traiettoria. Dato che la quantità di moto del sistema comprendente nave spaziale e gas espulso si conserva, possiamo scrivere

$$(M-m)\,\vec{v} = (M-m-dm)\,(\vec{v}+d\vec{v}) + dm\vec{v}_g \tag{2.7.2}$$

ossia

$$(M-m)\,\frac{d\vec{v}}{dm} = (\vec{v}-\vec{v}_g) \tag{2.7.3}$$

Prendendo il prodotto scalare con $\vec{v}$ troviamo

$$(M-m)\,\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dm} = \vec{v}\cdot(\vec{v}-\vec{v}_g) \tag{2.7.4}$$

ossia

$$\frac{1}{2}\,(M-m)\,\frac{dv^2}{dm} = (M-m)\,v\frac{dv}{dm} = -Vv\cos\alpha \tag{2.7.5}$$

che si può integrare direttamente

$$v = v_0 - V\cos\alpha\int_0^\mu \frac{dm}{M-m} = v_0 + V\cos\alpha\log\left(1-\frac{\mu}{M}\right) \tag{2.7.6}$$

Domanda 2

Dall'equazione scritta precedentemente troviamo

$$(M-m)\,\frac{d\vec{v}}{dm} = -V\hat{n} \tag{2.7.7}$$

Scriviamo esplicitamente

$$\vec{\tau} = (\cos\theta,\sin\theta) \tag{2.7.8}$$

e

$$\hat{n} = (-\sin\theta,\cos\theta) \tag{2.7.9}$$

otteniamo

$$(M-m)\left(v\frac{d\theta}{dm}\hat{n}+\frac{dv}{dm}\hat{\tau}\right) = -V\hat{n} \tag{2.7.10}$$

da cui segue che il modulo della velocità è costante, mentre

$$\theta = \frac{V}{v}\log\left(1-\frac{m}{M}\right) = \frac{V}{v}\log\left(1-\frac{\dot{m}}{M}t\right) \tag{2.7.11}$$

e quindi

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{r}}{d\theta} = -\frac{\dot{m}V}{Mv}e^{-v\theta/V}\frac{d\vec{r}}{d\theta} = v\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \tag{2.7.12}$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} = -\beta e^{k\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \tag{2.7.13}$$

dove per brevità si è posto

$$k = \frac{v}{V}, \qquad \beta = \frac{Mv^2}{\dot{m}V} \tag{2.7.14}$$

Integrando otteniamo l'equazione della traiettoria in forma parametrica

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \frac{\beta}{(1+k^2)} \begin{pmatrix} e^{k\theta}\left(k\cos\theta + \sin\theta\right) - k \\ e^{k\theta}\left(-\cos\theta + k\sin\theta\right) + 1 \end{pmatrix} \tag{2.7.15}$$

Scegliendo opportunamente la posizione iniziale otteniamo infine

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{\beta}{(1+k^2)} \begin{pmatrix} e^{k\theta}\left(k\cos\theta + \sin\theta\right) \\ e^{k\theta}\left(-\cos\theta + k\sin\theta\right) \end{pmatrix} \tag{2.7.16}$$

che si può anche scrivere, introducendo

$$\sin\phi = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \tag{2.7.17}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{\beta e^{k\theta}}{\sqrt{1+k^2}} \begin{pmatrix} \sin(\theta+\phi) \\ -\cos(\theta+\phi) \end{pmatrix} \tag{2.7.18}$$

quindi la traiettoria è una spirale.

Domanda 3

Usando le equazioni precedenti vediamo che dopo aver espulso metà della sua massa la nave ha raggiunto la velocità

$$v = V\log 2\,. \tag{2.7.19}$$

Dopo avere orientato nuovamente i propulsori avremo

$$v = V\log 2 + V\log\left(1 - \frac{2\mu}{M}\right) \tag{2.7.20}$$

e quindi la nave si fermerà nuovamente quando

$$1 - \frac{2\mu}{M} = \frac{1}{2} \tag{2.7.21}$$

cioè per una massa espulsa

$$\mu = \frac{M}{4}\,. \tag{2.7.22}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Nel sistema solidale con la calotta, il punto materiale sarà sottoposto alla reazione vincolare

$$\vec{N} = N\left(\hat{y}\cos\theta + \hat{x}\sin\theta\right) \tag{2.7.23}$$

ed a una forza data da

$$\vec{F} = -mg\hat{y} - ma\hat{x} \tag{2.7.24}$$

Si troverà in equilibrio quando reazione vincolare e $\vec{F}$ saranno uguali e opposte, quindi dovrà essere

$$\tan\theta_{eq} = \frac{a}{g} \tag{2.7.25}$$

Domanda 2

Possiamo sempre ragionare nel sistema solidale con la calotta, considerando la direzione verticale quella nella quale si trova la posizione di equilibrio, e una accelerazione di gravità apparente di modulo $g' = \sqrt{a^2 + g^2}$.

Scriviamo l'energia totale, utilizzando come coordinata $\alpha = \theta - \theta_{eq}$. Avremo

$$E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\alpha}^2 + mg'R\cos\alpha = mg'R \tag{2.7.26}$$

da cui possiamo ricavare

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{2g'}{R}(1 - \cos\alpha) \tag{2.7.27}$$

Consideriamo adesso l'equazione del moto in direzione radiale. Avremo

$$-m\dot{\alpha}^2 R = -mg'\cos\alpha + N \tag{2.7.28}$$

e la condizione per il distacco sarà $N = 0$, cioè

$$\cos\alpha = \frac{2}{3} \tag{2.7.29}$$

Il distacco avverrà quindi per

$$\theta = \theta_{eq} \pm \arccos\frac{2}{3} \tag{2.7.30}$$

Domanda 3

Nella condizione iniziale il punto materiale accelera insieme alla calotta, quindi sarà

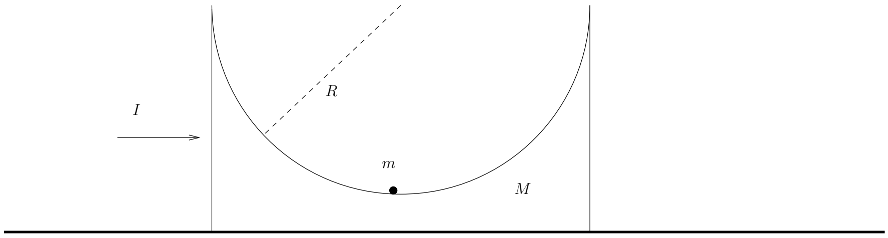
$$F = (M + m)a \tag{2.7.31}$$

al momento del distacco la sola calotta sarà accelerata, quindi

$$F = Ma \tag{2.7.32}$$

2.8. 13 luglio 2009

Problema 1 (15 punti)



La scodella semisferica in figura ha massa M e raggio R, e può traslare liberamente sul piano orizzontale. Sul fondo si trova una particella di massa m. Non vi sono attriti.

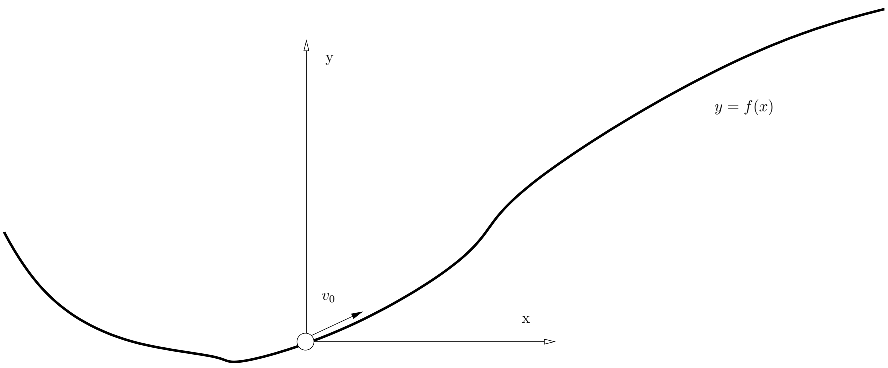
Viene comunicato istantaneamente alla scodella un impulso orizzontale I.

1. Quanto vale la velocità iniziale della scodella e del punto materiale? Quali sono le quantità conservate del sistema?

2. Determinare l'impulso minimo $\overline{I}$ necessario a far giungere la particella al bordo della scodella.

3. Determinare l'angolo che la particella forma con l'orizzontale al momento del distacco, quando $I \gg \overline{I}$.

Problema 2 (15 punti)



Una particella viene lanciata con velocità iniziale v_0 su una guida liscia descritta dall'equazione $y = f(x)$ in presenza di gravità. Si osserva che la sua velocità varia nel tempo secondo la legge

$$v(t) = v_0 e^{-\lambda t} \tag{2.8.1}$$

dove λ è una costante positiva.

1. Quanto spazio viene percorso in totale?

2. Determinare una possibile $f(x)$.

3. Determinare un possibile $f(x)$ in presenza di una forza di attrito viscoso $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$, con α scelto a piacere (ma non nullo...).

Soluzione primo problema

Domanda 1

Domanda 2

Domanda 3

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Domanda 2

Domanda 3

2.9. 17 settembre 2009

Problema 1 (15 punti)

Un punto materiale si muove su una rotaia parabolica verticale con equazione $y = \alpha x^2$ in presenza di gravità. La velocità v lungo l'asse orizzontale è costante.

1. Si calcoli il modulo dell'accelerazione in funzione del tempo.
2. Esiste una velocità per la quale la rotaia non esercita una reazione vincolare? Se sì, se ne calcoli il valore in funzione di α e v.
3. Si consideri adesso la stessa rotaia accelerata orizzontalmente con accelerazione costante a. Trovare le possibili posizioni di equilibrio per un punto materiale vincolato ad essa, in assenza di attriti.

Problema 2 (15 punti)

Un proiettile di massa m e velocità v colpisce un bersaglio fermo di massa M ignota. L'urto è elastico e il proiettile rimbalza all'indietro con velocità v'.

1. Si calcoli la massa del bersaglio.
2. Un altro proiettile con stessa massa e velocità colpisce il bersaglio. Si osserva che la massima velocità del proiettile dopo l'urto nella direzione trasversale è v''. Si calcoli la massa del bersaglio, sempre nel caso di urto elastico.
3. Si osserva ora che il proiettile viene deviato di un angolo θ. L'urto è elastico. Per una fissata velocità finale del proiettile si stabilisca la relazione tra M e θ.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Derivando il vettore posizione

$$\vec{R} = \left(x, \alpha x^2\right) \tag{2.9.1}$$

troviamo la velocità

$$\vec{V} = (\dot{x}, 2\alpha x \dot{x}) = v(1, 2\alpha x) \tag{2.9.2}$$

e derivando ulteriormente abbiamo l'accelerazione

$$\vec{A} = (0, 2\alpha v^2) \tag{2.9.3}$$

che quindi ha modulo $|A| = 2\alpha v^2$ costante nel tempo.

Domanda 2

Le equazioni del moto si scrive

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= N_x && (2.9.4)\\
m\ddot{y} &= N_y - mg && (2.9.5)
\end{aligned}
$$

e sostituendo quanto trovato precedentemente abbiamo

$$
\begin{aligned}
0 &= N_x && (2.9.6)\\
2m\alpha v^2 &= N_y - mg && (2.9.7)
\end{aligned}
$$

Per avere $N_x = N_y = 0$ deve essere

$$v = \pm\sqrt{-\frac{g}{2\alpha}} \tag{2.9.8}$$

che è quindi possibile solo se $\alpha < 0$.

Domanda 3

Avremo equilibrio quando la somma della forza di gravità e della forza apparente nel sistema solidale alla rotaia

$$\vec{F} = (-ma, -mg) \tag{2.9.9}$$

è normale al vincolo. Un vettore tangente alla guida è dato da

$$\frac{d\vec{R}}{dx} = (1, 2\alpha x) \tag{2.9.10}$$

e quindi deve essere

$$\frac{d\vec{R}}{dx} \cdot \vec{F} = -ma - 2\alpha x mg = 0 \tag{2.9.11}$$

e quindi

$$x = -\frac{a}{2\alpha g} \tag{2.9.12}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Imponendo la conservazione dell'energia e della quantità di moto abbiamo

$$
\begin{aligned}
mv &= -mv' + MV && (2.9.13)\\
\frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV^2 && (2.9.14)
\end{aligned}
$$

da cui

$$v + v' = \frac{M}{m} V \tag{2.9.15}$$

$$(v + v')(v - v') = \frac{M}{m} V^2 \tag{2.9.16}$$

e quindi, se $v \neq v'$

$$v + v' = \frac{M}{m} V \tag{2.9.17}$$

$$(v - v') = V \tag{2.9.18}$$

da cui

$$M = \frac{v + v'}{v - v'} m \tag{2.9.19}$$

Domanda 2

Scriviamo nuovamente la conservazione di energia e quantità di moto,

$$mv = mv_x + MV_x \tag{2.9.20}$$

$$0 = mv_y + MV_y \tag{2.9.21}$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m \left(v_x^2 + v_y^2 \right) + \frac{1}{2} M (V_x^2 + V_y^2) \tag{2.9.22}$$

Eliminando V_x, V_y dall'ultima equazione abbiamo

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + \frac{m}{M} (v - v_x)^2 + \frac{m}{M} v_y^2 \tag{2.9.23}$$

Ricaviamo la velocità trasversale

$$v_y^2 = \frac{M}{M + m} \left[v^2 - v_x^2 - \frac{m}{M} (v - v_x)^2 \right] \tag{2.9.24}$$

e massimizziamo rispetto a v_x:

$$\frac{dv_y^2}{dv_x} = \frac{2M}{M + m} \left[\frac{m}{M} (v - v_x) - v_x \right] = 0 \tag{2.9.25}$$

da cui

$$v_x = \frac{m}{M + m} v \tag{2.9.26}$$

Sostituendo troviamo la massima velocità trasversale

$$v'' = \frac{M}{M + m} v \tag{2.9.27}$$

e quindi la massa del bersaglio

$$M = \frac{v''}{v - v''} m \tag{2.9.28}$$

Domanda 3

Scriviamo ancora le leggi di conservazione, in forma vettoriale:

$$\vec{v} - \vec{v}_f = \frac{M}{m} \vec{V} \tag{2.9.29}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} M V^2 \tag{2.9.30}$$

Elevando al quadrato ambo i membri della prima equazione abbiamo

$$v^2 + v_f^2 - 2 v v_f \cos\theta = \frac{M^2}{m^2} V^2 \tag{2.9.31}$$

e eliminando la velocità del proiettile usando la conservazione dell'energia otteniamo

$$v^2 + v_f^2 - 2 v v_f \cos\theta = \frac{M}{m} \left(v^2 - v_f^2 \right) \tag{2.9.32}$$

da cui

$$M = m \frac{v^2 + v_f^2 - 2 v v_f \cos\theta}{v^2 - v_f^2} \tag{2.9.33}$$

2.10. 21 gennaio 2010

Problema 1

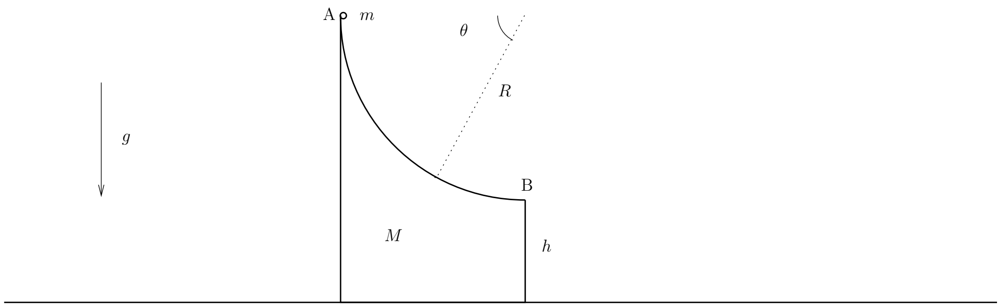
Un punto materiale di massa m viene lanciato a $t = 0$ con velocità iniziale v_0 in modulo e con una direzione che forma un angolo θ con il piano orizzontale $y = 0$. Fino a quando non ricade sul piano, il suo moto si svolge sotto l'azione di una forza $\vec{F}(x, y)$ non nota secondo le leggi orarie

$$x = at \tag{2.10.1}$$
$$y = b \sin kt \tag{2.10.2}$$

dove k è una costante nota.

1. Determinare a e b in termini di v_0, k e θ.
2. Trovare la traiettoria, e discutere i valori possibili della gittata.
3. Determinare $\vec{F}(x, y)$.

Problema 2



Una particella di massa m viene lasciata libera nel punto A con velocità iniziale nulla, e scivola sulla guida priva di attrito fino al punto B. La guida ha il profilo superiore di un quarto di circonferenza di raggio R, massa M, può muoversi sul piano orizzontale liscio ed è pure inizialmente ferma. Il punto B è ad una altezza h da terra.

1. Determinare lo spostamento della guida quando la particella arriva in B.
2. Determinare la velocità della particella quando, dopo essersi staccata dalla guida in B, arriva a terra.
3. Se nel punto B avviene un urto completamente anelastico con un ostacolo attaccato alla guida, dopo il quale la particella rimane fissata ad esso, determinare la velocità finale del sistema.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Derivando si ottengono le componenti della velocità

$$\dot{x}(t) = a \quad (2.10.3)$$
$$\dot{y}(t) = bk\cos kt \quad (2.10.4)$$

ed ponendo $\dot{x}(0) = v_0 \cos\theta$ e $\dot{y}(0) = v_0 \sin\theta$ si trova

$$a = v_0 \cos\theta \quad (2.10.5)$$
$$b = \frac{v_0}{k}\sin\theta \quad (2.10.6)$$

Domanda 2

Sostituendo $t = x/a$ nella seconda equazione si trova

$$y = b\sin\left(\frac{kx}{a}\right) = \frac{v_0 \sin\theta}{k}\sin\left(\frac{kx}{v_0\cos\theta}\right) \quad (2.10.7)$$

Per calcolare la gittata poniamo $y = 0$. Questo significa (supponendo $0 < \theta < \pi/2$)

$$d = \frac{\pi v_0}{k}\cos\theta \quad (2.10.8)$$

quindi la gittata è tanto maggiore quanto più piccolo è θ, al limite $d = \pi v_0/k$.

Domanda 3

Derivando due volte rispetto al tempo si trova

$$\ddot{x} = 0 \quad (2.10.9)$$
$$\ddot{y} = -bk^2 \sin kt \quad (2.10.10)$$

ossia

$$\vec{F} = m\ddot{x}\hat{x} + m\ddot{y}\hat{y} = -mk^2 y\hat{y} \quad (2.10.11)$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che si conserva la quantità di moto orizzontale del sistema l'ascissa del centro di massa non cambia. Calcolando quest'ultimo all'inizio e alla fine abbiamo

$$x_{cm} = \frac{mx^{(i)} + MX^{(i)}}{m+M} = \frac{m\left(x^{(i)}+\delta\right) + M\left(X^{(i)}+\Delta\right)}{m+M} \quad (2.10.12)$$

dove si è indicato con δ e Δ gli spostamenti orizzontali finali della particella e della guida. Inoltre lo spostamento orizzontale finale della particella relativo alla guida vale

$$\delta - \Delta = R \tag{2.10.13}$$

e sostituendo $\delta^{(i)}$ nella prima relazione abbiamo

$$\Delta = -\frac{m}{m+M}R \tag{2.10.14}$$

Domanda 2

L'energia del sistema si conserva, e si può scrivere nella forma

$$E = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{X} + R\dot{\theta}\sin\theta\right)^2 + R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\right] - mgR\sin\theta \tag{2.10.15}$$

dove si sono scelte come coordinate la posizione orizzontale della guida e l'angolo in figura. Anche la quantità di moto orizzontale si conserva, e vale

$$P_x = M\dot{X} + m\left(\dot{X} + R\dot{\theta}\sin\theta\right) \tag{2.10.16}$$

Inizialmente $E = 0$ e $P_x = 0$. Quando la particella arriva in B ($\theta = \pi/2$) avremo quindi

$$(M+m)\,\dot{X} + mR\dot{\theta} = 0 \tag{2.10.17}$$

e

$$\frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{X} + R\dot{\theta}\right)^2 - mgR = 0 \tag{2.10.18}$$

da cui

$$\dot{X} = -\frac{mR}{m+M}\dot{\theta} \tag{2.10.19}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R}\left(1+\frac{m}{M}\right)} \tag{2.10.20}$$

Infine

$$v_x = \dot{X} + R\dot{\theta}\sin\frac{\pi}{2} = \sqrt{2gR\left(\frac{M}{M+m}\right)} \tag{2.10.21}$$

$$v_y = -R\dot{\theta}\cos\frac{\pi}{2} = 0 \tag{2.10.22}$$

Il moto che segue sarà a velocità uniforme lungo x, e uniformemente accelerato ($a = -g$)

lungo y. Quindi al momento di arrivare a terra

$$v_x = \sqrt{2gR\left(\frac{M}{M+m}\right)} \tag{2.10.23}$$

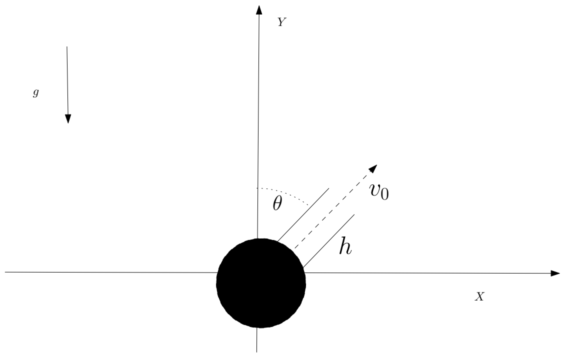
$$v_y = -\sqrt{2gh} \tag{2.10.24}$$

Domanda 3

La velocità del centro di massa in direzione orizzontale è sempre nulla, quindi dopo l'urto il sistema è fermo.

2.11. 12 febbraio 2010

Problema 1



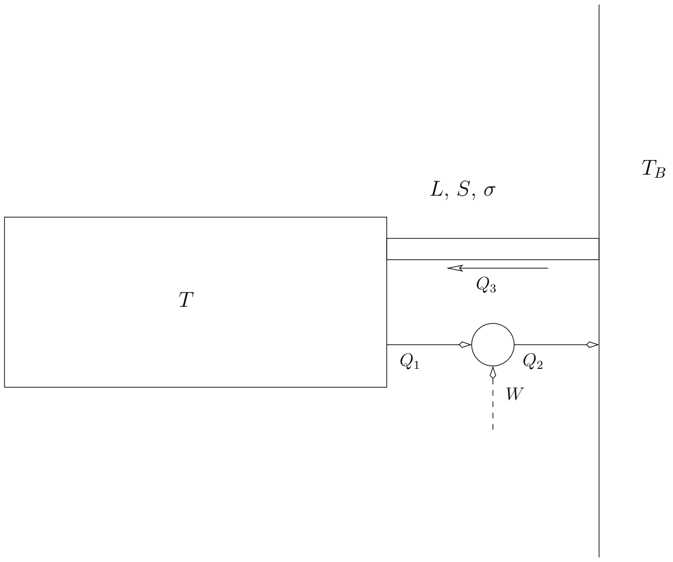
Un irrigatore da giardino espelle un getto d'acqua da un ugello di lunghezza h orientato come in figura. La velocità dell'acqua relativa all'ugello è costante e vale v_0, e in tutte le domande che seguono si può considerare il limite $h \to 0$.

1. Come si deve orientare l'ugello per irrigare il più lontano possibile? Quanto vale la distanza raggiunta in tal caso?

2. Supponendo che θ percorra molto lentamente tutto l'intervallo $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ determinare la regione nella quale una mosca di passaggio corre il rischio di bagnarsi, nella forma $y < y_{max}(x)$..

3. Calcolare la massima distanza raggiunta dall'acqua se l'orientazione dell'ugello varia secondo la legge
$$\theta(t) = \frac{\pi}{2}\left(-1 + \frac{u}{h}t\right) \tag{2.11.1}$$
nell'intervallo $0 < t < 2h/u$, dove u è una costante.

Problema 2



Un punto materiale di massa m è fissato ad un estremo di un'asta di lunghezza ℓ. L'altro estremo dell'asta, che è priva di massa, è fissato all'origine di un sistema di coordinate cartesiane, ma libero di ruotare. Inoltre la massa e collegata mediante una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k ad un punto posto sulla verticale dell'origine, ad un'altezza $h > 0$.

1. Sotto quali condizioni $\theta = 0$ è una posizione di equilibrio stabile?
2. Nel caso $h = mg/k$ la particella si trova nella posizione $\theta = 0$ con velocità v_0. Determinare dopo quanto tempo $\theta = \pi$.
3. Nel caso $h = \frac{1}{2}mg/k$ la particella si trova inizialmente in $\theta = 0$ con velocità praticamente nulla. Calcolare la forza applicata dalla sbarra alla particella per $\theta = \pi/2$, sapendo che è diretta orizzontalmente.

Soluzione primo problema

Domanda 1 Le equazioni del moto sono, per un dato θ,

$$
\begin{aligned}
x &= v_0 \sin\theta\, t \\
y &= v_0 \cos\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2
\end{aligned}
$$

e il tempo di volo si trova ponendo $y = 0$:

$$
t^* = \frac{2 v_0 \cos\theta}{g}
$$

Sostituendo troviamo la gittata

$$x(t^*) = \frac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

che è massima per $\theta = \pi/4$. In tale caso vale

$$x_{max}(t^*) = \frac{v_0^2}{g} \tag{2.11.2}$$

Domanda 2 La traiettoria si scrive

$$y = \frac{x}{\tan\theta} - \frac{g}{2v_0^2 \sin^2\theta} x^2 \tag{2.11.3}$$

e a fissato x possiamo determinare l'altezza massima raggiunta dall'acqua, massimizzando rispetto all'angolo θ. Conviene riscrivere la traiettoria nella forma

$$y = x\cot\theta - \frac{g}{2v_0^2}\left(1+\cot^2\theta\right)x^2 \tag{2.11.4}$$

e derivare rispetto a $\cot\theta$:

$$\frac{dy}{d\cot\theta} = x - \frac{gx^2}{v_0^2}\cot\theta = 0 \tag{2.11.5}$$

Sostituendo si trova

$$y_{max}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{v_0^2}{g} - \frac{gx^2}{v_0^2}\right) \tag{2.11.6}$$

Domanda 3 Osserviamo che l'ugello ruota con velocità angolare costante (infinita nel limite $h \to 0$)

$$\omega = \frac{\pi}{2}\frac{u}{h}$$

e la sua estremità con velocità $v_T = \frac{\pi}{2}u$. Il modulo della velocità del getto d'acqua all'istante in cui esce dall'ugello sarà quindi

$$V_0 = \sqrt{v_0^2 + \frac{\pi^2}{4}u^2}$$

Per quanto riguarda la direzione, osserviamo che l'angolo ϕ tra il getto e la verticale assumerà sicuramente il valore $\pi/4$ corrispondente alla massima gittata, e quindi quest'ultima sarà data semplicemente da

$$d = \frac{V_0^2}{g} = \frac{v_0^2 + \frac{\pi^2}{4}u^2}{g} \tag{2.11.7}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1 Scriviamo l'energia potenziale, come somma di quella gravitazionale e di quella elastica:

$$U = mg\ell\cos\theta + \frac{1}{2}k\left[(h-\ell\cos\theta)^2 + \ell^2\sin^2\theta\right] = \ell\left(mg - kh\right)\cos\theta + \text{costante}$$

Per la stabilità è necessario che essa abbia un minimo in $\theta = 0$. Questo accade se

$$h > \frac{mg}{k}$$

Domanda 2 Se $h = mg/k$ il potenziale è costante, in altre parole l'energia è solo quella cinetica

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

e l'equazione del moto da

$$\ddot{\theta} = 0$$

Quindi la velocità angolare è costante, e la particella si muove di moto circolare uniforme. Il tempo necessario a percorrere metà circonferenza sarà quindi

$$\tau = \frac{\pi\ell}{v_0}$$

Domanda 3 In questo caso l'energia si scrive

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mg\ell\cos\theta = \frac{1}{2}mg\ell$$

Possiamo scrivere quindi

$$v^2 = g\ell\left(1-\cos\theta\right) \tag{2.11.8}$$

che calcolato in $\theta = \pi/2$ dà il quadrato della velocità quando la particella arriva nella posizione finale desiderata.

Scriviamo l'equazione del moto nella direzione orizzontale che deve valere in tale istante:

$$-m\frac{v^2}{\ell} = F - k\ell \tag{2.11.9}$$

dove F è la forza cercata. Sostituendo troviamo

$$F = k\ell - mg \tag{2.11.10}$$

2.12. 23 giugno 2010

Problema 1

Una pallina di massa m, che si può approssimare come un punto materiale, si trova inizialmente in quiete su in piano orizzontale privo di attrito. Un corpo della forma in figura (il profilo superiore è un quarto di circonferenza di raggio R), di uguale massa, viene lanciato verso di esso con velocità iniziale v_0.

1. Per quale valore della velocità iniziale v_0^* la pallina giunge alla sommità del corpo?
2. Supponendo $v_0 < v_0^*$ determinare la velocità del corpo quando la pallina raggiunge l'altezza massima.
3. Supponendo adesso $v_0 > v_0^*$, determinare la forza applicata dalla pallina al corpo al momento del distacco da esso.

Problema 2

Un punto materiale di massa m si muove in un piano orizzontale, confinato in una regione circolare di raggio R da una parete cilindrica su cui può rimbalzare elasticamente. Il punto è inoltre fissato al centro della regione da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Ricordiamo che in assenza della parete le orbite sono ellittiche.

1. Per quali valori dell'energia E_0 e del momento angolare iniziale L_0 (valutato rispetto al centro della regione) la particella urta le pareti?
2. Per quali valori del momento angolare sono possibili orbite circolari?
3. Calcolare l'impulso ceduto alle pareti in un urto, in funzione di E_0 e L_0.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Usando la conservazione dell'energia nel sistema del centro di massa abbiamo

$$\frac{1}{2}\mu\left(v_0^*\right)^2 = mgR$$

dove $\mu = m/2$ è la massa ridotta. Segue

$$v_0^* = \sqrt{4gR}$$

Domanda 2

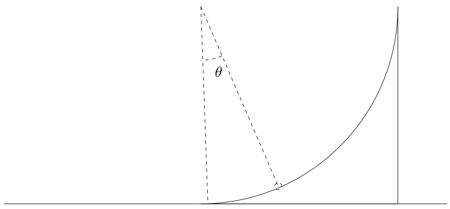
Quando la pallina raggiunge l'altezza massima si muove con la stessa velocità V (orizzontale) del corpo. Dalla conservazione della quantità di moto orizzontale troviamo

$$mv_0 = 2mV$$

e quindi

$$V = \frac{v_0}{2}$$

Domanda 3



Detta X la posizione orizzontale del centro dell'arco di circonferenza, e θ l'angolo che determina la posizione della pallina su di esso come in figura, possiamo scrivere la quantità di moto orizzontale come

$$P = m\left(2\dot{X} + R\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

Da questa seconda relazione otteniamo

$$m\dot{X} = \frac{1}{2}\left(P - mR\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

e derivando abbiamo la forza applicata al corpo

$$F = m\ddot{X} = \frac{1}{2}\left(mR\dot{\theta}^2\sin\theta - mR\ddot{\theta}\cos\theta\right)$$

Al momento del distacco $\theta = \pi/2$ e quindi

$$F = \frac{1}{2}mR\dot{\theta}^2$$

Ricaviamo $\dot{\theta}^2$ dalla conservazione dell'energia. Nel momento del distacco l'energia nel sistema del centro di massa vale

$$E = \frac{1}{2}\mu R^2\dot{\theta}^2 + mgR = \frac{1}{2}\mu v_0^2$$

e quindi

$$\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R^2} - \frac{4g}{R}$$

da cui

$$F = \frac{m}{2R}\left(v_0^2 - 4gR\right)$$

Notare che $F = 0$ se $v_0 = v_0^*$.

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Senza le pareti possiamo scrivere l'energia totale (conservata) nella forma

$$E_0 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{k}{2}r^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2}$$

dove L è il momento angolare rispetto al centro, pure conservato. Il massimo e il minimo allontanamento dal centro sono determinati da $\dot{r} = 0$, ossia

$$r^4 - \frac{2E_0}{k}r^2 + \frac{L_0^2}{km} = 0$$

Risolvendo troviamo

$$r^2 = \frac{E_0}{k} \pm \sqrt{\frac{E_0^2}{k^2} - \frac{L_0^2}{km}}$$

da cui la condizione per avere un urto

$$\frac{E_0}{k} + \sqrt{\frac{E_0^2}{k^2} - \frac{L_0^2}{km}} > R$$

Domanda 2

In un'orbita circolare la distanza massima e minima dal centro coincidono. Dall'equazione scritta precedentemente segue che deve essere

$$\frac{E_0^2}{k^2} = \frac{L_0^2}{km}$$

Inoltre

$$r^2 = \frac{E_0}{k} = \frac{|L_0|}{\sqrt{km}}$$

da cui si trova che orbite circolari saranno possibili per

$$|L_0| < R^2\sqrt{km}$$

Domanda 3

Quando arriva ad urtare contro la parete la particella ha una quantità di moto radiale $p_r = m\dot{r}$ determinata da

$$E_0 = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{k}{2}R^2 + \frac{L_0^2}{2mR^2}$$

ossia, risolvendo,

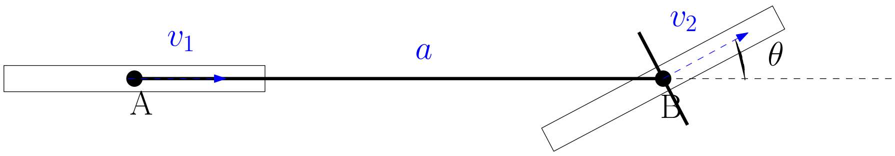
$$p_r = \sqrt{2m\left(E_0 - \frac{k}{2}R^2 - \frac{L_0^2}{2mR^2}\right)}$$

Nell'urto p_r cambia di segno, mentro la quantità di moto tangenziale resta costante. L'impulso ceduto, in direzione radiale. è dunque

$$-\Delta p_r = 2\sqrt{2m\left(E_0 - \frac{k}{2}R^2 - \frac{L_0^2}{2mR^2}\right)}$$

2.13. 14 luglio 2010

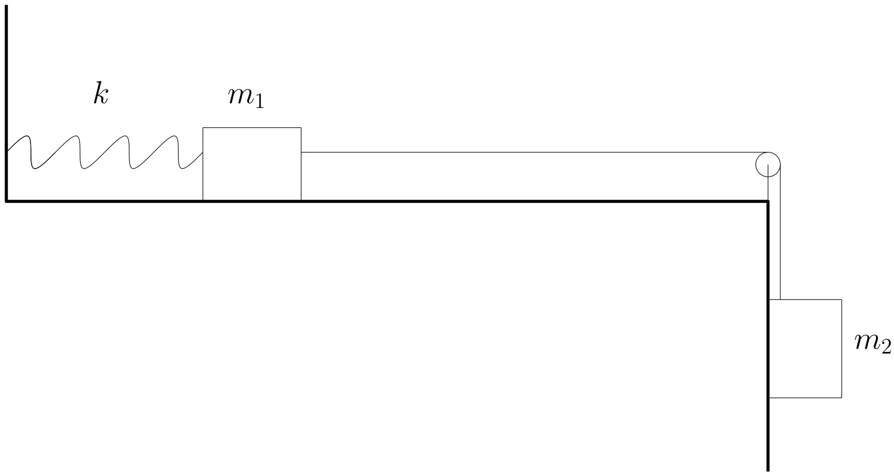
Problema 1



Una schema molto semplice di bicicletta è rappresentato in figura. I due punti di contatto con il suolo A e B si muovono istante per istante con velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, parallelamente alla direzione della ruota. Poniamo $a = \overline{AB}$ e indichiamo con θ l'angolo di rotazione del manubrio.

1. Trovare la relazione tra $|\vec{v}_1|$ e $|\vec{v}_2|$, in funzione dell'angolo θ.
2. Determinare per dati $|\vec{v}_1|$ e θ la legge oraria del punto B in un sistema di riferimento con origine nel punto A, e assi in direzione fissa rispetto al suolo.
3. Determinare la traiettoria del punto A in un sistema di riferimento fissato al suolo.

Problema 2



Le due masse in figura sono collegate da un filo inestensibile di massa nulla, e la prima è vincolata alla parete da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla.

1. Si determini l'allungamento della molla all'equilibrio.
2. Determinare la frequenza delle oscillazioni del sistema, nell'ipotesi che la massa m_1 non urti contro la parete.
3. Supponendo che il filo sia in grado di sopportare una tensione massima T_M, determinare la massima velocità iniziale che le masse possono avere nella posizione di equilibrio per evitare che questo si spezzi.

Soluzione primo problema

Domanda 1 Dato che la distanza tra A e B non può variare deve essere

$$|\vec{v}_2|\cos\theta = |\vec{v}_1|$$

Domanda 2 Nel sistema di riferimento specificato il punto A è fisso, e il punto B si muove di moto circolare uniforme con velocità tangenziale

$$v'_T = |\vec{v}_2|\sin\theta = |\vec{v}_1|\tan\theta$$

quindi

$$\begin{aligned} x'_B &= a\cos\omega t \\ y'_B &= a\sin\omega t \end{aligned}$$

con

$$\omega = \frac{|\vec{v}_1|}{a}\tan\theta$$

Domanda 3 Nel sistema di riferimento fisso al suolo il punto A si muove nella direzione di B con velocità costante in modulo $|\vec{v}_1|$. La direzione quindi ruota con la velocità angolare ω determinata al punto precedente. Quindi

$$\begin{aligned} \dot{x}_A &= |\vec{v}_1|\cos\omega t \\ \dot{y}_A &= |\vec{v}_1|\sin\omega t \end{aligned}$$

ed integrando otteniamo, immaginando A inizialmente nell'origine,

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{1}{\omega}|\vec{v}_1|\sin\omega t = a\cot\theta\sin\omega t \\ y_A &= \frac{1}{\omega}|\vec{v}_1|(1-\cos\omega t) = a\cot\theta\,(1-\cos\omega t) \end{aligned}$$

Possiamo riscrivere le relazioni precedenti nella forma

$$\begin{aligned} x_A &= a\cot\theta\sin\omega t \\ y_A - a\cot\theta &= -a\cot\theta\cos\omega t \end{aligned}$$

e sommando ambo i membri al quadrato otteniamo

$$x_A^2 + (y_A - a\cot\theta)^2 = a^2\cot^2\theta$$

La traiettoria è quindi una circonferenza di raggio $a\cot\theta$ e centro in $(0, a\cot\theta)$.

Soluzione secondo problema

Domanda 1 Deve essere

$$k\ell = T = m_2 g$$

da cui

$$\ell = \frac{m_2 g}{k}$$

Domanda 2 Scriviamo le equazioni del moto:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} &= -kx + T \\ m_2 \ddot{x} &= m_2 g - T \end{aligned}$$

sommando membro a membro eliminiamo la tensione ottenendo

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + kx = m_2 g$$

da cui otteniamo

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

Domanda 3 Dalle seconda delle due equazioni scritte in precedenza ricaviamo addesso la tensione, ottenendo

$$T = m_2 \left(g - \ddot{x}\right)$$

e dato che

$$\begin{aligned} x &= \ell + A \sin \omega t \\ v &= A\omega \cos \omega t \end{aligned}$$

otteniamo

$$A\omega = v_0$$

e quindi

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin \omega t = -\omega v_0 \sin \omega t$$

Deve quindi essere

$$T_M > m_2 \left(g + \omega v_0\right)$$

e quindi

$$v_0 < \frac{1}{\omega}\left(\frac{T_M}{m_2} - g\right)$$

2.14. 10 settembre 2010

Problema 1 (15 punti)

La traiettoria di una particella nel piano è descritta in coordinate polari dall'equazione

$$r = \frac{d}{\cos\theta}$$

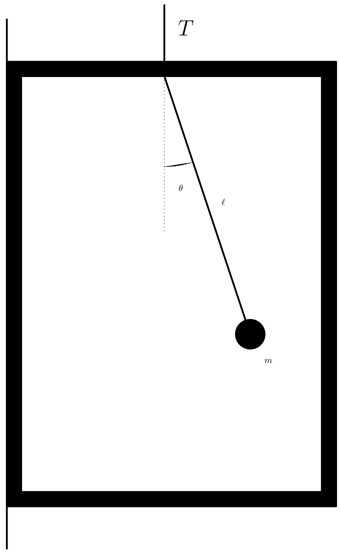
dove $d > 0$ è una costante assegnata.

1. Rappresentare graficamente la traiettoria in un piano cartesiano.
2. Determinare il vettore accelerazione in coordinate polari, in funzione di θ, $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$.
3. Determinare $r(t)$ sapendo che il vettore velocità è costante ed ha modulo V, e che $r(0) = d$.

Può essere utile ricordare l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

Esercizio 2 (15 punti)



La cabina di un ascensore di massa M può muoversi in direzione verticale, ed è trattenuta da un cavo sottoposto ad una tensione T. All'interno di essa è fissato un pendolo costituito da una massa m sospesa a un filo inestensibile e privo di massa di lunghezza ℓ. Inizialmente la cabina è ferma ed il pendolo compie oscillazioni di ampiezza angolare θ_0, come in figura.

1. Determinare la massima e la minima tensione del cavo che regge l'ascensore.

2. Supponiamo adesso che le oscillazioni siano piccole, $\theta_0 \ll 1$. Ad un certo istante il pendolo si trova in posizione verticale, e l'ascensore viene trascinato dal cavo verso l'alto, con accelerazione costante a. Calcolare la nuova ampiezza delle oscillazioni.

3. Appena il pendolo torna in posizione verticale l'ascensore smette di accelerare. Calcolare il lavoro fatto sino a quel momento dal motore che trascinava il cavo.

Soluzione primo problema

Domanda 1 L'equazione si può porre nella forma

$$d = r\cos\theta = x$$

segue che la traiettoria è una retta verticale a una distanza d dall'origine.

Domanda 2 Dato che la traiettoria è rettilinea, l'accelerazione vale

$$\vec{a} = \ddot{y}\hat{e}_y$$

Dato che

$$y = r\sin\theta = d\tan\theta$$

troviamo

$$\dot{y} = \frac{d}{\cos^2\theta}\dot{\theta}$$

e

$$\ddot{y} = \frac{d}{\cos^2\theta}\ddot{\theta} + \frac{d\sin\theta}{\cos^2\theta}\dot{\theta}^2$$

e dato che

$$\hat{e}_y = \hat{e}_r\sin\theta + \hat{e}_\theta\cos\theta$$

troviamo

$$\vec{a} = \frac{d}{\cos^2\theta}\left(\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2\sin\theta\right)(\hat{e}_r\sin\theta + \hat{e}_\theta\cos\theta)$$

Domanda 3 Per il vettore velocità abbiamo

$$\vec{v} = \dot{y}\hat{e}_y = \pm V\hat{e}_y$$

Segue immediatamente che

$$\begin{aligned} x &= d \\ y &= y(0) \pm Vt \end{aligned}$$

e quindi

$$r(t) = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{d^2 + (y(0) \pm Vt)^2}$$

che imponendo $r(0) = d$ si riduce a

$$r(t) = \sqrt{d^2 + V^2 t^2}$$

Alternativamente si può scrivere

$$\frac{d}{\cos^2\theta}\dot{\theta} = V$$

ed integrando

$$d\int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = Vt$$

da cui ($\theta(0) = 0$ dato che $r(0) = d$)

$$d\tan\theta(t) = Vt$$

ma

$$r = \frac{d}{\cos\theta} = d\sqrt{1 + \tan^2\theta} = \sqrt{d^2 + V^2 t^2}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1 La tensione del filo deve equilibrare la somma della forza peso della cabina e della componente verticale della tensione T_P del pendolo. Scrivendo l'equazione del moto di quest'ultimo nella direzione del filo abbiamo

$$m\ell\dot{\theta}^2 = T_P - mg\cos\theta$$

ossia

$$T_P = m\ell\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$$

Dalla conservazione dell'energia abbiamo

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta = -mg\ell\cos\theta_0$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

e quindi

$$T_P = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)$$

In conclusione

$$\begin{aligned} T &= T_P\cos\theta + Mg \\ &= mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)\cos\theta + Mg \end{aligned}$$

da cui

$$
\begin{aligned}
T_{MAX} &= mg\,(3-2\cos\theta_0)+Mg \\
T_{MIN} &= Mg
\end{aligned}
$$

rispettivamente per $\theta=0$ e $\theta=\theta_0$.

Domanda 2 Lavoriamo nel sistema di riferimento dell'oscillatore. Prima dell'accelerazione, che supponiamo iniziare a $t=0$, abbiamo

$$\theta=\theta_0\sin\omega_0 t$$

con

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Dopo l'accelerazione sarà, tenendo conto della continuità,

$$\theta=\theta_1\sin\omega_1 t$$

dove

$$\omega_1=\sqrt{\frac{g+a}{\ell}}$$

Imponendo anche la continuità di $\dot\theta$ troviamo

$$\theta_1=\frac{\omega_0}{\omega_1}\theta_0$$

Domanda 3 Il pendolo tornerà in posizione verticale a

$$\tau=\frac{\pi}{\omega_1}$$

e da quel momento oscillerà secondo la legge

$$\theta=A\cos\omega_0\,(t-\tau)+B\sin\omega_0\,(t-\tau)$$

Imponendo la continuità di θ e $\dot\theta$ troviamo $A=0$ e $B=\theta_0$. Quindi l'oscillatore si muove nuovamente con l'ampiezza iniziale. L'energia del sistema sarà aumentata di

$$
\begin{aligned}
\Delta E &= \frac{1}{2}\,(M+m)\,a^2\tau^2+\frac{1}{2}\,(M+m)\,ga^2\tau^2 \\
&= \pi^2\,(M+m)\,\ell\frac{a^2}{g+a}
\end{aligned}
$$

che corrisponde al lavoro fatto dal motore.

2.15. 10 febbraio 2011

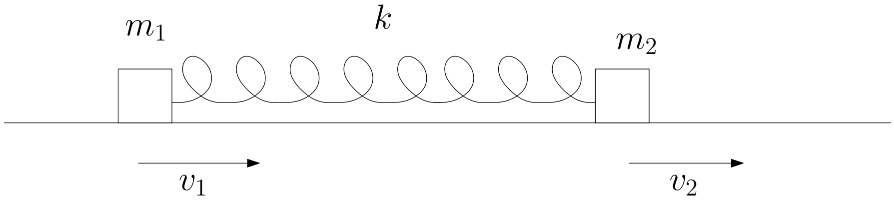
Problema 1 (15 punti)

Una particella si muove su una circonferenza di raggio R con velocità tangenziale

$$v(t) = A \sin \omega t$$

1. Calcolare l'accelerazione in modulo, direzione e verso.
2. Calcolare il valore massimo raggiunto dal modulo dell'accelerazione.
3. Per quale valore minimo di $|A|$ la particella percorre completamente la circonferenza?

Problema 2 (15 punti)



Due masse m_1, m_2 sono collegate da una molla con lunghezza a riposo nulla e costante elastica k. Inizialmente le due masse si trovano ad una distanza $2a$.

1. Se le velocità iniziali delle masse sono nulle, $v_1 = v_2 = 0$, dopo quanto tempo queste si urtano?
2. Calcolare il massimo allungamento della molla se $v_1 = 0$ e $v_2 = V$.
3. Supponiamo adesso che le velocità iniziali siano identiche, $v_1 = v_2 = V$. Dopo quanto tempo le due masse si urtano? Se l'urto è completamente anelastico e le due masse rimangono attaccate, qual'è la velocità finale del sistema?

Soluzione primo problema

Domanda 1

Abbiamo una accelerazione centripeta e una tangenziale, date da

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\hat{e}_r + \dot{v}\hat{e}_\theta$$

e quindi

$$\vec{a} = -\frac{A^2}{R}\sin^2 \omega t\, \hat{e}_r + A\omega \cos \omega t\, \hat{e}_\theta$$

Domanda 2

Il modulo quadro dell'accelerazione vale

$$a^2 = \frac{A^4}{R^2}\sin^4\omega t + A^2\omega^2\cos^2\omega t$$

che possiamo anche scrivere come

$$a^2 = \frac{A^4}{R^2}x^2 + A^2\omega^2(1-x)$$

con $x = \sin^2\omega t$, $0 \leq x \leq 1$. Questa funzione ha un minimo all'interno dell'intervallo, il massimo quindi sarà per $x = 1$ o $x = 0$, cioè

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{A^4}{R^2} \quad (x=1) \\ a^2 &= A^2\omega^2 \quad (x=0) \end{aligned}$$

Il primo valore andrà scelto se

$$A^2 > R^2\omega^2$$

altrimenti il secondo.

Domanda 3

Lo spazio percorso è dato da

$$s(t) = \int v(t)dt = -\frac{A}{\omega}\cos\omega t$$

e perchè tutta la circonferenza sia percorsa deve essere almeno

$$2\frac{|A|}{\omega} = 2\pi R$$

ossia

$$|A| = \pi R\omega$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

L'equazione per il moto relativo si scrive

$$\mu\ddot{x} = -kx$$

che ha per soluzione

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega}\sin\omega t$$

Nel nostro caso la velocità iniziale relativa è nulla, e la separazione relativa $2a$, quindi

$$x(t) = 2a\cos\omega t$$

e l'urto avviene al tempo τ dato da $\omega\tau = \pi/2$,

$$\tau = \frac{\pi}{2\omega}$$

Domanda 2

Usando la conservazione dell'energia disponibile nel centro di massa abbiamo

$$\frac{1}{2}\mu V^2 + \frac{k}{2}(2a)^2 = \frac{k}{2}\ell_{MAX}^2$$

cioè

$$\ell_{MAX} = \sqrt{4a^2 + \frac{\mu}{k}V^2}$$

Domanda 3

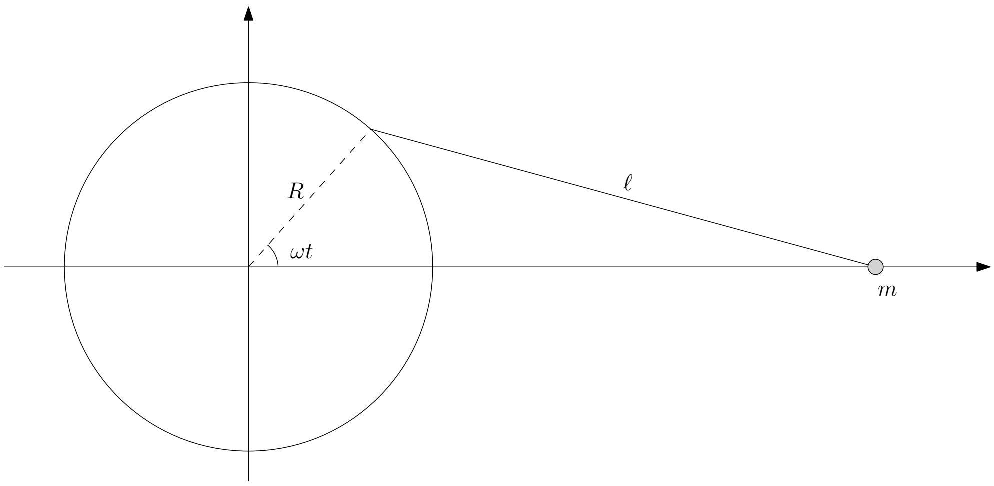
Nel sistema del centro di massa il problema è equivalente a quello visto alla prima domanda, e quindi

$$\tau = \frac{\pi}{2\omega}$$

La velocità finale del sistema sarà quella del centro di massa, cioè V.

2.16. 2 marzo 2011

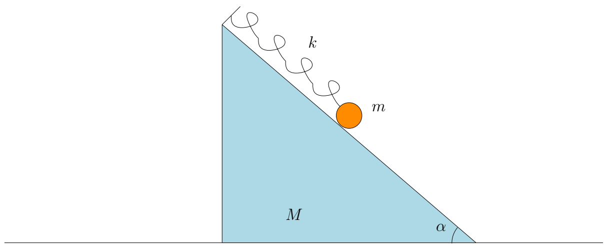
Problema 1 (15 punti)



Una massa m è vincolata a muoversi su una retta, ed è collegata ad un estremo di una sbarra di lunghezza ℓ. L'altro estremo di quest'ultima è collegato ad un disco di raggio $R < \ell$, come in figura. Entrambi gli estremi sono liberi di ruotare e non è presente alcun tipo di attrito. Se il disco ruota con velocità costante ω,

1. determinare la velocità della massa in funzione del tempo;
2. dire se la velocità angolare della sbarra può annullarsi, e quando;
3. calcolare, sempre in funzione del tempo, la forza esercitata dalla sbarra sulla massa nel limite $\ell \gg R$.

Problema 2 (15 punti)



Un piano inclinato di un angolo α e di massa M è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito. Sopra ad esso si trova una particella di massa m, vincolata all'estremo superiore da una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k, come in figura.

1. Determinare la lunghezza della molla all'equilibrio.

2. Se inizialmente la massa si trova ferma nel punto più alto del piano e viene lasciata andare, quanto vale il massimo allungamento della molla?

3. Calcolare la frequenza delle oscillazioni del sistema.

Soluzione primo problema

Domanda 1

La posizione della massa rispetto al centro della circonferenza si scrive

$$x = R\cos\omega t + \sqrt{\ell^2 - R^2\sin^2\omega t}$$

e derivando troviamo la velocità

$$\dot{x} = -R\omega\sin\omega t - \frac{R}{\ell}\frac{R\omega\sin\omega t\cos\omega t}{\sqrt{1-\frac{R^2}{\ell^2}\sin^2\omega t}}$$

Domanda 2

L'angolo α che la sbarra forma con l'orizzontale è legato a ωt dalla relazione

$$\ell\sin\alpha = R\sin\omega t$$

e derivando rispetto al tempo troviamo

$$\ell\dot{\alpha}\cos\alpha = R\omega\cos\omega t$$

da cui

$$\dot{\alpha} = \frac{R\omega}{\ell}\frac{\cos\omega t}{\cos\alpha} = \frac{R\omega}{\ell}\frac{\cos\omega t}{\sqrt{1-\frac{R^2}{\ell^2}\sin^2\omega t}}$$

La velocità angolare è, a meno di un segno, $\dot{\alpha}$. Vediamo quindi che questa si annulla per $\omega t = \pi/2 + k\pi$.

Domanda 3

La forza F esercitata dalla sbarra sulla palla è diretta parallelamente alla sbarra stessa. Inoltre nella direzione orizzontale deve essere

$$m\ddot{x} = F\cos\alpha$$

e quindi

$$F = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{R^2}{\ell^2}\sin^2\omega t}}\ddot{x}$$

Nel limite $R/\ell \ll 1$ possiamo approssimare

$$\dot{x} \simeq -R\omega \sin \omega t$$

e quindi

$$\ddot{x} \simeq -R\omega^2 \cos \omega t$$

Sostituendo otteniamo infine

$$F \simeq -\frac{mR\omega^2}{\sqrt{1-\frac{R^2}{\ell^2}\sin^2 \omega t}} \cos \omega t \simeq -mR\omega^2 \cos \omega t$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Imponendo che le forze applicate alla particella parallele al piano siano nulle otteniamo

$$-k\ell_0 + mg \sin \alpha = 0$$

da cui

$$\ell_0 = \frac{mg \sin \alpha}{k}$$

Domanda 2

Dato che la quantità di moto orizzontale del sistema è inizialmente nullo e si conserva, il centro di massa non si sposta orizzontalmente. Sia all'istante iniziale che a quello di massimo allungamento la velocità della particella relativa al piano si annulla, e quindi entrambi i corpi sono fermi. Possiamo allora applicare la conservazione dell'energia ottenendo (ponendo $h = 0$ alla sommità del piano)

$$\begin{aligned} E_{iniziale} &= 0 \\ E_{finale} &= \frac{1}{2}k\ell_{max}^2 - mg\ell_{max} \sin \alpha \end{aligned}$$

da cui ponendo $E_{iniziale} = E_{finale}$

$$\ell_{max} = \frac{2mg \sin \alpha}{k}$$

Domanda 3

Scriviamo l'energia totale nella forma

$$E = \frac{1}{2}MV_x^2 + \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{k}{2}\ell^2 - mg\ell \sin \alpha$$

ma dato che la quantità di moto orizzontale si conserva ed è nulla possiamo anche scrivere, applicando il teorema di Koenig

$$E = \frac{1}{2}\mu v_{r,x}^2 + \frac{1}{2}m v_{r,y}^2 + \frac{k}{2}\ell^2 - mg\ell \sin\alpha$$

dove $v_{r,x}$ e $v_{r,y} = v_y$ sono le velocità della particella relativa al piano e $\mu = mM/(m+M)$ la massa ridotta. D'altra parte

$$\begin{aligned} v_{r,x} &= \dot{\ell}\cos\alpha \\ v_{r,y} &= -\dot{\ell}\sin\alpha \end{aligned}$$

e quindi

$$E = \frac{1}{2}\left(\mu\cos^2\alpha + m\sin^2\alpha\right)\dot{\ell}^2 + \frac{k}{2}\ell^2 - mg\ell\sin\alpha$$

Derivando rispetto al tempo

$$\dot{E} = \left(\mu\cos^2\alpha + m\sin^2\alpha\right)\dot{\ell}\ddot{\ell} + k\ell\dot{\ell} - mg\dot{\ell}\sin\alpha = 0$$

da cui possiamo ricavare le equazioni del moto

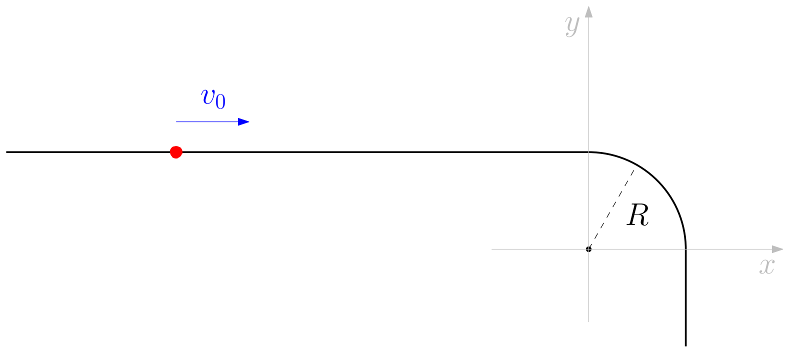
$$\left(\mu\cos^2\alpha + m\sin^2\alpha\right)\ddot{\ell} + k\ell = mg\sin\alpha$$

Il sistema esegue qundi oscillazioni armoniche attorno al punto di equilibrio ℓ_0 calcolato precedentemente, con frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu\cos^2\alpha + m\sin^2\alpha}}$$

2.17. 1 giugno 2012

Problema 1 (15 punti)



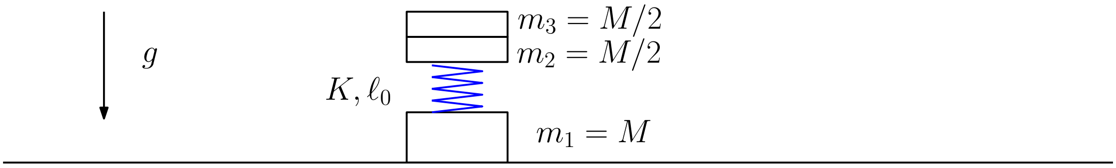
Un punto materiale si muove su una guida della forma in figura, ottenuta prolungando un quarto di circonferenza di raggio R con delle rette. Il modulo della velocità del punto è costante e vale v_0, inoltre $x = 0$ per $t = 0$.

1. Determinare la componenti v_x, v_y della velocità del punto nelle direzioni degli assi in funzione del tempo nell'intervallo $-\pi R/v_0 < t < \pi R/v_0$, e rappresentatele graficamente.

2. Determinare la componenti a_x, a_y dell'accelerazione del punto nelle direzioni degli assi in funzione del tempo nell'intervallo $-\pi R/v_0 < t < \pi R/v_0$, e rappresentatele graficamente.

3. Supponendo adesso che sia la componente x della velocità a mantenersi costante e uguale a v_0, calcolate il modulo dell'accelerazione totale in funzione del tempo per $t < \frac{R}{v_0}$.

Problema 2 (15 punti)



Una massa $m_1 = M$ è appoggiata su un piano orizzontale. Al di sopra di essa si trova una massa $m_2 = M/2$, separata da una molla di costante elastica K e lunghezza a riposo ℓ_0. Gli estremi della molla sono fissati alle massa. Infine una terza massa $m_3 = M/2$ è appoggiata sopra a m_2.

1. Determinare per quale compressione $\Delta\ell_{eq}$ della molla il sistema è in equilibrio.

2. Si comprime ulteriormente la molla di un tratto δ. Se la massa m_1 è incollata al suolo, per quale valore minimo di δ la massa m_3 si stacca da m_2?

3. Se le massa m_3 è incollata alla massa m_2 calcolare per quale valore minimo di δ la massa m_1 si stacca da terra.

Soluzione primo problema

Domanda 1

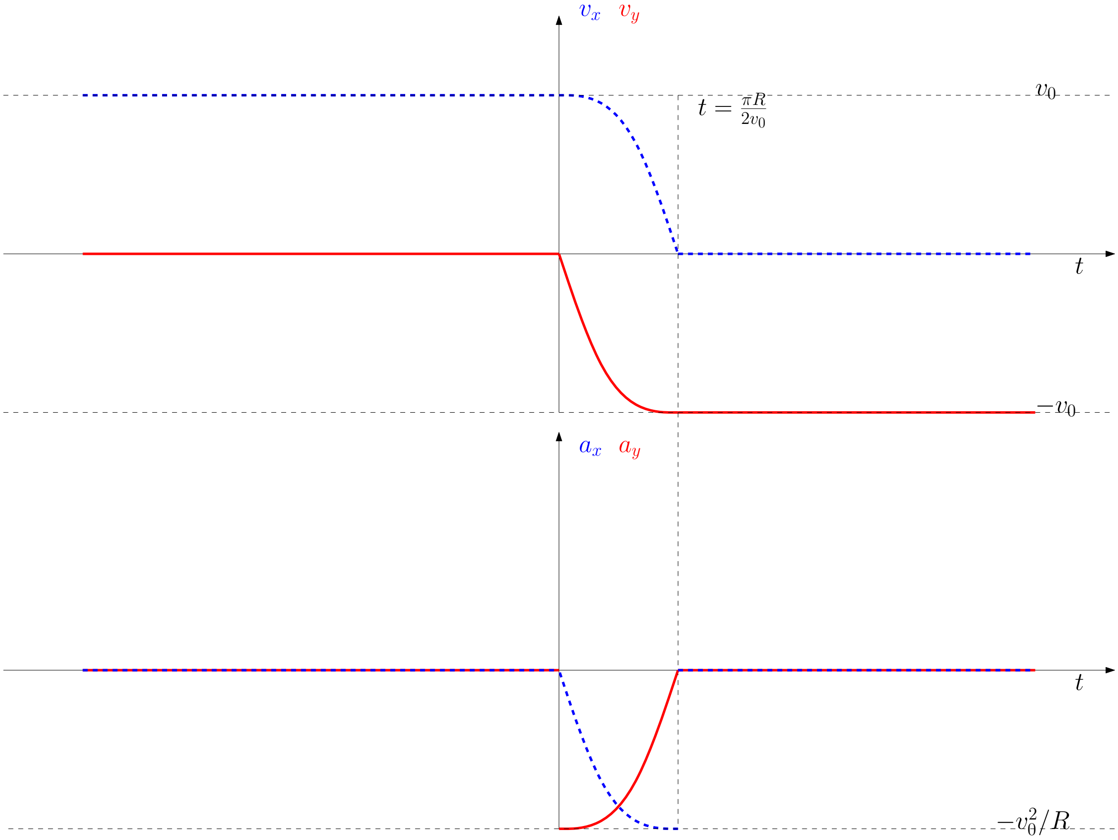


Figura 2.1.: I grafici per le componenti x, y della velocità (sopra) e dell'accelerazione. La componente x è blu tratteggiata, la componente y rossa continua.

Abbiamo:

1. $t < 0$, moto rettilineo uniforme,

$$
\begin{aligned}
v_x &= v_0 \\
v_y &= 0
\end{aligned}
$$

2. $0 < t < \frac{1}{2}\pi\frac{R}{v_0}$, moto circolare uniforme,

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \frac{v_0}{R} t \\ v_y &= -v_0 \sin \frac{v_0}{R} t \end{aligned}$$

3. $t > \frac{1}{2}\pi\frac{R}{v_0}$, moto rettilineo uniforme,

$$\begin{aligned} v_x &= 0 \\ v_y &= -v_0 \end{aligned}$$

Entrambe le velocità sono rappresentate in Figura 2.1 (grafico superiore).

Domanda 2

Possiamo direttamente derivare le espressioni precedenti rispetto al tempo. L'unico intervallo con accelerazione diversa da zero è $0 < t < \frac{1}{2}\pi\frac{R}{v_0}$, nel quale

$$\begin{aligned} a_x &= -\frac{v_0^2}{R} \sin \frac{v_0}{R} t \\ a_y &= -\frac{v_0^2}{R} \cos \frac{v_0}{R} t \end{aligned}$$

Alternativamente si poteva osservare che in un moto circolare uniforme abbiamo solo una accelerazione centripeta di modulo v_0^2/R, da proiettare lungo i due assi. Entrambe le accelerazioni sono rappresentate in Figura 2.1 (grafico inferiore).

Domanda 3

Sappiamo che $x = v_0 t$, e che sulla parte curva della guida $x^2 + y^2 = R^2$.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{R^2 - v_0^2 t^2} \\ \dot{y} &= -\frac{v_0^2 t}{\sqrt{R^2 - v_0^2 t^2}} \\ \ddot{y} &= -\frac{R^2 v_0^2}{\left(R^2 - v_0^2 t^2\right)^{3/2}} \end{aligned}$$

e quindi

$$|a| = |\ddot{y}| = \frac{R^2 v_0^2}{\left(R^2 - v_0^2 t^2\right)^{3/2}}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Per avere equilibrio deve essere

$$K\Delta\ell_{eq} = Mg$$

cioè

$$\Delta\ell_{eq} = \frac{Mg}{K}$$

Domanda 2

Se le due masse restano attaccate abbiamo una oscillazione armonica attorno al punto di equilibrio del tipo

$$y = -\delta\cos\omega t$$

con $\omega = \sqrt{K/M}$. D'altra parte l'equazione del moto per la massa superiore è

$$\frac{M}{2}\ddot{y}_3 = -\frac{M}{2}g + N$$

dove N è la reazione normale, che può essere solo positiva. Allore il distacco si avrà se

$$N = \frac{M}{2}\left(\ddot{y}_3 + g\right) = \frac{M}{2}\left(\delta\omega^2\cos\omega t + g\right) < 0$$

e questo accadrà per

$$\delta > \frac{g}{\omega^2} = \frac{gM}{k}$$

Domanda 3

La massa m_1 si staccherà da terra se la forza della molla supererà Mg. Dato che, ancora una volta, in assenza di distacco abbiamo una oscillazione armonica di ampiezza δ attorno alla posizione di equilibrio dovrà essere

$$Mg < K\left(\delta - \Delta\ell_{eq}\right)$$

cioè

$$\delta > \frac{Mg}{K} + \Delta\ell_{eq} = \frac{2Mg}{K}$$

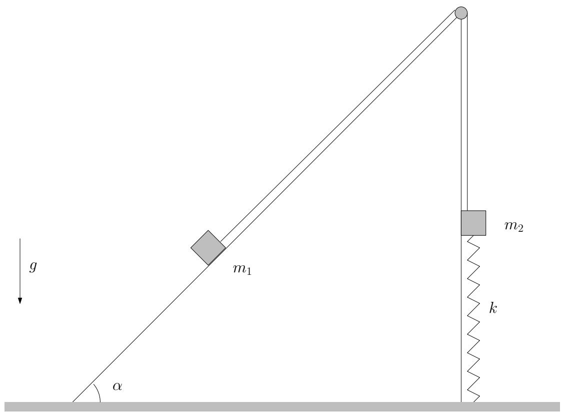
2.18. 10 settembre 2012

Problema 1 (15 punti)

Un pallone viene lanciato con velocità iniziale di modulo v_0 dalla sommità di un palazzo di altezza $h = 40$m. La velocità iniziale è inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo θ. Nel rispondere alle domande che seguono si può trascurare l'attrito dell'aria.

1. Se nello stesso momento un uomo inizia a correre dalla base del palazzo, con quale velocità costante deve muoversi per riuscire a prendere il pallone?
2. Dopo quanto tempo il pallone tocca terra? Come si deve lanciare il pallone per rendere massimo questo tempo?
3. Quanto vale il modulo della velocità quando il pallone arriva a terra?

Problema 2 (15 punti)



Una massa m_1 è posta su un piano inclinato (di un angolo α rispetto all'orizzontale) privo di attrito, ed è collegata come in figura ad un'altra massa m_2 tramite un filo inestensibile. La seconda massa è collegata al suolo con una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, come in figura.

1. Sotto quale condizione nella posizione di equilibrio la molla è allungata?

2. Nel caso particolare $\alpha = \pi/4$ e $m_1 = 2\sqrt{2}m_2$ calcolare la frequenza delle oscillazioni del sistema attorno alla posizione di equilibrio.

3. Supponendo che la molla si spezzi, calcolare l'accelerazione successiva della massa m_2.

Soluzione primo problema

Domanda 1

La velocità dell'uomo deve coincidere con la componente orizzontale della velocità del pallone, cioè

$$v = v_0 \cos\theta$$

Domanda 2

Le leggi orarie del pallone sono date da

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos\theta t \\ y &= h + v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

Il pallone tocca terra quando

$$t^2 - \frac{2 v_0 \sin\theta}{g} t - \frac{2h}{g} = 0$$

ossia per

$$t = \frac{v_0 \sin\theta}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

che è una funzione crescente di $\sin\theta$. Il massimo si ottiene quindi per $\sin\theta = 1$, cioè per $\theta = \pi/2$, e vale

$$t_{\text{max}} = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

Domanda 3

La velocità verticale è data da

$$\dot{y} = v_0 \sin\theta - gt$$

Sostituendo il tempo trovato precedentemente abbiamo

$$v_f = \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2hg}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dalla condizione di equilibrio per la massa m_1 troviamo la tensione del filo

$$T = m_1 g \sin\alpha$$

mentre per la massa m_2 abbiamo

$$T - m_2 g - k\ell = 0$$

da cui

$$\ell = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2}{k} g$$

che risulta positivo per $m_2 < m_1 \sin\alpha$.

Domanda 2

Scriviamo le equazioni del moto per le due masse, usando come coordinata l'allungamento della molla:

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{\ell} &= T - k\ell - m_2 g \\ m_1 \ddot{\ell} &= m_1 g \sin\alpha - T \end{aligned}$$

Eliminando la tensione otteniamo l'equazione del moto

$$(m_1 + m_2)\, \ddot{\ell} + k\ell = (m_1 \sin\alpha - m_2)\, g$$

che descrive oscillazioni armoniche di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\left(1 + 2\sqrt{2}\right) m_2}}$$

attorno alla posizione di equilibrio

$$\ell_{eq} = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2}{k} g = \frac{m_2}{k} g$$

Domanda 3

Riscriviamo l'equazione del moto precedente, ponendo $k = 0$. Otteniamo

$$(m_1 + m_2)\, \ddot{\ell} = (m_1 \sin\alpha - m_2)\, g$$

e quindi l'accelerazione è costante e vale

$$a_2 = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2}{m_1 + m_2}$$

2.19. 20 gennaio 2012

Problema 1 (15 punti)

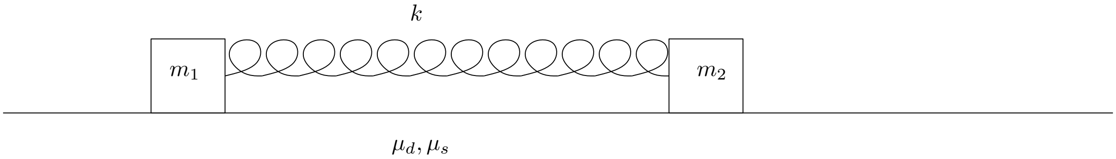
Un punto materiale si muove in un piano con un'accelerazione e una velocità il cui modulo è dato da $|\vec{a}| = a$ e $|\vec{v}| = v$.

1. Se $a(t) = a_0$ e $v(t) = v_0$, con a_0 e v_0 costanti, quanto vale l'angolo tra velocità e accelerazione?

2. Per le stesse accelerazioni e velocità della domanda precedente determinare la traiettoria.

3. Supponendo che per $t > 0$ il modulo della velocità valga $v(t) = \beta t$, con β costante positiva, come si deve scegliere $a(t)$ affinchè la traiettoria sia identica a quella precedentemente determinata?

Problema 2 (15 punti)



Due masse m_1, m_2 sono appoggiate su un piano orizzontale come in figura, ad una distanza ℓ_0 l'una dall'altra e inizialmente in quiete. Sono inoltre collegate da una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k. Tra piano e masse si ha attrito statico e dinamico, caratterizzato rispettivamente dai coefficienti μ_s e $\mu_d < \mu_s$.

1. Per quale valore minimo μ_s^* del coefficiente di attrito statico il sistema rimane in equilibrio?

2. Supponendo $\mu_s < \mu_s^*$, per quale valore massimo μ_d^* del coefficiente di attrito dinamico le due masse arrivano a toccarsi?

3. Se $\mu_s < \mu_s^*$ e $\mu_d = 2\pi\mu_d^*/(4 + \pi)$ introducendo un opportuno sistema di riferimento dire in quale posizione e con che velocità relativa si scontrano le due masse.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Se il modulo della velocità è costante, allora l'accelerazione tangenziale alla traiettoria deve essere nulla. Quindi l'accelerazione è perpendicolare alla velocità.

Domanda 2

Per quanto visto al punto precedente l'accelerazione tangenziale è nulla. Quindi il modulo dell'accelerazione è uguale al modulo dell'accelerazione normale, da cui

$$a_0 = \frac{v_0^2}{\rho}$$

dove ρ è il raggio di curvatura della traiettoria, che è quindi costante. Il moto è quindi circolare uniforme, e la traiettoria una circonferenza di raggio $R = v_0^2/a_0$.

Domanda 3

Per avere ancora un moto circolare dovrà essere

$$a^2(t) = \dot{v}(t)^2 + \frac{v^4(t)}{R^2} = \beta^2 + \frac{a_0^2}{v_0^4}\beta^4 t^4$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Le forze che agiscono orizzontalmente sulle due masse devono essere zero:

$$\begin{aligned} F_{a,1} + k\ell_0 &= 0 \\ F_{a,2} - k\ell_0 &= 0 \end{aligned}$$

ma dato che $|F_{a,i}| < \mu_s m_i g$ avremo

$$\mu_s^* g \min(m_1, m_2) = k\ell_0$$

e quindi

$$\mu_s^* = \frac{k\ell_0}{g \min(m_1, m_2)}$$

Domanda 2

Le equazioni del moto si possono scrivere nella forma

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) &= -\mu_d m_1 g \\ m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) &= \mu_d m_2 g \end{aligned}$$

dove abbiamo approfittato del fatto che siamo interessati al solo caso in cui la velocità della massa m_1 è positiva e quella della massa m_2 è negativa. Per il moto relativo $\ell = x_2 - x_1$ possiamo scrivere

$$\mu\ddot{\ell} + k\ell = 2\mu_d\mu g$$

dove μ è la massa ridotta. Ma questo è un oscillatore armonico su cui agisce una forza costante, che possiamo descrivere con un'energia potenziale

$$U(\ell) = \frac{k}{2}\ell^2 - 2\mu_d \mu g \ell$$

Dato che nella configurazione iniziale e in quella finale che ci interessa l'energia cinetica si annulla, dovrà essere $U(\ell_0) = U(0)$ e quindi

$$\frac{k}{2}\ell_0^2 - 2\mu_d^* \mu g \ell_0 = 0$$

da cui

$$\mu_d^* = \frac{k\ell_0}{4\mu g}$$

Domanda 3

L'equazione per la coordinata relativa è la stessa della domanda precedente. Per il centro di massa abbiamo invece

$$\ddot{x}_{cm} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\mu_d g$$

e quindi un moto uniformemente accelerato. Ponendo l'origine del sistema di coordinate nella posizione della prima massa abbiamo

$$x_{cm} = \frac{m_2 \ell_0}{m_1 + m_2} + \frac{1}{2}\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\mu_d g t^2$$

Per determinare l'istante dello scontro risolviamo l'equazione del moto per la posizione relativa. Abbiamo

$$\ell(t) = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t + \frac{2\mu_d \mu g}{k}$$

con $\Omega = \sqrt{k/\mu}$. Imponendo le condizioni iniziali

$$\ell(t) = \frac{2\mu_d \mu g}{k} + \left(\ell_0 - \frac{2\mu_d \mu g}{k}\right)\cos\Omega t$$

L'urto avviene al tempo τ determinato da

$$\cos\Omega\tau = \frac{2\mu_d \mu g}{k\ell_0 - 2\mu_d \mu g} = \frac{\pi}{4}$$

cioè per

$$\tau = \frac{1}{\Omega\sqrt{2}}$$

e sostituendo otteniamo la posizione del centro di massa, che è il punto nel quale avviene la collisione

$$x_{cm} = \left[m_2 + \frac{1}{8}\frac{\pi}{4+\pi}\left(m_2 - m_1\right)\right]\frac{\ell_0}{m_1 + m_2}$$

Per la velocità relativa abbiamo analogamente

$$\begin{aligned}
\dot{\ell}(\tau) &= -\Omega\left(\ell_0 - \frac{2\mu_d \mu g}{k}\right)\sin\Omega\tau \\
&= -\Omega\ell_0\frac{4}{4+\pi}\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{16}}
\end{aligned}$$

2.20. 22 giugno 2012

Problema 1 (15 punti)

Una massa m è sospesa a due punti posti alla stessa altezza e separati orizzontalmente da una distanza $2d$. La sospensione avviene tramite due molle di lunghezza a riposo nulla e costanti elastiche k_1 e k_2. Inoltre è presente un campo gravitazionale costante $-g\hat{y}$.

1. In un opportuno sistema di riferimento determinare la posizione di equilibrio del sistema.

2. Se la massa è inizialmente ferma nel punto medio del segmento che unisce i punti di sospensione determinare l'orbita successiva.

3. Determinare un punto dell'orbita nel quale l'accellerazione della massa si annulla e dire dopo quanto tempo viene raggiunto.

Problema 2 (15 punti)

Una particella si muove sulla parabola $y = \alpha x^2$ mantenendo costante la componente orizzontale dell'accelerazione, $a_x = 2.0\mathrm{ms}^{-1}$. Si sa che la particella al tempo $t = 0$ si trova nel vertice della parabola, e che la sua velocità vale $\vec{v}_0 = -10\mathrm{ms}^{-1}\hat{x}$.

1. Determinare la costante α sapendo che a $t = 0$ il modulo dell'accelerazione vale $a_0 = 4.0\mathrm{ms}^{-1}$ (supporre $\alpha > 0$). Quali sono le dimensioni di α?

2. Quanto vale il modulo della velocità al tempo $t = 1\mathrm{s}$?

3. Ad un certo istante la particella si ferma. Determinare lo spazio percorso fino a quel momento. Suggerimento: può essere utile considerare il seguente integrale indefinito:

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} + \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right] + C$$

Soluzione primo problema

Domanda 1

Le forze che agiscono sulla massa sono

$$\vec{F} = -mg\hat{y} - k_1\left(\vec{r} - \vec{d}_1\right) - k_2\left(\vec{r} - \vec{d}_2\right)$$

dove $\vec{r}$ indica la posizione della massa e $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ indicano la posizione dei punti di sospensione. L'equilibrio sarà dunque dove $\vec{F} = 0$, ossia in

$$\vec{r}_{eq} = \frac{k_1\vec{d}_1 + k_2\vec{d}_2 - mg\hat{y}}{k_1 + k_2}$$

Ponendo l'origine in $\left(\vec{d_1}+\vec{d_2}\right)/2$ abbiamo $\vec{d_1}=-\vec{d_2}=(d,0)$ e quindi

$$\begin{aligned}x_{eq} &= \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}d\\ y_{eq} &= -\frac{mg}{k_1+k_2}\end{aligned}$$

Domanda 2

Il moto del sistema consiste nella composizione di due oscillazioni armoniche indipendenti di periodo

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$$

nelle direzioni orizzontali e verticali. Nel caso generale la traiettoria è un'ellisse con centro nel punto di equilibrio. Questa ellisse deve passare dal punto iniziale con velocità nulla. Si tratta quindi di un'ellisse degenere: un segmento con un estremo nel punto iniziale e con la posizione di equilibrio nel punto medio.

Domanda 3

Se l'accelerazione è nulla allora la forza totale che agisce sulla massa deve essere nulla. Ci troviamo quindi nel punto di equilibrio, che viene raggiunto in un quarto del periodo di oscillazione:

$$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che il moto avviene sulla parabola abbiamo

$$\begin{aligned}\dot{y} &= 2\alpha x\dot{x}\\ \ddot{y} &= 2\alpha\dot{x}^2+2\alpha x\ddot{x}\end{aligned}$$

e quindi

$$a_0=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\sqrt{\ddot{x}^2+4\alpha^2\dot{x}^2}$$

da cui

$$\alpha=\sqrt{\frac{a_0^2-\ddot{x}^2}{4\dot{x}^2}}=\sqrt{\frac{a_0^2-a_x^2}{4v_0^2}}$$

Domanda 2

Il modulo della velocità vale

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(1 + 4\alpha^2 x^2\right)\dot{x}^2$$

Dato che lungo x il moto è uniformemente accelerato al tempo $t = t_1 = 1\text{s}$ abbiamo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -v_0 + a_x t_1 \\ x &= -v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_x t_1^2\end{aligned}$$

e sostituendo troviamo quanto richiesto.

Domanda 3

La particella si ferma al tempo t_2 determinato da

$$-v_0 + a_x t_2 = 0$$

e quindi a

$$t_2 = \frac{v_0}{a_x}$$

Lo spazio percorso fino a quel momento sarà la lunghezza dell'arco di parabola corrispondente:

$$s = \int_0^{t_2} v dt = \int_0^{x_2} \sqrt{1 + 4\alpha^2 x^2} dx$$

con

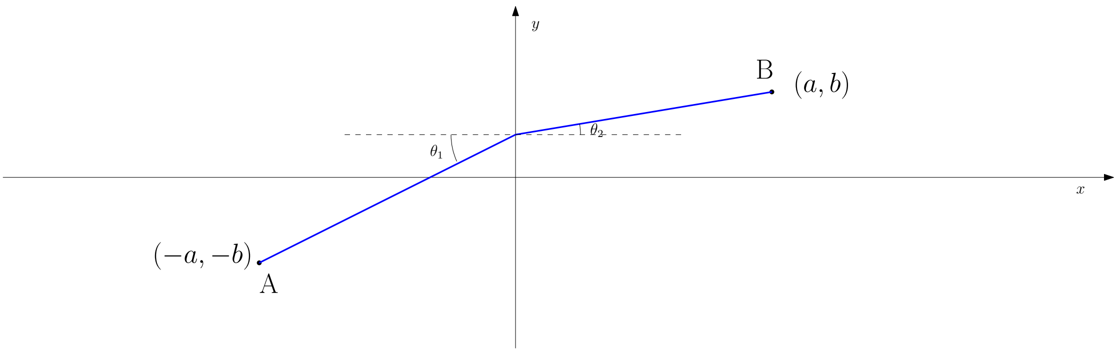
$$x_2 = -v_0 t_2 + \frac{1}{2} a_x t_2^2$$

Integrando abbiamo infine

$$s = \frac{1}{2\alpha} \int_0^{2\alpha x_2} \sqrt{1 + u^2} du = \frac{1}{4\alpha}\left[2\alpha x_2 \sqrt{1 + 4\alpha^2 x_2^2} + \log\left(2\alpha x_2 + \sqrt{1 + 4\alpha^2 x_2^2}\right)\right]$$

2.21. 18 gennaio 2013

Problema 1 (15 punti)



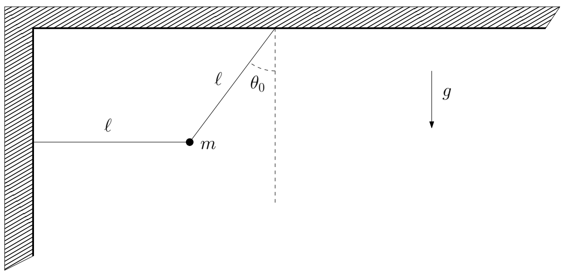
Una automobile di massa m si muove in un piano tra un punto iniziale A di coordinate $(x, y) = (-a, -b)$ ad un punto finale B di coordinate $(x, y) = (a, b)$ dove $a > 0$ e $b > 0$. La velocità dell'automobile vale in modulo v_1 per $x < 0$ e v_2 per $x > 0$. La direzione del moto può essere scelta arbitrariamente.

1. Calcolare il tempo necessario a muoversi da A a B supponendo di scegliere una traiettoria rettilinea.

2. Calcolare il modulo della velocità media, ed il lavoro che è stato fatto sull'automobile.

3. Considerando tra tutte le traiettorie del tipo rappresentato in figura (cioè rettilinee sia per $x < 0$ che per $x > 0$) quella corrispondente al tempo di percorrenza minimo, trovare una legge che lega gli "angoli di incidenza" θ_1 e θ_2 indipendente da a e b. Cosa succede se $v_1 = v_2$?

Problema 2 (15 punti)



La massa m in figura è in equilibrio, trattenuta da due fili inestensibili di massa nulla e lunghezza ℓ. Uno dei due fili è orizzontale, l'altro forma un angolo $\theta_0 = \pi/4$ con la verticale.

1. Calcolare le tensioni dei fili.

2. Si taglia il filo orizzontale, e il sistema inizia ad oscillare. Calcolare la velocità della massa quando $\theta = 0$.

3. Determinare la tensione del filo $T(\theta)$ in funzione dell'angolo durante l'oscillazione.

Soluzione primo problema

Domanda 1

La lunghezza della traiettoria rettilinea è $2\sqrt{a^2+b^2}$. Dato che metà viene percorsa con velocità v_1 e metà con velocità v_2 abbiamo

$$\begin{aligned} t &= t_1 + t_2 \\ &= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{v_2} \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right) \end{aligned}$$

Domanda 2

La velocità media sarà in modulo

$$v = \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{t} = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$$

ed il lavoro, per il teorema delle forze vive,

$$L = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

Domanda 3

Indicando con h l'ordinata del punto della traiettoria con $x=0$ abbiamo adesso

$$\begin{aligned} t &= t_1 + t_2 \\ &= \frac{\sqrt{a^2+(b+h)^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{a^2+(b-h)^2}}{v_2} \end{aligned}$$

Troviamo il tempo minimo:

$$\frac{dt}{dh} = \frac{h+b}{v_1\sqrt{a^2+(b+h)^2}} + \frac{h-b}{v_2\sqrt{a^2+(b-h)^2}} = 0$$

che si può anche scrivere

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

Se $v_1 = v_2$ troviamo $\theta_1 = \theta_2$ cioè la traiettoria è rettilinea.

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Imponendo che la somma delle forze agenti sulla massa m si annulli abbiamo

$$-T_1\hat{x}+T_2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\hat{x}+\hat{y}\right)-mg\hat{y}=0$$

da cui

$$\begin{aligned} T_2 &= mg\sqrt{2} \\ T_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}T_2=mg \end{aligned}$$

Domanda 2

Per la conservazione dell'energia

$$-mg\ell\cos\theta_0=\frac{1}{2}mv^2-mg\ell$$

da cui

$$v=\sqrt{2g\ell\left(1-\cos\theta_0\right)}$$

Domanda 3

Scriviamo l'equazione del moto nella direzione radiale:

$$-m\frac{v^2}{\ell}=-T+mg\cos\theta$$

da cui

$$T=mg\cos\theta+m\frac{v^2}{\ell}$$

D'altra parte dalla conservazione dell'energia abbiamo

$$v^2=2g\ell\left(\cos\theta-\cos\theta_0\right)$$

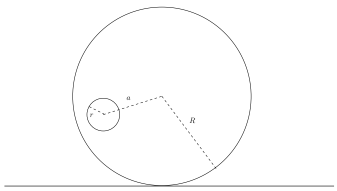
e sostituendo

$$T=mg\left(3\cos\theta-2\cos\theta_0\right)$$

3. Prove Scritte Fisica II vecchio ordinamento

3.1. 18 giugno 2008

Problema 1 (15 punti)



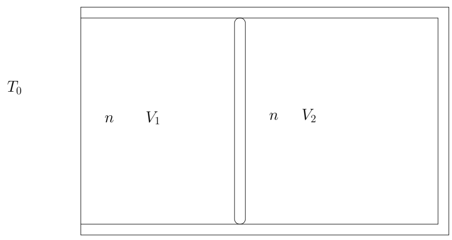
All'interno di un cilindro di massa M, altezza h e raggio R si pratica una cavità, pure cilindrica, di raggio $r < R$ e uguale altezza. Gli assi dei due cilindri sono paralleli, e sono separati da una distanza $a < R - r$. Il cilindro è appoggiato su un piano orizzontale su cui ruota senza strisciare.

1. Calcolare il momento di inerzia del sistema rispetto ad un asse parallelo all'asse del cilindro e passante per il centro di massa del sistema.

2. Scrivere l'equazione del moto, scegliendo una coordinata opportuna.

3. Supporre adesso che inizialmente il sistema si trovi nella posizione di equilibrio, con una velocità angolare ω_0 e in condizioni di rotolamento puro. É possibile che per un valore abbastanza grande di ω_0 il cilindro si stacchi dal piano? In caso affermativo calcolare tale valore. L'attrito statico eventualmente necessario a mantenere il rotolamento puro si può immaginare grande a piacere.

Problema 2 (15 punti)



In ciascuno dei due scomparti del recipiente in figura, di volume totale $V = V_1 + V_2$, sono contenute n moli di un gas perfetto monoatomico. Lo scomparto a destra è isolato termicamente, quello a sinistra è in contatto termico con l'ambiente esterno, che può essere visto come un bagno termico a temperatura T_0. Il setto intermedio, impermeabile al calore, è libero di scorrere. Inizialmente la temperatura del gas nello scomparto di destra è $T_2 > T_0$, e il sistema è all'equilibrio.

1. Calcolare i volumi iniziali V_1 e V_2.

2. Applicando gradualmente al setto una forza F lo si sposta dalla posizione di equilibrio. Determinare il lavoro fatto sul sistema quando le temperature dei due scomparti diventano uguali.

3. Con $F = 0$ si trasferisce calore dallo scomparto a destra a quello a sinistra mediante una macchina termica reversibile. Calcolare il lavoro massimo estraibile.

Soluzione primo problema

Domanda 1

La densità del corpo è

$$\rho = \frac{M}{\pi \left(R^2 - r^2\right) h}$$

quindi se il cilindro fosse pieno avrebbe un momento di inerzia rispetto al suo asse

$$I_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} M_p R^2 = \frac{1}{2} \left(\rho \pi R^2 h\right) R^2 = \frac{1}{2} M \frac{R^2}{\left(R^2 - r^2\right)} R^2$$

dove abbiamo indicato con M_p la sua massa totale. Il cilindro mancante avrebbe invece un momento di inerzia, sempre rispetto al suo asse,

$$I_m = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} \left(\rho \pi r^2 h\right) r^2 = \frac{1}{2} M \frac{r^2}{\left(R^2 - r^2\right)} r^2$$

Il centro di massa del sistema si trova ad una distanza

$$d = \frac{m}{M} a = \frac{r^2}{R^2 - r^2} a$$

dall'asse del corpo, dalla parte opposta a quella della cavità. Infine il momento di inerzia cercato si ottiene sottraendo il momento di inerzia del cilindro che occuperebbe la cavità da quello del cilindro completo. Entrambi devono chiaramente essere riferiti all'asse passante per il centro di massa, e quindi

$$I = I_{\mathrm{p}} + M_p d^2 - I_m - m \left(d + a\right)^2$$

É interessante notare che si poteva evitare il calcolo del centro di massa. Detta x una posizione arbitraria presa sulla retta passante dai centri di cilindro e cavità avremmo avuto rispetto ad esso

$$I_x = I_{\mathrm{p}} + M_p x^2 - I_m - m \left(x + a\right)^2$$

ma sappiamo che il momento di inerzia minimo si ottiene quando x coincide con il centro di massa. Quindi

$$\frac{dI_x}{dx} = 2 M_p x - 2m \left(x + a\right) = 0$$

e quindi

$$x = \frac{m}{M_p - m} a = d$$

In ogni caso svolgendo i calcoli si ottiene

$$I = \frac{1}{2}M\left[\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right) - 2\left(\frac{a^2}{R^2}\right)\left(\frac{r^2}{R^2}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^2}\right]R^2$$

Domanda 2

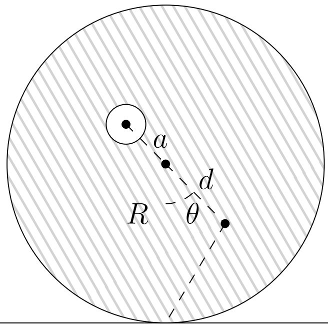


Figura 3.1.: La coordinata scelta per descrivere il moto del sistema.

Scegliendo come coordinata l'angolo di rotazione possiamo scrivere l'energia nella forma

$$E = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 - Mgd\cos\theta$$

dove I_O è il momento di inerzia del corpo rispetto al punto di appoggio. Questo si può ottenere applicando il teorema di Steiner al risultato della domanda precedente

$$I_O = I + M\ell^2$$

dove ℓ è la distanza del centro di massa dal punto di appoggio, ossia (vedere Figura 3.1)

$$\ell^2 = d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta$$

Di conseguenza

$$E = \frac{1}{2}\left[I + M\left(d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta\right)\right]\dot{\theta}^2 - Mgd\cos\theta$$

Derivando rispetto al tempo

$$E = \dot{\theta}\left[I + M\left(d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta\right)\right]\ddot{\theta} - \dot{\theta}\left[MRd\sin\theta\right]\dot{\theta}^2 + \dot{\theta}Mgd\sin\theta = 0$$

otteniamo l'equazione del moto

$$\left[I + M\left(d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta\right)\right]\ddot{\theta} - MRd\dot{\theta}^2\sin\theta + Mgd\sin\theta = 0$$

Domanda 3

Al momento di un eventuale distacco la componente verticale dell'accelerazione del centro di massa del sistema vale $-g$. Dato che

$$y_{cm} = -d\cos\theta$$

abbiamo

$$\ddot{y}_{cm} = d\ddot{\theta}\sin\theta + d\dot{\theta}^2\cos\theta = -g$$

Dato che $\ddot{\theta}$ non dipende da ω_0, e $\dot{\theta}^2$ cresce con ω_0, vediamo che l'equazione precedente ha sicuramente soluzioni per ω_0 abbastanza grandi e $\cos\theta < 0$.

Dalla conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}\left[I + M\left(d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta\right)\right]\dot{\theta}^2 - Mgd\cos\theta = \frac{1}{2}\left[I + M\left(d^2 + R^2 - 2Rd\right)\right]\omega_0^2 - Mgd$$

otteniamo

$$\dot{\theta}^2 = \frac{I + M\left(d^2 + R^2 - 2Rd\right)}{I + M\left(d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta\right)}\omega_0^2 - \frac{2Mgd\left(1-\cos\theta\right)}{I + M\left(d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta\right)} = F(\theta)$$

e derivando rispetto al tempo ambo i membri abbiamo

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{dF}{d\theta}$$

Sostituendo otteniamo l'equazione

$$\frac{1}{2}\frac{dF(\theta)}{d\theta}\sin\theta + F(\theta)\cos\theta = -\frac{g}{d}$$

Per semplificare l'equazione assumiamo che il distacco avvenga a $\theta = \pi$. Otteniamo allora $F(\pi) = g/d$ ossia

$$\omega_0^2 \geq \frac{g}{d}\left[\frac{I + M\left(d+R\right)^2}{I + M\left(d-R\right)^2} + \frac{4Md^2}{I + M\left(d-R\right)^2}\right]$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che le pressioni dei due scomparti sono identiche (equilibrio meccanico) abbiamo

$$\frac{T_0}{V_1} = \frac{T_2}{V_2}$$

e

$$V_1 + V_2 = V$$

quindi

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \frac{T_0}{T_0+T_2}V \\
V_2 &= \frac{T_2}{T_0+T_2}V
\end{aligned}
$$

Domanda 2

La trasformazione del gas nello scomparto a sinistra è isoterma, quella del gas nello scomparto a destra adiabatica. Il lavoro fatto sul sistema è fatto sul pistone, e deve essere uguale e opposto al lavoro fatto, sempre sul pistone, dai due gas. Quindi

$$
W = -L_1 - L_2
$$

Il lavoro fatto dal gas a sinistra vale

$$
L_1 = nRT_0 \int_{V_1}^{V_{1f}} \frac{dV}{V} = nRT_0 \log\frac{V_{1f}}{V_1} = nRT_0 \log\frac{V-V_{2f}}{V_1}
$$

e quello fatto dal gas a destra (tenendo conto che la sua temperatura finale è T_0)

$$
L_2 = -\Delta U_2 = nc_V\left(T_2 - T_0\right)
$$

Determiniamo il volume finale V_{2f}. Dato che la trasformazione del gas a destra è adiabatica abbiamo

$$
T_2 V_2^{\gamma-1} = T_0 V_{2f}^{\gamma-1}
$$

e quindi

$$
V_{2f} = V_2\left(\frac{T_2}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}
$$

In conclusione

$$
\begin{aligned}
W &= -nRT_0 \log\frac{V-V_{2f}}{V_1} - nc_V\left(T_2-T_0\right) \\
&= -nRT_0 \log\frac{V-V_2\left(\frac{T_2}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}{V_1} - nc_V\left(T_2-T_0\right) \\
&= -nRT_0 \log\left\{1+\frac{T_2}{T_0}\left[1-\left(\frac{T_2}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right]\right\} - nc_V\left(T_2-T_0\right)
\end{aligned}
$$

Domanda 3

Detto dQ_1 il calore ceduto allo scomparto a sinistra e dQ_2 quello ceduto allo scomparto a destra abbiamo

$$
dW = -dQ_2 - dQ_1
$$

e d'altra parte

$$dQ_2 = dU_2 + P_2 dV_2$$

ma $P_2 = P_1$ e $dV_2 = -dV_1$ quindi

$$dQ_2 = nc_V dT_2 - P_1 dV_1 = nc_V dT_2 - nRT_0 \frac{dV_1}{V_1}$$

Integrando abbiamo

$$W = -Q_2 - Q_1 = nc_V (T_2 - T_0) + nRT_0 \log \frac{V_{1f}}{V_1} - Q_1$$

Per calcolare il calore totale ceduto allo scomparto a sinistra osserviamo che per ottenere il massimo lavoro si deve operare reversibilmente, quindi l'entropia totale del sistema non deve cambiare

$$dS = \frac{dQ_1}{T_0} + dS_2 = 0$$

Integrando abbiamo

$$Q_1 = -T_0 \Delta S_2$$

ma

$$\Delta S_2 = nc_V \log \frac{T_0}{T_2} + nR \log \frac{V_{2f}}{V_2}$$

In conclusione

$$W = nc_V (T_2 - T_0) + nRT_0 \log \frac{V_{1f}}{V_1} + nc_V T_0 \log \frac{T_0}{T_2} + nRT_0 \log \frac{V_{2f}}{V_2}$$

Nello stato finale $T_1 = T_2 = T_0$ e quindi otteniamo, utilizzando le formule ottenute nella soluzione della prima domanda,

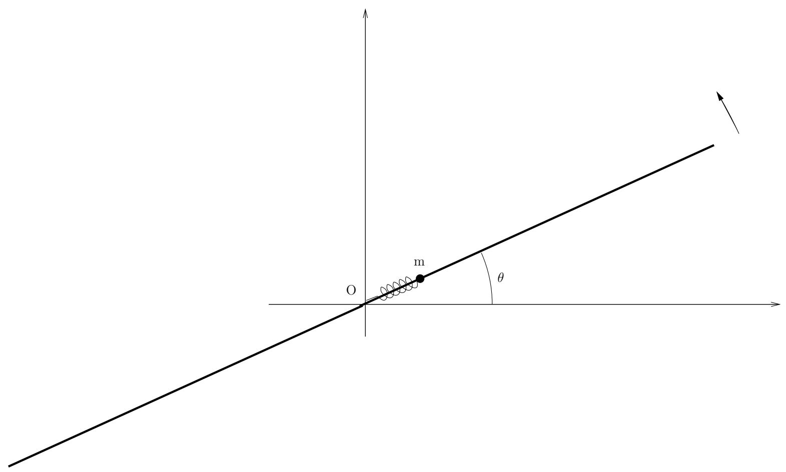
$$\begin{aligned} \frac{V_{1f}}{V_1} &= \frac{1}{2} \frac{T_0 + T_2}{T_0} \\ \frac{V_{2f}}{V_2} &= \frac{1}{2} \frac{T_0 + T_2}{T_2} \end{aligned}$$

ed in conclusione

$$W = nc_V T_0 \left[\left(\frac{T_2}{T_0} - 1 \right) - \log \frac{T_2}{T_0} \right] + nRT_0 \log \frac{1}{4} \left(\frac{T_0}{T_2} + \frac{T_2}{T_0} \right)^2$$

3.2. 18 luglio 2008

Problema 1



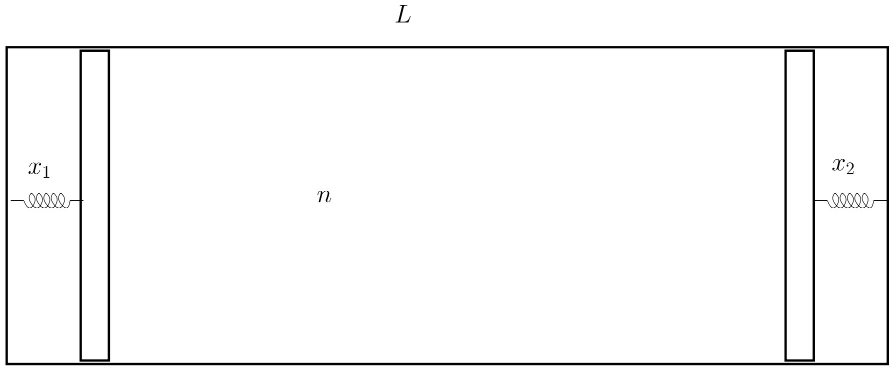
Una massa m è vincolata a muoversi come in figura lungo una sbarretta di lunghezza ℓ e momento di inerzia rispetto al centro I. La massa è fissata al centro O di quest'ultima da una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k. La sbarretta è libera di ruotare in un piano orizzontale attorno al suo centro. Si trascurino gli attriti, e per le prime due domande si consideri ℓ molto grande.

1. Usando come coordinate la posizione x della massa rispetto ad O sulla sbarra e l'angolo θ in figura scrivere l'energia totale E e il momento angolare L rispetto ad O del sistema. Dire se E ed L sono quantità conservate, motivando la risposta.

2. Descrivere qualitativamente le possibili orbite della massa. Dire in particolare se sono possibili orbite circolari di raggio R, e in caso positivo calcolarne la velocità angolare $\omega(R)$.

3. Si supponga adesso che inizialmente la massa sia nell'origine, e la sbarra stia ruotando con velocità angolare ω_0. Una piccola perturbazione sposta la massa. Per quali valori di k questa arriva all'estremo della sbarra e si sfila? Dopo che questo è accaduto, il vettore posizione della massa resta parallelo alla sbarra?

Problema 2



Il recipiente cilindrico in figura, impermeabile al calore, di lunghezza L e sezione S, è diviso in tre scomparti da due setti mobili. Nello scomparto intermedio si trovano n moli di gas perfetto, in quelli laterali c'è il vuoto. Gli scomparti sono collegati al recipiente da due molle di lunghezza a riposo L e costante elastica k.

1. Sapendo che la temperatura del gas è T_0 calcolare il volume da esso occupato e la sua pressione.
2. Si elimina improvvisamente la molla a destra (ad esempio tagliandola). Calcolare la variazione di entropia del sistema.
3. Trovare una funzione di stato del gas che rimane invariata nella trasformazione precedente.

Soluzione problema 1

Domanda 1

Domanda 2

Domanda 3

Soluzione problema 2

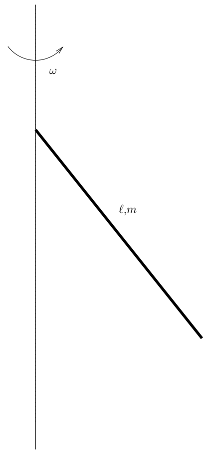
Domanda 1

Domanda 2

Domanda 3

3.3. 21 gennaio 2009

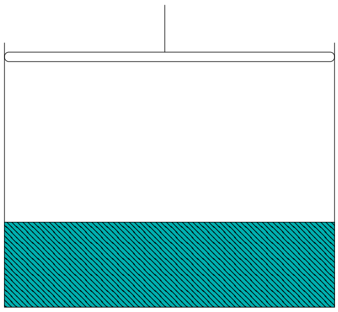
Problema 1 (15 punti)



La bacchetta rigida in figura, di lunghezza ℓ e massa m, ruota attorno all'asse verticale con velocità angolare costante ω. L'angolo θ tra asse e bacchetta è fisso.

1. Calcolare l'energia cinetica del sistema.
2. Calcolare il vettore momento angolare del sistema, $\vec{L}(t)$.
3. Supponendo che a un certo istante il vincolo venga a mancare, e che la velocità di ogni punto della bacchetta rimanga continua, discutere il moto successivo tenendo conto dell'effetto della gravità.

Problema 2 (15 punti)



Sul fondo di un cilindro di sezione S munito di un pistone mobile e impermeabile al calore si trova uno strato di materiale di capacità termica C_1. Nella parte superiore si trovano n moli di un gas perfetto monoatomico. Inizialmente il sistema è all'equilibrio termodinamico, con pressione e temperatura P_0 e T_0 note.

1. Si raddoppia molto lentamente la pressione. Calcolare la nuova temperatura.

2. Partendo dalla stessa condizione iniziale si raddoppia istantaneamente la forza applicata al pistone. Calcolare anche in questo caso la temperatura nello stato finale di equilibrio.

3. Calcolare la variazione di entropia del sistema e dell'universo nei due casi precedenti.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Domanda 2

Domanda 3

Soluzione secondo problema

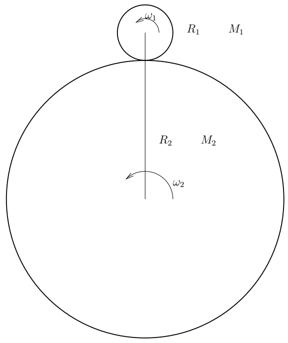
Domanda 1

Domanda 2

Domanda 3

3.4. 23 giugno 2009

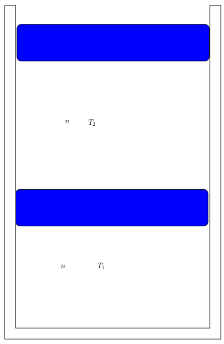
Problema 1 (15 punti)



Un disco di raggio R_1 e massa M_1 rotola senza strisciare su un'altro, di raggio R_2 e massa M_2. Il secondo disco è libero di ruotare attorno al suo centro. La distanza tra i due centri è mantenuta costante da una fune di lunghezza $R_1 + R_2$ come in figura. É presente la gravità.

1. Si osserva che il primo disco rimane alla sommità del secondo. Quale relazione tra le due velocità angolari deve valere perchè questo sia possibile?
2. Inizialmente i due dischi sono in quiete, sempre nella posizione in figura. Con una leggera spinta si mette il primo in movimento. Calcolare la velocità v_1 del suo centro di massa nel momento in cui arriva nella posizione opposta.
3. Calcolare la tensione massima che il filo deve essere in grado di sopportare nella situazione precedente, assumendo di conoscere v_1.

Problema 2 (15 punti)



Il recipiente in figura di sezione S è impermeabile al calore e separato da due setti scorrevoli di massa M, capacità termica e spessore trascurabile. Il setto intermedio ha una resistenza termica R_T, quello in alto è impermeabile al calore. In ciascuno dei due volumi sono presenti n moli di gas perfetto monoatomico, inizialmente alle temperature T_1 e T_2.

1. Calcolare i volumi delle due parti nelle condizioni iniziali.
2. Calcolare le temperature finali (all'equilibrio) dei due gas.
3. Determinare la variazione di entropia rispetto allo stato iniziale in funzione del tempo, assumendo che ciascun gas possa essere considerato istante per istante in equilibrio termodinamico.

Soluzione primo problema

Domanda 1

La velocità relativa dei due dischi nel punto di contatto deve essere la stessa. Ma se il primo disco rimane sulla sommità del primo questo significa

$$-\omega_2 R_2 = \omega_1 R_1 \tag{3.4.1}$$

Domanda 2

Detto θ l'angolo che la retta passante per il centro dei due dischi forma con la verticale abbiamo che la condizione di rotolamento puro si scriverà nel caso generale

$$-\omega_2 R_2 = -(R_1 + R_2)\dot{\theta} + \omega_1 R_1 \tag{3.4.2}$$

inoltre la seconda equazione cardinale applicata ai due dischi da

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 &= FR_1 && (3.4.3)\\ I_2\dot{\omega}_2 &= FR_2 && (3.4.4)\end{aligned}$$

poichè la componente tangenziale della forza che il primo disco esercita sul secondo è uguale e opposta a quella che il secondo esercita sul primo. Quindi

$$R_2 I_1 \dot{\omega}_1 = R_1 I_2 \dot{\omega}_2 \tag{3.4.5}$$

da cui segue che la quantità $R_2 I_1 \omega_1 - R_1 I_2 \omega_2$ sarà conservata. Dato che è inizialmente nulla, sarà $R_2 I_1 \omega_1 = R_1 I_2 \omega_2$.

Infine l'energia totale

$$E = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} M_1 (R_1 + R_2)^2 \dot{\theta}^2 + M_1 g (R_1 + R_2) \cos\theta \tag{3.4.6}$$

sarà conservata. Possiamo scrivere quest'ultima in funzione delle sole θ, $\dot{\theta}$ utilizzando la condizione di rotolamento e la quantità conservata determinata precedentemente,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{I_2 R_1 (R_1 + R_2)}{I_2 R_1^2 + I_1 R_2^2}\dot{\theta} && (3.4.7)\\ \omega_2 &= \frac{I_1 R_2 (R_1 + R_2)}{I_2 R_1^2 + I_1 R_2^2}\dot{\theta} && (3.4.8)\end{aligned}$$

da cui

$$E = \frac{1}{2}\left[\frac{I_1 I_2}{I_2 R_1^2 + I_1 R_2^2} + M_1\right](R_1 + R_2)^2 \dot{\theta}^2 + M_1 g (R_1 + R_2)\cos\theta \tag{3.4.9}$$

ed equagliando il valore iniziale a quello finale otteniamo

$$v_1^2 = (R_1 + R_2)^2 \dot{\theta}^2 = 4 M_1 g \left[\frac{I_1 I_2}{I_2 R_1^2 + I_1 R_2^2} + M_1\right]^{-1} \tag{3.4.10}$$

Sostituendo $I_1 = M_1 R_1^2/2$ e $I_2 = M_2 R_2^2/2$ otteniamo infine

$$v_1^2 = 8g(R_1 + R_2)\frac{M_1 + M_2}{2M_1 + 3M_2} \tag{3.4.11}$$

Domanda 3

Nel punto più basso l'equazione del moto in direzione radiale per il primo disco da

$$M_1 \frac{v_1^2}{(R_1 + R_2)} = T - M_1 g \tag{3.4.12}$$

che permette di ottenere direttamente

$$T = M_1 \frac{v_1^2}{(R_1 + R_2)} + M_1 g \tag{3.4.13}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Per le pressioni nei due scomparti avremo, imponendo l'equilibrio meccanico,

$$P_1 = P_{atm} + \frac{2Mg}{S} \tag{3.4.14}$$

$$P_2 = P_{atm} + \frac{Mg}{S} \tag{3.4.15}$$

e utilizzando l'equazione di stato otteniamo subito

$$V_1 = \frac{nRT_1}{P_1} \tag{3.4.16}$$

$$V_2 = \frac{nRT_2}{P_2} \tag{3.4.17}$$

Domanda 2

Per il primo gas avremo

$$dQ_1 = nc_v dT_1 + P_1 dV_1 \tag{3.4.18}$$

e per il secondo

$$dQ_2 = nc_v dT_2 + P_2 dV_2 \tag{3.4.19}$$

ma dato che non viene scambiato calore con l'esterno $dQ_1 + dQ_2 = 0$, da cui segue che la quantità

$$H = nc_v (T_1 + T_2) + P_1V_1 + P_2V_2 \tag{3.4.20}$$

si conserva. Questa si può anche scrivere però

$$H = nc_p (T_1 + T_2) \tag{3.4.21}$$

Confrontandone il valore tra situazione iniziale e finale otteniamo subito

$$T_f = \frac{T_1 + T_2}{2} \tag{3.4.22}$$

Domanda 3

Il calore che fluisce da uno scomparto all'altro per unità di tempo è dato da

$$\frac{dQ_1}{dt} = -\frac{dQ_2}{dt} = \frac{1}{R_T} (T_2 - T_1) \tag{3.4.23}$$

e quindi

$$\frac{dQ_1}{dt} = nc_p \frac{dT_1}{dt} = \frac{1}{R_T} (T_2 - T_1) \tag{3.4.24}$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = nc_p \frac{dT_2}{dt} = \frac{1}{R_T} (T_1 - T_2) \tag{3.4.25}$$

Sommando e sottraendo membro a membro otteniamo due equazioni più semplici da risolvere:

$$\frac{d}{dt} (T_1 + T_2) = 0 \tag{3.4.26}$$

$$\frac{d}{dt} (T_1 - T_2) = -\frac{1}{nc_pR_T} (T_1 - T_2) \tag{3.4.27}$$

da cui

$$T_1 + T_2 = T_{1,0} + T_{2,0} \tag{3.4.28}$$

$$T_1 - T_2 = (T_{1,0} - T_{2,0})\, e^{-\frac{t}{nc_pR_T}} \tag{3.4.29}$$

La variazione di entropia del sistema sarà data da

$$\Delta S = nc_p \log \frac{T_1}{T_{1,0}} + nc_p \log \frac{T_2}{T_{2,0}} = nc_p \log \frac{T_1 T_2}{T_{1,0} T_{2,0}} \tag{3.4.30}$$

inoltre

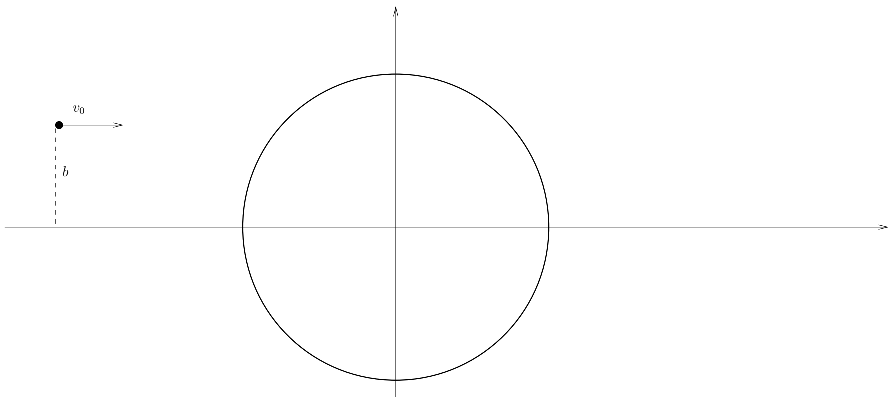
$$T_1 T_2 = \frac{1}{4} \left[T_{1,0} + T_{2,0} + (T_{1,0} - T_{2,0})\, e^{-\frac{t}{nc_p R_T}} \right] \left[T_{1,0} + T_{2,0} - (T_{1,0} - T_{2,0})\, e^{-\frac{t}{nc_p R_T}} \right] \tag{3.4.31}$$

e sostituendo troviamo la legge cercata

$$\begin{aligned} \Delta S = {} & nc_p \log \frac{\left[T_{1,0} \left(1 + e^{-\frac{t}{nc_p R_T}} \right) + T_{2,0} \left(1 - e^{-\frac{t}{nc_p R_T}} \right) \right]}{2T_{1,0}} \\ & + nc_p \log \frac{\left[T_{1,0} \left(1 - e^{-\frac{t}{nc_p R_T}} \right) + T_{2,0} \left(1 + e^{-\frac{t}{nc_p R_T}} \right) \right]}{2T_{2,0}} \end{aligned}$$

3.5. 13 luglio 2009

Problema 1 (15 punti)



Una particella di massa m si muove con velocità di modulo v_0 nel piano xy, parallelamente all'asse x e a una distanza b da esso. Urta un disco di raggio R e momento di inerzia I_d vincolato a ruotare attorno al proprio centro posto nell'origine del sistema di coordinate e inizialmente fermo. L'interazione tra la particella e il disco si può descrivere dicendo che sulla prima è applicata la forza $\vec{F} = F_0 \vec{v}_r \wedge \hat{z}$ dove $\hat{z}$ è un versore normale al disco e $\vec{v}_r$ la velocità relativa ad esso. Nel seguito può essere utile ricordare l'identità $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

1. Mostrate che l'energia cinetica totale e il momento angolare totale si conservano.

2. Scrivere l'equazione del moto per il disco utilizzando coordinate opportune, e dedurre da essa una terza legge di conservazione.

3. Per quali valori dei parametri b e v_0 la particella può passare dal centro del disco?

Problema 2 (15 punti)

La radiazione elettromagnetica contenuta in un recipiente di volume V può essere trattata come un sistema termodinamico descritto dalle grandezze P, V, T. Sapendo che l'energia interna è data da $U = bVT^4$ e la pressione da $P = \frac{1}{3}\frac{U}{V}$.

1. Rappresentare nel piano $P - V$ un ciclo di Stirling, composto da due isocore e due isoterme, e calcolare il lavoro totale fatto sul sistema.

2. Rappresentare sullo stesso piano una trasformazione adiabatica reversibile.

3. Considerando il recipiente a volume V fissato ed a una temperatura iniziale T, calcolare il massimo lavoro estraibile avendo a disposizione un bagno termico di temperatura $T_0 < T$.

Soluzione primo problema

Domanda 1

L'energia cinetica si conserva perché il lavoro totale fatto dalle forze è nullo. Infatti il lavoro della reazione vincolare è nullo perché applicato ad un punto immobile. Il lavoro fatto sulla particella è

$$dL_1 = F_0 (\vec{v}_r \wedge \hat{z}) \cdot d\vec{r}_p$$

e quello fatto sul disco da

$$dL_2 = -F_0 (\vec{v}_r \wedge \hat{z}) \cdot d\vec{r}_d$$

dove $d\vec{r}_p$ e $d\vec{r}_d$ sono gli spostamenti rispettivamente della particella e del punto del disco nel quale si trova. Quindi

$$dL = F_0 (\vec{v}_r \wedge \hat{z}) \cdot (d\vec{r}_p - d\vec{r}_d)$$

ma $d\vec{r}_p - d\vec{r}_d$ è lo spostamento relativo, quindi

$$\frac{dL}{dt} = F_0 (\vec{v}_r \wedge \hat{z}) \cdot \vec{v}_r = 0$$

Il momento angolare totale rispetto ad un polo posto nel vincolo si conserva perché le uniche forze esterne (le reazioni vincolari) hanno momento nullo.

Domanda 2

Indicando con ϕ l'angolo di rotazione del disco abbiamo

$$\begin{aligned} I_d \ddot{\phi} \hat{z} &= -\vec{r}_p \wedge (F_0 \vec{v}_r \wedge \hat{z}) \\ &= -F_0 \vec{v}_r (\vec{r}_p \cdot \hat{z}) + F_0 \hat{z} (\vec{r}_p \cdot \vec{v}_r) \\ &= F_0 \hat{z} (\vec{r}_p \cdot \vec{v}_r) \end{aligned}$$

D'altra parte la velocità del disco nel punto in cui si trova la particella è data da

$$\vec{v}_d = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_p$$

dove $\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{z}$ è la velocità angolare del disco. Di conseguenza

$$\vec{v}_r = \vec{v}_p - \dot{\phi}\hat{z} \wedge \vec{r}_p$$

Utilizzando coordinate polari per la particella abbiamo

$$\begin{aligned} \vec{v}_r &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} - \dot{\phi} r (\hat{z} \wedge \hat{r}) \\ &= \dot{r}\hat{r} + r \left(\dot{\theta} - \dot{\phi} \right) \hat{\theta} \end{aligned}$$

e l'equazione del moto diviene

$$\begin{aligned}
I_d\ddot{\phi} &= F_0\left(\vec{r}_p\cdot\vec{v}_r\right)\\
&= F_0 r\dot{r}
\end{aligned}$$

che si può scrivere nella forma

$$\frac{d}{dt}\left(I_d\dot{\phi}-\frac{1}{2}F_0r^2\right)=0$$

La quantità

$$Q=I_d\dot{\phi}-\frac{1}{2}F_0r^2$$

dunque si conserva.

Domanda 3

Scriviamo le tre quantità conservate. Abbiamo

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}I_d\dot{\phi}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)=\frac{1}{2}mv_0^2\\
L &= I_d\dot{\phi}+mr^2\dot{\theta}=-mv_0b\\
Q &= I_d\dot{\phi}-\frac{1}{2}F_0r^2=-\frac{1}{2}F_0R^2
\end{aligned}$$

Possiamo ricavare $\dot{\phi}$ e $\dot{\theta}$ dalle ultime due equazioni

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \frac{L-Q}{mr^2}-\frac{F_0}{2m}=\frac{1}{r^2}\left(\frac{F_0R^2}{2m}-v_0b\right)-\frac{F_0}{2m}\\
\dot{\phi} &= \frac{Q}{I_d}+\frac{F_0}{2I_d}r^2=\frac{F_0}{2I_d}\left(r^2-R^2\right)
\end{aligned}$$

e sostituendo nella prima otteniamo

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2I_d}\left(Q+\frac{F_0}{2}r^2\right)^2+\frac{1}{2m}\left(\frac{L-Q}{r}-\frac{F_0}{2}r\right)^2\\
&= \frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{F_0^2}{8I_d}\left(R^2-r^2\right)^2+\frac{1}{2m}\left[-\frac{mv_0b}{r}+\frac{F_0}{2r}\left(R^2-r^2\right)\right]^2
\end{aligned}$$

Possiamo considerare gli ultimi due termini come un potenziale efficace. Per poter arrivare al centro del disco è necessario anzitutto che i due termini che divergono per $r\to 0$ si cancellino tra loro, e quindi

$$v_0b=\frac{F_0R^2}{2m}$$

Se questa condizione è soddisfatta il potenziale efficace si riduce a

$$U_{eff} = \frac{F_0^2 R^2}{8m}\left[\frac{mR^2}{I_d}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^2+\frac{r^2}{R^2}\right]$$

e quindi deve essere

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{F_0^2 R^4}{8I_d} > 0$$

ossia

$$v_0 > \frac{F_0 R^2}{4\sqrt{mI_d}}$$

Notare che nel caso considerato

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= -\frac{v_0 b}{R^2} \\
\dot{\phi} &= \frac{mv_0 b}{I_d}\left(\frac{r^2}{R^2}-1\right)
\end{aligned}$$

cioè la velocità angolare della particella si mantiene costante.

Soluzione secondo problema

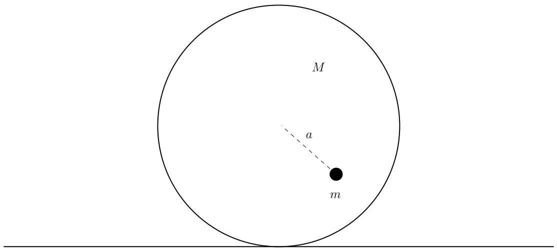
Domanda 1

Domanda 2

Domanda 3

3.6. 17 settembre 2009

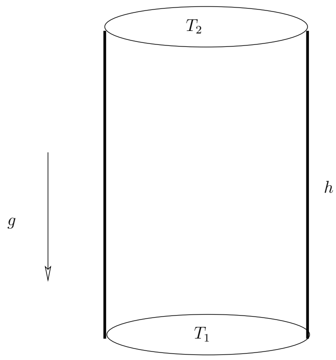
Problema 1 (15 punti)



All'interno di un disco di massa M e raggio R, ad una distanza $a < R$ dal centro, viene fissato un punto materiale di massa m. Il corpo rotola senza strisciare su un piano orizzontale.

1. Determinare la posizione del centro di massa e il momento di inerzia rispetto ad un asse passante per esso e normale al disco.
2. Se il punto materiale si trova a $t = 0$ nella posizione più bassa, determinare la minima velocità angolare iniziale per la quale è possibile un giro completo.
3. Scrivere l'equazione del moto e trovarne la soluzione nel caso $m \ll M$.

Problema 2 (15 punti)



Un cilindro di sezione S e altezza h ha le pareti laterali impermeabili al calore, mentre le due estremità sono mantenute a temperatura costante. All'interno del cilindro si trovano n moli di un gas perfetto, di massa molare μ e conducibilità termica σ che si suppone costante. Si deve tenere conto della gravità.

1. Supponendo che la temperatura dell'estremità inferiore sia T_1 e quella dell'estremità superiore $T_2 > T_1$ calcolare la pressione del gas in funzione dell'altezza in condizioni stazionarie.

2. Sempre in condizioni stazionarie calcolare quanta entropia viene prodotta per unità di tempo.

3. Si porta la temperatura dell'estremità superiore a T_1 e si attende che si stabilisca l'equilibrio. Calcolare di quanto è variata l'entropia del gas.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Per motivi di simmetria il centro di massa sarà sul diametro del disco passante per il punto materiale. Ponendo un sistema di riferimento con origine nel centro del disco e punto materiale in $(a, 0)$ troviamo

$$x_{CM} = \frac{0 \times M + a \times m}{M + m} = \frac{m}{M + m} a \equiv d \tag{3.6.1}$$

Per quanto riguarda il momento di inerzia, possiamo usare il teorema di Steiner per calcolare il contributo del disco,

$$I_{disco} = I_{disco}^{CM} + M x_{CM}^2 = \frac{1}{2} M R^2 + \frac{M m^2}{(M + m)^2} a^2 \tag{3.6.2}$$

(abbiamo indicato con I_{disco}^{CM} il momento di inerzia del disco rispetto al proprio centro di massa) e quindi aggiungere il contributo del punto materiale

$$I = I_{disco} + m\left(a - x_{CM}\right)^2 = \frac{1}{2} M R^2 + \frac{M m^2}{(M + m)^2} a^2 + \frac{m M^2}{(M + m)^2} a^2 = \frac{1}{2} M R^2 + \frac{M m}{M + m} a^2 \tag{3.6.3}$$

$$= \frac{1}{2} M R^2 + M a d \tag{3.6.4}$$

Domanda 2

Possiamo scrivere l'energia totale (che si conserva) nella forma

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(M + m) v_{CM}^2 - m g a \cos\theta \tag{3.6.5}$$

dove θ è l'angolo che il diametro del disco passante per il punto materiale forma con la verticale. Per la velocità del centro di massa abbiamo, tenuto conto della condizione di puro rotolamento,

$$V_{CM,x} = -R\dot{\theta} + d\dot{\theta}\cos\theta \tag{3.6.6}$$

$$V_{CM,y} = d\dot{\theta}\sin\theta \tag{3.6.7}$$

e quindi

$$E = \frac{1}{2}\left[I + (M + m)\left(R^2 + d^2 - 2 R d \cos\theta\right)\right]\dot{\theta}^2 - m g a \cos\theta \tag{3.6.8}$$

Eguagliando l'energia iniziale (punto materiale nella posizione più bassa, velocità angolare incognita) a quella finale (punto materiale nella posizione più alta, velocità angolare nulla nel caso limite cui siamo interessati) abbiamo

$$\frac{1}{2}\left[I+(M+m)\left(R^2+d^2-2Rd\right)\right]\omega_{0,MIN}^2-mga=mga \tag{3.6.9}$$

e quindi

$$\omega_{0,MIN}=\sqrt{\frac{4mga}{\left[I+(M+m)\left(R^2-d\right)^2\right]}} \tag{3.6.10}$$

Domanda 3

L'equazione del moto si ottiene rapidamente derivando l'energia determinata al punto precedente:

$$\dot{E}=\left[I+(M+m)\left(R^2+d^2-2Rd\cos\theta\right)\right]\dot{\theta}\ddot{\theta}+(M+m)\,Rd\sin\theta\dot{\theta}^3+md\dot{\theta}\sin\theta=0 \tag{3.6.11}$$

da cui

$$\left[I+(M+m)\left(R^2+d^2-2Rd\cos\theta\right)\right]\ddot{\theta}+(M+m)\,Rd\dot{\theta}^2\sin\theta+md\sin\theta=0 \tag{3.6.12}$$

Cerchiamo la soluzione nella forma $\theta=\theta_0+\theta_1+O(m^2/M^2)$ dove θ_0 è la soluzione per $m/M=0$ e θ_1 una piccola correzione. Sostituendo nell'equazione differenziale e eguagliando i termini dello stesso ordine otteniamo

$$\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta}_0=0 \tag{3.6.13}$$

$$\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta}_1+\left[Mad+mR^2-2MRd\cos\theta_0\right]\ddot{\theta}_0+MRd\dot{\theta}_0^2\sin\theta_0=0 \tag{3.6.14}$$

La soluzione generale della prima equazione è

$$\theta_0=\omega_0 t+\phi_0 \tag{3.6.15}$$

che sostituito nella seconda da

$$\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta}_1+MRd\omega_0^2\sin\left(\omega_0 t+\phi_0\right)=0 \tag{3.6.16}$$

Questa equazione si integra direttamente

$$\theta_1=\frac{2d}{3R}\sin\left(\omega_0 t+\phi_0\right) \tag{3.6.17}$$

ottenendo

$$\theta(t) = \omega_0 t + \phi_0 + \frac{2d}{3R} \sin(\omega_0 t + \phi_0) + O\left(\frac{m^2}{M^2}\right) \tag{3.6.18}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che la sezione è costante allo stato stazionario la densità di corrente di calore è indipendente dall'altezza, e data da

$$J = -\sigma \frac{\partial T}{\partial z} \tag{3.6.19}$$

che si integra direttamente fornendo

$$T = A - \frac{J}{\sigma} z \tag{3.6.20}$$

Le costanti J e A si ottengono imponendo le condizioni al contorno, abbiamo quindi la ben nota dipendenza lineare della temperatura dalla posizione:

$$T = T_1 + \frac{z}{h}(T_2 - T_1) = T_1 (1 + kz) \tag{3.6.21}$$

dove k è dato da:

$$k = \frac{1}{T_1} \frac{T_2 - T_1}{h} = \frac{r-1}{h} \tag{3.6.22}$$

dove si è posto $r = T_2/T_1$ pre brevità.

Per quanto riguarda la pressione abbiamo anzitutto

$$dP = -\rho g dz \tag{3.6.23}$$

dove ρ è la densità di massa del gas, che possiamo scrivere come

$$\rho = \mu \frac{n}{V} = \frac{\mu P}{RT} \tag{3.6.24}$$

e sostituendo nell'equazione precedente otteniamo

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\mu g P}{RT} = -\frac{\mu g P}{RT_1 [1 + kz]} \tag{3.6.25}$$

Questa equazione differenziale è separabile, e possiamo integrarla direttamente

$$\int_{P(0)}^{P(z)} \frac{dP}{P} = -\int_0^z \frac{\mu g dz}{RT_1 [1 + kz]} \tag{3.6.26}$$

ottenendo

$$\log\frac{P(z)}{P(0)} = -\frac{\mu g h}{RT_1}\int_0^{z/h}\frac{dx}{1+\frac{T_2-T_1}{T_1}x} = -\frac{\mu g h}{R\left(T_2-T_1\right)}\log\left(1+kz\right) \tag{3.6.27}$$

ossia

$$P(z) = \frac{P(0)}{(1+kz)^{\alpha}} = \frac{P(0)}{(T/T_1)^{\alpha}} \tag{3.6.28}$$

con

$$\alpha = \frac{\mu g h}{R(T_2-T_1)} = \frac{\mu g h}{RT_1(r-1)} \tag{3.6.29}$$

Per determinare la costante $P(0)$ scriviamo la densità molare

$$\rho_m = \frac{P}{RT} = \frac{P(0)}{RT_1\left(1+kz\right)^{\alpha+1}} \tag{3.6.30}$$

che integrata su tutto il volume deve dare il numero di moli totali

$$n = \int_0^h S\rho_m dz = \int_0^h \frac{SP(0)}{RT\left(T/T_1\right)^{\alpha}}dz \tag{3.6.31}$$

Utilizzando $x = T/T_1$ come variabile di integrazione abbiamo (ponendo $r = T_2/T_1$ per brevità)

$$n = \frac{SP(0)}{RkT_1}\int_1^r \frac{1}{x^{\alpha+1}}dx = \frac{SP(0)}{RkT_1}\frac{r^{\alpha}-1}{\alpha r^{\alpha}} \tag{3.6.32}$$

e quindi

$$P(0) = \frac{n\alpha r^{\alpha}}{r^{\alpha}-1}\frac{RkT_1}{S} \tag{3.6.33}$$

Domanda 2

Dato che lo stato del gas non cambia, la produzione di entropia per unità di tempo sarà data dal contributo dei due bagni termici:

$$d\mathcal{S} = -\frac{dQ}{T_2} + \frac{dQ}{T_1} \tag{3.6.34}$$

Qui dQ è il calore ceduto alla sorgente più fredda, che allo stato stazionario deve essere identico a quello assorbito dalla sorgente calda. In una unità di tempo abbiamo

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)\frac{dQ}{dt} = -\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)JS \tag{3.6.35}$$

e sostituendo la densità di corrente di calore abbiamo

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \frac{S\sigma}{h}\frac{\left(T_2-T_1\right)^2}{T_1T_2} > 0 \tag{3.6.36}$$

Domanda 3

Dato che l'entropia è una funzione di stato, è sufficiente calcolare la differenza tra lo stato iniziale e quello finale. Considerando uno strato del cilindro contenente dn moli del gas perfetto, la sua entropia sarà, a meno di una costante,

$$d\mathcal{S} = \left(c_p \log T - R \log P\right) dn \tag{3.6.37}$$

e integrando su tutto il volume otteniamo (tenendo conto che $dn/dV = \rho_m$)

$$\mathcal{S} = \int_0^h \left(c_p \log T - R \log P\right) \frac{PS}{RT} dz \tag{3.6.38}$$

Inserendo le espressioni esplicite per T e P otteniamo

$$\mathcal{S} = \frac{P(0)S}{RT_1} \int_0^h \left(c_p \log T - R \log \frac{P(0)}{(T/T_1)^\alpha}\right) \frac{dz}{(T/T_1)^{\alpha+1}} \tag{3.6.39}$$

Usando $s = T/T_1$ come variabile di integrazione abbiamo

$$\mathcal{S} = \frac{P(0)S}{RkT_1} \int_1^r \left[(c_p + R\alpha) \log s + c_p \log T_1 - R \log P(0)\right] \frac{ds}{s^{\alpha+1}} \tag{3.6.40}$$

da cui

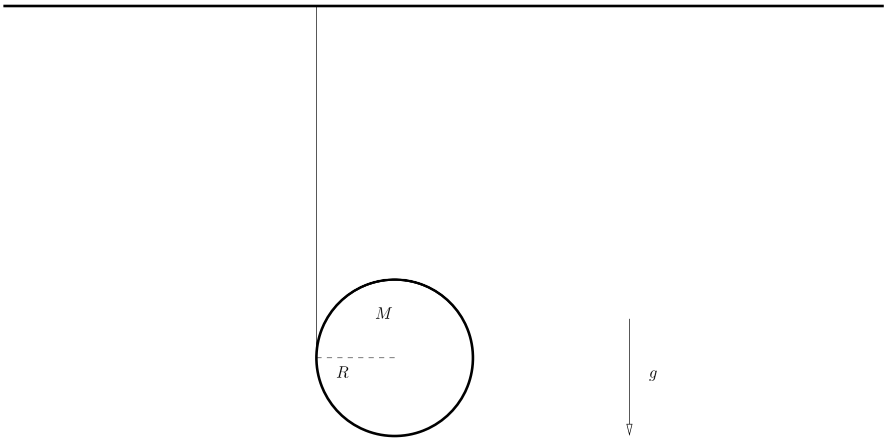
$$\mathcal{S}(r) = \frac{P(0)S}{RT_1} \left\{ \frac{\left(c_p + R\alpha + \alpha c_p \log T_1 - \alpha R \log P(0)\right)\left(r^\alpha - 1\right) - \alpha\left(c_p + R\alpha\right) \log r}{k\alpha^2 r^\alpha} \right\} \tag{3.6.41}$$

e (notare che α, k e $P(0)$ dipendono da r)

$$\Delta\mathcal{S} = S(r) - S(1) \tag{3.6.42}$$

3.7. 12 febbraio 2010

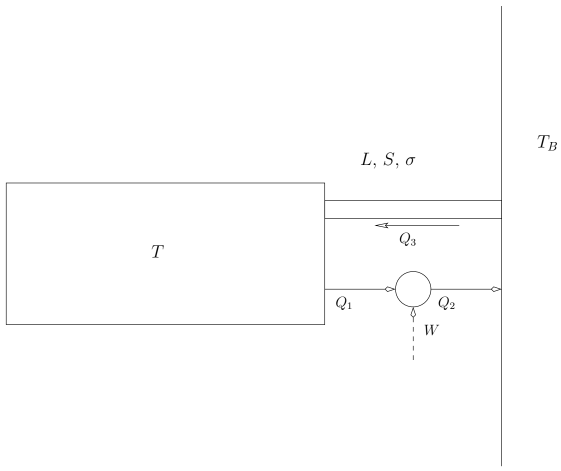
Problema 1



Il disco in figura, inizialmente in quiete, ha raggio R e massa M. Attorno ad esso è avvolto un filo inestensibile con densità lineare di massa λ. La lunghezza della parte avvolta è ℓ, ed il filo è diretto verticalmente.

1. Dire se nella caduta successiva il filo rimane verticale, giustificando la risposta.
2. Scelta come coordinata la quota del centro del disco scrivete l'equazione del moto del sistema, e risolvetela per $\lambda = 0$.
3. Calcolare la velocità del centro di massa del sistema quando il filo si è completamente dipanato, cioè quando il disco è sceso di un tratto ℓ, per un valore generico di λ.

Problema 2



Un corpo di capacità termica costante è posto in contatto termico con un bagno termico di temperatura T_B mediante una sbarra di lunghezza L, sezione S e conducibilità termica

σ. Si vuole mantenere la sua temperatura ad un valore $T = T_B/2$ estraendo calore mediante una macchina termica reversibile, come in figura.

1. Calcolare la potenza W che è necessario fornire alla macchina.

2. Determinare l'aumento di entropia dell'universo per unità di tempo.

3. Se inizialmente $T = T_B$ e alla macchina termica viene fornita la potenza W precedentemente determinata, si riesce a raffreddare il corpo alla temperatura voluta? Giustificare la risposta.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Supponiamo che il filo resti verticale. Allora sul sistema filo+disco agiscono solo forze verticali (la tensione e la forza peso), e il centro di massa non si muove orizzontalmente. Se $\lambda = 0$ il centro di massa coincide col centro del disco, quindi la caduta a filo verticale è una soluzione accettabile. Se $\lambda > 0$ invece il centro di massa accelera rispetto al centro del disco durante la caduta anche in orizzontale, si ha quindi un'inconsistenza. Questo effetto sarà trascurabile se $\lambda R/M \ll 1$.

Domanda 2

Supponiamo che il moto avvenga veramente in verticale, e trascuriamo effetti legati al dettaglio della distribuzione del filo sul disco. Fissiamo un sistema di riferimento con origine nel punto in cui il centro del disco si trova inizialmente, ed indichiamo con z la quota di questo ad un istante generico. Possiamo allora scrivere l'energia del sistema nella forma

$$E = \frac{1}{2} I(z)\dot{\theta}^2 + U_{disco}(z) + U_{filo}(z)$$

dove U_{disco} è il potenziale gravitazionale del disco, che possiamo scrivere come

$$U_{disco}(z) = Mgz$$

L'energia potenziale del filo si può scrivere come somma di due termini:

$$U_{filo}(z) = \lambda\,(\ell + z)\,gz + (-\lambda z)\,g\frac{z}{2}$$

Il primo tiene conto dell'energia potenziale del filo ancora avvolto al disco, che corrisponde ad una massa totale $\lambda\,(\ell + z)$ ad una quota z. Il secondo tiene conto dell'energia della parte di filo che si è srotolato, corrispondente ad una massa $-\lambda z$ alla quota $z/2$ del suo centro di massa. Si poteva arrivare allo stesso risultato calcolando il lavoro fatto dalla forza peso sul centro del disco:

$$\mathcal{L}(z) = \int_0^z \left\{-\left[M + \lambda\,(\ell + z)\right] g\right\} dz$$

dove il termine tra parentesi graffe è appunto la forza peso dovuta al disco ed al filo ancora avvolto ad esso. Integrando si trova

$$-\mathcal{L}(z) = \left[Mz + \lambda\ell z + \lambda\frac{z^2}{2}\right]g$$

che corrisponde a $U_{filo} + U_{disco}$.

$I(z)$ il momento di inerzia del disco e del filo ad esso avvolto rispetto al punto di separazione del filo, istantaneamente immobile

$$I(z) = \left\{\frac{1}{2}MR^2 + MR^2\right\} + \left\{\lambda\left(\ell+z\right)R^2 + \lambda\left(\ell+z\right)R^2\right\}$$

Il primo termine tra parentesi graffe è il contributo del disco (momento di inerzia rispetto al centro di massa più contributo dettato dal teorema di Steiner) e il second quello del filo (come sopra, tenendo conto che tutto il filo si trova al bordo del disco). In conclusione possiamo scrivere l'energia, tenendo conto del fatto che $\dot{z} = \dot{\theta}/R$, nella forma

$$E = \frac{1}{2}I\frac{\dot{z}^2}{R^2} + \left[Mz + \lambda\ell z + \lambda\frac{z^2}{2}\right]g$$

Derivando rispetto al tempo (indichiamo con l'apice la derivata rispetto a z) otteniamo

$$\dot{E} = IR^{-2}\dot{z}\ddot{z} + \frac{1}{2}I'R^{-2}\dot{z}^3 + \left(M + \lambda\ell + \lambda z\right)g\dot{z} = 0$$

dove si è indicato con l'apice la derivata rispetto a z:

$$I' = 2\lambda R^2$$

e quindi l'equazione del moto

$$\left[\frac{3}{2}M + 2\lambda\left(\ell+z\right)\right]\ddot{z} + \lambda\dot{z}^2 + \left(M + \lambda\ell + \lambda z\right)g = 0$$

Ponendo $\lambda = 0$ questa diviene

$$\frac{3}{2}M\ddot{z} + Mg = 0$$

cioè

$$\ddot{z} = -\frac{2}{3}g$$

Domanda 3

Uguagliamo l'energia calcolata precedentemente tra la configurazione iniziale ($z = 0$, $\dot{z} = 0$) e quella finale ($z = -\ell$, $\dot{z} = v_{cm}$):

$$0 = \frac{1}{2}I(-\ell)R^{-2}v_{cm}^2 - M_1(-\ell)g\ell - M_2(-\ell)g\frac{\ell}{2}$$

da cui

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3} g\ell \left(1 + \frac{\lambda\ell}{2M}\right)}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Il flusso di calore $\dot{Q}_3$ è determinato dalla legge della conduzione termica:

$$\dot{Q}_3 = \frac{S\sigma}{L}\left(T_B - T\right) = \frac{S\sigma}{2L} T_B$$

e se la temperatura del corpo resta stazionaria deve essere $\dot{Q}_1 = \dot{Q}_3$. Dal primo principio abbiamo che

$$W = \dot{Q}_2 - \dot{Q}_1$$

e dato che la macchina termica è reversibile deve essere

$$dS = -\frac{dQ_1}{T} + \frac{dQ_2}{T_B} = 0$$

da cui

$$\frac{2}{T_B}\dot{Q}_1 = \frac{1}{T_B}\dot{Q}_2$$

In conclusione

$$W = 2\dot{Q}_1 - \dot{Q}_1 = \frac{S\sigma}{2L} T_B$$

Domanda 2

Dato che lo stato termodinamico del corpo, della sbarra e della macchina ciclica non cambia dopo un ciclo, dobbiamo considerare solo la variazione di entropia del bagno termico:

$$dS = -\frac{dQ_3}{T_B} + \frac{dQ_2}{T_B}$$

da cui

$$\dot{S} = \frac{1}{T_B}\left(\dot{Q}_2 - \dot{Q}_3\right) = \frac{S\sigma}{2L}$$

Domanda 3

La risposta è positiva, perchè il lavoro necessario ad estrarre una data quantità di calore dal corpo diminuisce all'aumentare di $T_B - T$. Più in dettaglio, abbiamo come in precedenza per il primo principio, la legge di conduzione e la reversibilità

$$\begin{aligned} W &= \dot{Q}_2 - \dot{Q}_1 \qquad (3.7.1) \\ \dot{Q}_3 &= \frac{S\sigma}{L}\left(T_B - T\right) \\ \frac{1}{T}\dot{Q}_1 &= \frac{1}{T_B}\dot{Q}_2 \qquad (3.7.2) \end{aligned}$$

e la variazione della temperatura del corpo sarà data da

$$C\dot{T} = \dot{Q}_3 - \dot{Q}_1$$

dove C è la capacità termica. Dalle equazioni (3.7.1) e (3.7.2) segue

$$\dot{Q}_1 = \frac{T}{T_B - T} W = \frac{T T_B}{T_B - T}\frac{S\sigma}{2L} \qquad (3.7.3)$$

e sostituendo nell'ultima otteniamo

$$C\dot{T} = \frac{S\sigma}{2L}\left(\frac{T_B - 2T}{T_B - T}\right) T_B$$

che permette di concludere che $\dot{T} < 0$ per $T < T_B/2$. Possiamo anche risolvere esplicitamente l'equazione differenziale:

$$\int \left(\frac{T_B - T'}{T_B - 2T'}\right) dT' = \frac{S\sigma T_B}{2LC} t + c_1$$

(c_1 è una costante di integrazione) ottenendo

$$\frac{T(t) - T_B}{2} - \frac{1}{4} T_B \log\left[2\frac{T(t)}{T_B} - 1\right] = \frac{S\sigma T_B}{2LC} t \qquad (3.7.4)$$

ed è chiaro che

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = \frac{T_B}{2}$$

Possiamo anche studiare l'andamento asintotico ponendo

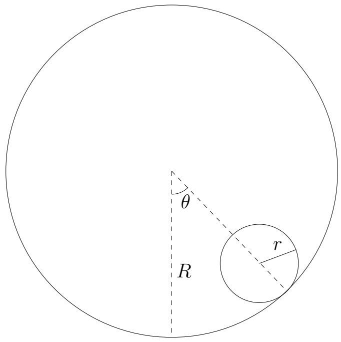
$$T(t) = \frac{T_B}{2} + \delta T$$

con $\delta T \ll 1$, che sostituito nella soluzione fornisce

$$\delta T(t) \simeq \frac{T_B}{2e} \exp\left(-\frac{2S\sigma}{LC} t\right) \qquad (3.7.5)$$

3.8. 2 marzo 2011

Problema 1 (15 punti)



Una sfera di massa M e raggio r rotola senza strisciare all'interno di un tubo di raggio $R > r$ come in figura. Il tubo si comporta come un vincolo monolatero.

Scegliendo l'angolo θ come coordinata,

1. scrivere l'energia totale del sistema in funzione di θ e $\dot{\theta}$;
2. supponendo che $\theta(t = 0) = 0$, si determini il minimo valore di $\dot{\theta}(t = 0)$ che permette alla sfera di percorrere un giro completo senza staccarsi dal tubo;
3. determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

Problema 2 (15 punti)

Due corpi hanno capacità termica rispettivamente

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \beta_1 T \\
C_2 &= \beta_2 T
\end{aligned}
$$

con β_1, β_2 costanti positive, e si trovano inizialmente alla stessa temperatura T_0.

1. Determinare il minimo lavoro necessario per fare in modo che i corpi abbiano temperature finali T_1, T_2 tali che $T_1/T_2 = 2$, e determinarle.
2. Al termine dell'operazione precedente si pongono i due corpi a contatto, e si attende l'equilibrio. Determinare la nuova temperatura finale.
3. Determinare la variazione totale di entropia del sistema tra la condizione iniziale e quella finale.

Soluzione primo problema

Domanda 1

La velocità del centro di massa del cilindro si scrive

$$v_{cm} = (R-r)\dot{\theta}$$

ma anche, usando la condizione di rotolamento puro,

$$v_{cm} = -r\omega$$

dove ω è la velocità angolare del cilindro. Da queste due relazioni segue che

$$\omega = -\frac{R-r}{r}\dot{\theta}$$

Possiamo adesso scrivere l'energia nella forma

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - Mg(R-r)\cos\theta \\
&= \frac{1}{2}M(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\left(1-\frac{R}{r}\right)^2\dot{\theta}^2 - Mg(R-r)\cos\theta \\
&= \frac{1}{2}M\left[(R-r)^2 + \frac{2}{5}r^2\left(1-\frac{R}{r}\right)^2\right]\dot{\theta}^2 - Mg(R-r)\cos\theta \\
&= \frac{1}{2}\frac{7}{5}M(R-r)^2\dot{\theta}^2 - Mg(R-r)\cos\theta
\end{aligned}$$

dove si è utilizzato il momento di inerzia della sfera, $I = 2Mr^2/5$. Notare che il termine cinetico si può anche scrivere nella forma

$$E_c = \frac{1}{2}\left[\frac{7}{5}Mr^2\right]\left[\frac{(R-r)^2}{r^2}\dot{\theta}^2\right] = \frac{1}{2}I'\omega^2$$

dove $I' = 7Mr^2/5$ è il momento di inerzia della sfera rispetto al punto di contatto.

Domanda 2

La componente radiale dell'equazione del moto del centro di massa della sfera si scrive

$$-M(R-r)\dot{\theta}^2 = -N + Mg\cos\theta$$

da cui è possibile calcolare la reazione vincolare.

$$N = Mg\cos\theta + M(R-r)\dot{\theta}^2$$

La sfera rimarrà aderente al vincolo se $N \geq 0$, cioè

$$g\cos\theta + (R-r)\dot{\theta}^2 \geq 0 \tag{3.8.1}$$

Dalla conservazione dell'energia possiamo ora determinare $(R-r)\dot{\theta}^2$ in funzione di θ:

$$\frac{1}{2}\frac{7}{5}M(R-r)^2\dot{\theta}_0^2 - Mg(R-r) = \frac{1}{2}\frac{7}{5}M(R-r)^2\dot{\theta}^2 - Mg(R-r)\cos\theta$$

da cui

$$(R-r)\dot{\theta}^2 = (R-r)\dot{\theta}_0^2 - \frac{10}{7}g\,(1-\cos\theta)$$

e sostituendo nella (3.8.1) troviamo

$$(R-r)\dot{\theta}_0^2 \geq g\left(\frac{10}{7} - \frac{17}{7}\cos\theta\right)$$

Il caso peggiore è $\theta = \pi$, quindi deve essere

$$\left|\dot{\theta}_0\right| \geq \sqrt{\frac{27}{7}\frac{g}{(R-r)}}$$

Domanda 3

La posizione di equilibrio stabile è $\theta = 0$. Sviluppando l'energia al secondo ordine troviamo a meno di una costante

$$E = \frac{1}{2}\frac{7}{5}M(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}Mg(R-r)\theta^2 + O\left(\theta^4\right)$$

quindi la frequenza delle piccole oscillazioni è

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Siano dQ_1, dQ_2 le quantità di calore cedute ai due corpi, e dW il lavoro fatto sul sistema. Dal primo principio segue

$$dW = dQ_1 + dQ_2$$

e quindi

$$dW = C_1 dT_1 + C_2 dT_2 = \beta_1 T_1 dT_1 + \beta_2 T_2 dT_2$$

Quindi integrando

$$W = \int_{T_0}^{T_1} \beta_1 T dT + \int_{T_0}^{T_2} \beta_2 T dT = \frac{1}{2}\beta_1 \left(T_1^2 - T_0^2\right) + \frac{1}{2}\beta_2 \left(T_2^2 - T_0^2\right)$$

D'altra parte detta ΔS la variazione totale di entropia nel processo avremo

$$dS = \frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} = \beta_1 dT_1 + \beta_2 dT_2$$

ed integrando

$$\Delta S = \beta_1 (T_1 - T_0) + \beta_2 (T_2 - T_0)$$

Infine $T_1 = 2T_2$ per cui

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}(4\beta_1 + \beta_2) T_2^2 - \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) T_0^2 \\ \Delta S &= (2\beta_1 + \beta_2) T_2 - (\beta_1 + \beta_2) T_0 \end{aligned} \tag{3.8.2}$$

Eliminando T_2 si trova

$$W = \frac{1}{2}(4\beta_1 + \beta_2)\left[\frac{(\beta_1 + \beta_2) T_0 + \Delta S}{2\beta_1 + \beta_2}\right]^2 - \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) T_0^2$$

e il minimo lavoro si ha per la più piccola variazione di entropia possibile, $\Delta S = 0$, da cui

$$W = \frac{1}{2}\left[\frac{(4\beta_1 + \beta_2)(\beta_1 + \beta_2)}{(2\beta_1 + \beta_2)^2} - 1\right](\beta_1 + \beta_2) T_0^2$$

Se $\Delta S = 0$ dalla (3.8.2) segue subito

$$T_2 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2\beta_1 + \beta_2} T_0, \quad T_1 = 2T_2$$

Domanda 2

Sempre dalla conservazione dell'energia abbiamo

$$\int_{T_1}^{T_0'} \beta_1 T dT + \int_{T_2}^{T_0'} \beta_2 T dT = 0$$

dato che non si compie lavoro sul sistema. Integrando troviamo

$$\frac{1}{2}\beta_1 \left(T_0'^2 - T_1^2\right) + \frac{1}{2}\beta_2 \left(T_0'^2 - T_2^2\right) = 0$$

da cui

$$
\begin{aligned}
T_0' &= \sqrt{\frac{\beta_1 T_1^2 + \beta_2 T_2^2}{\beta_1 + \beta_2}} = \sqrt{\frac{4\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 + \beta_2}} T_2 \\
&= \sqrt{\frac{4\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \frac{\beta_1 + \beta_2}{2\beta_1 + \beta_2}} T_0 = \sqrt{\frac{(4\beta_1 + \beta_2)(\beta_1 + \beta_2)}{(2\beta_1 + \beta_2)^2}} T_0
\end{aligned} \tag{3.8.3}
$$

Si poteva arrivare alla stessa conclusione senza integrare, usando il primo principio $W = \Delta U$, da cui

$$
\frac{1}{2}\left[\frac{(4\beta_1 + \beta_2)(\beta_1 + \beta_2)}{(2\beta_1 + \beta_2)^2} - 1\right](\beta_1 + \beta_2) T_0^2 = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)\left(T_0'^2 - T_0^2\right)
$$

Risolvendo per T_0' si trova ancora il risultato (3.8.3).

Domanda 3

Dato che

$$
dS = \beta_1 dT_1 + \beta_2 dT_2
$$

l'entropia del sistema vale, a meno di una costante,

$$
S = \beta_1 T_1 + \beta_2 T_2
$$

e quindi

$$
\Delta S = (\beta_1 + \beta_2)\left(T_0' - T_0\right) = (\beta_1 + \beta_2) T_0 \left[\sqrt{\frac{(4\beta_1 + \beta_2)(\beta_1 + \beta_2)}{(2\beta_1 + \beta_2)^2}} - 1\right]
$$

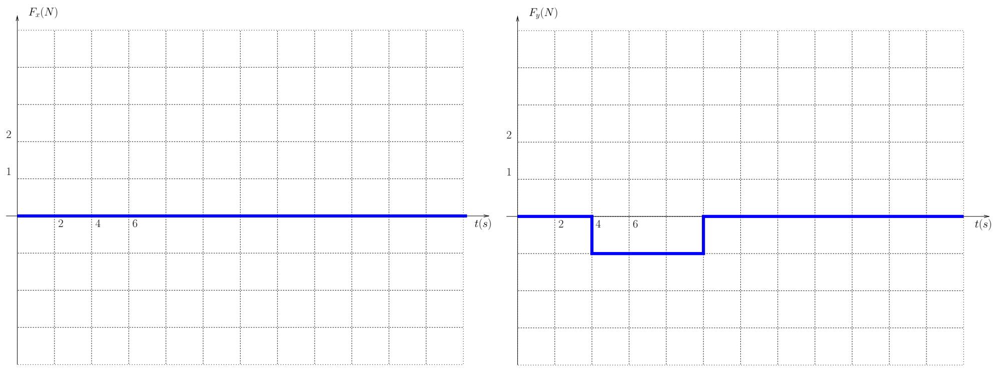
Parte II.

Prove in itinere

4. Prima prova in itinere

4.1. 8 novembre 2006

Problema 1 (15 punti)



Un punto materiale di massa $m = 1$ kg si muove in un piano, sotto l'azione di una forza le cui componenti lungo due direzioni ortogonali hanno l'andamento riportato in figura.

1. Inizialmente la velocità ha componenti $v_x^{(0)} = 6$ m/s e $v_y^{(0)} = 8$ m/s. Tracciare il grafico delle componenti della velocità in funzione del tempo.

2. Per le suddette condizioni iniziali, determinare la traiettoria.

3. Fissato ora il modulo v della velocità iniziale, detto α l'angolo che la traiettoria forma con la direzione y, determinare $\alpha(t = 14\,s)$ in funzione di $\alpha(t = 0\,s)$.

Problema 2 (15 punti)

Un punto materiale di massa m si muove in un piano secondo la legge oraria, espressa in coordinate cartesiane,

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$
$$y(t) = B\sin(\omega t)$$

1. Determinare la traiettoria del moto

2. Determinare la forza $\vec{F}$ agente sul punto, ed esprimerla in funzione della posizione del punto

3. Determinare per quali valori dei parametri A, B e ϕ si ha $|\vec{v}| =$ costante.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Non ci sono forze in direzione x, per cui il moto è sempre uniforme:

$$v_x = v_x^{(0)}\,.$$

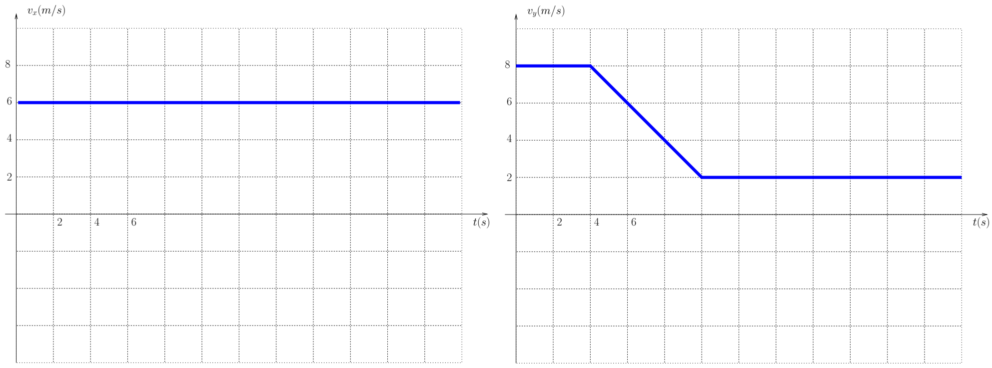
Lungo la direzione y si ha una forza costante tra $t = t_1 = 4$ e $t = t_2 = 6$. Possiamo scrivere quindi

$$
\begin{aligned}
v_y(t) &= v_y^{(0)} \qquad t < t_1 \\
v_y(t) &= v_y^{(0)} + \frac{F_y}{m}(t - t_1) \qquad t_1 < t < t_2 \\
v_y(t) &= v_y^{(0)} + \frac{F_y}{m}(t_2 - t_1) \qquad t > t_2 \,.
\end{aligned}
$$

Numericamente questo significa

$$
\begin{aligned}
v_y(t) &= 8 \qquad t < 4 \\
v_y(t) &= 12 - t \qquad 4 < t < 10 \\
v_y(t) &= 2 \qquad t > 10 \,.
\end{aligned}
$$

Il tutto è rappresentato nella figura che segue.



Domanda 2

Possiamo scrivere $x = 6t$ e

$$
\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{v_y}{v_x}
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}(x) &= \frac{4}{3} \qquad x < 24 \\
\frac{dy}{dx}(x) &= 2 - \frac{x}{36} \qquad 24 < x < 60 \\
\frac{dy}{dx}(x) &= \frac{1}{3} \qquad x > 60
\end{aligned}
$$

e integrando abbiamo

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{4}{3}x \qquad x < 24 \\
y(x) &= 2x - \frac{x^2}{72} + c_1 \qquad 24 < x < 60 \\
y(x) &= \frac{x}{3} + c_2 \qquad x > 60\,.
\end{aligned}
$$

Le costanti c_i si determinano imponendo la continuità della traiettoria:

$$\frac{4}{3} \times 24 = 2 \times 24 - \frac{1}{72}(24)^2 + c_1$$

$$2 \times 60 - \frac{1}{72}(60)^2 + c_1 = \frac{1}{3} \times 60 + c_2$$

da cui $c_1 = -8$ e $c_2 = 42$. La traiettoria è rappresentata nella figura che segue.

Domanda 3

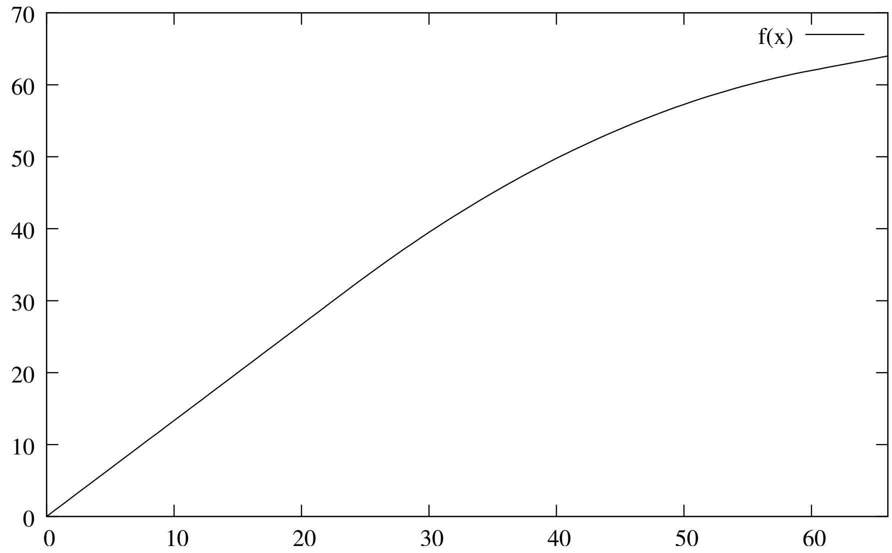
Ripetendo i calcoli iniziali abbiamo per $t > 10$

$$
\begin{aligned}
v_x(t) &= v \sin\alpha \\
v_y(t) &= v \cos\alpha + \frac{F_y}{m}(t_2 - t_1)
\end{aligned}
$$

da cui

$$\tan\alpha' = \frac{v_x(14)}{v_y(14)} = \frac{v \sin\alpha}{v\cos\alpha + \frac{F_y}{m}(t_2 - t_1)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \frac{F_y}{mv}(t_2 - t_1)}\,.$$

La traiettoria è quindi un arco di parabola in $24 < x < 60$ e una retta altrove, rappresentata nella figura che segue.



Rette e parabole si raccordano con continuità e con derivata continua.

Soluzione secondo problema

Domanda 1.

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} x &= A\cos\omega t\cos\phi - A\sin\omega t\sin\phi \\ y &= B\sin\omega t \end{aligned}$$

e sostituendo la seconda equazione nella prima

$$\begin{aligned} \frac{x}{A\cos\phi} &+ \tfrac{y}{B\cos\phi}\sin\phi = & \cos\omega t \\ \frac{y}{B} &= & \sin\omega t \end{aligned}$$

e sommando i quadrati di ambo i membri

$$\frac{y^2}{B^2} + \left(\frac{x}{A\cos\phi} + \frac{y}{B}\tan\phi\right)^2 = 1\,.$$

Questa è un'ellisse con centro nell'origine, in generale con gli assi ruotati.

Domanda 2

Derivando due volte rispetto al tempo abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{F_x}{m} = \ddot{x} &= -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x \\ \frac{F_y}{m} = \ddot{y} &= -B\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 y\,.\end{aligned}$$

Questo si può anche scrivere nella forma

$$\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}\,.$$

Domanda 3

Possiamo scrivere

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \omega^2 \left[A^2 \sin^2(\omega t + \phi) + B^2 \cos^2(\omega t)\right]$$

che non dipende dal tempo se

$$\frac{d}{dt} v^2 = \omega^3 \left[2A^2 \sin(\omega t + \phi)\cos(\omega t + \phi) - 2B^2 \cos(\omega t)\sin(\omega t)\right] = 0\,.$$

Questo significa

$$A^2 \sin(2\omega t + 2\phi) = B^2 \sin(2\omega t)$$

e una condizione necessaria è che $A^2 = B^2$, cioè $A = \pm B$. Se $A = B = 0$ abbiamo una soluzione banale (particella ferma nell'origine). Se $A = \pm B \neq 0$ deve essere

$$2\phi = 2k\pi$$

ossia $\phi = k\pi$. Possiamo riassumere tutte le soluzioni nelle condizioni

$$\begin{aligned}A &= \pm B \\ \phi &= 0\,.\end{aligned}$$

In questo caso abbiamo delle circonferenze (di raggio A).

4.2. 12 novembre 2008

Problema 1

Un carrello è libero di scorrere senza attrito su un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Su di esso è montato un cannone di lunghezza trascurabile capace di sparare proiettili con velocità di modulo v_p, orientato perpendicolarmente al carrello. Il carrello è lasciato andare nell'istante dello sparo, e quest'ultimo non influisce sul suo moto.

1. Calcolare lo spostamento del proiettile fino all'atterraggio sul piano inclinato.
2. Stabilire se il proiettile ricade sul cannone, giustificando la risposta.
3. Come cambiano le risposte precedenti se il carrello ha una velocità di modulo v_0 nell'istante dello sparo?

Problema 2

Una formica di massa m si trova sul bordo di un giradischi di raggio R, che ruota con velocità angolare ω. La formica vuole raggiungere il centro, ed è capace di spostarsi con una velocità di modulo costante $v_0 \geq \omega R$ rispetto al giradischi.

1. Supponendo che la formica punti sempre il centro del giradischi, determinare la sua traiettoria, in un opportuno sistema di coordinate fissato nel riferimento del laboratorio.
2. Sempre nell'ipotesi precedente, determinare la forza risultante agente sulla formica in funzione della sua distanza dal centro.
3. Se invece la formica volesse percorrere una traiettoria rettilinea, quanto tempo impiegherebbe a raggiungere il centro?

Soluzione primo problema

Domanda 1

Domanda 2

Domanda 3

Soluzione secondo problema

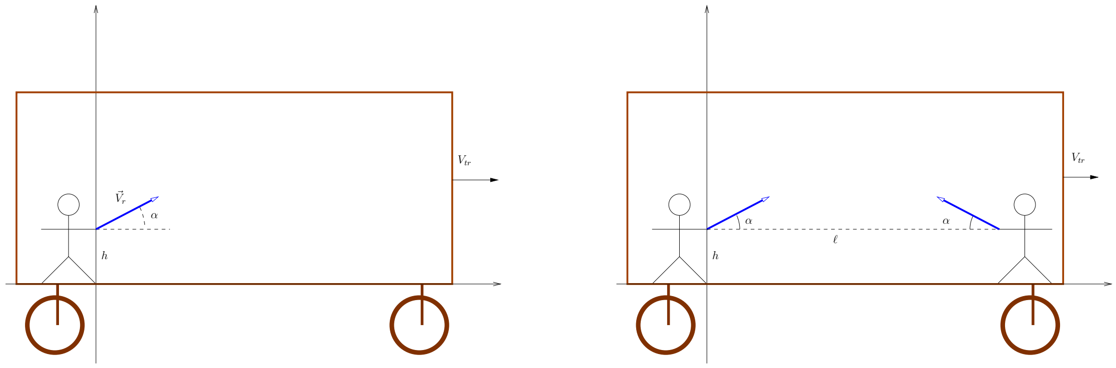
Domanda 1

Domanda 2

Domanda 3

4.3. 4 novembre 2009

Problema 1 (15 punti)



All'interno di un vagone ferroviario che si muove con velocità costante V_{tr} viene lanciato un oggetto la cui velocità iniziale relativa al vagone forma un angolo α rispetto all'orizzontale ed ha modulo V_r. Al momento del lancio l'oggetto si trova ad una altezza h rispetto al pavimento del vagone (in figura, a sinistra).

1. Determinate dopo quanto tempo l'oggetto arriva sul pavimento, in funzione di $\vec{V}_r$.

2. Fissate adesso il sistema di riferimento $\mathcal{R}$ di un osservatore esterno, scegliendolo in modo che all'istante del lancio l'origine sia sul pavimento del treno e sulla verticale dell'oggetto. Calcolate la gittata osservata in $\mathcal{R}$.

3. Supponete adesso che vengano lanciati due oggetti dai due estremi del vagone (di lunghezza ℓ), sempre da una altezza iniziale h. La velocità dei due oggetti relativa al vagone ha la stessa componente verticale ma componente orizzontale opposta (in figura, a destra). Sotto quali condizioni, e dopo quanto tempo i due oggetti si scontrano?

Problema 2 (15 punti)

Un punto materiale si muove nel piano con una legge oraria data, in coordinate cartesiane, da

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cos\theta(t) \\ B\sin\theta(t) \end{pmatrix} \tag{4.3.1}$$

dove A, B sono due costanti e $\theta(t)$ una funzione incognita del tempo, crescente e illimitata superiormente.

1. Determinare la traiettoria del punto materiale.

2. Calcolare il raggio di curvatura della traiettoria, in funzione di θ.

3. Ponendo $\theta(t) = \omega t + \theta_0$, con ω e θ_0 costanti, mostrare che il vettore accelerazione è proporzionale al vettore posizione, $\vec{a}(t) = K\vec{r}(t)$, e determinare la costante K.

Soluzione primo problema

Problema 1

La legge oraria per il moto in direzione verticale si scrive

$$y(t) = h + V_r \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{4.3.2}$$

e il tempo t_V a cui l'oggetto arriva sul pavimento si determina ponendo $y(t_V) = 0$:

$$t_V^2 - \frac{2V_r \sin\alpha}{g} t_V - \frac{2h}{g} = 0 \tag{4.3.3}$$

Risolvendo si ottiene

$$t_V = \frac{V_r \sin\alpha}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{V_r \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}} \tag{4.3.4}$$

dove la soluzione $t_V < 0$ deve essere scartata. Quindi

$$t_V = \frac{V_r \sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{V_r \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}} \tag{4.3.5}$$

Problema 2

Nel sistema scelto le leggi orarie sono date da

$$x(t) = (V_r \cos\alpha + V_{tr})\, t \tag{4.3.6}$$

$$y(t) = h + V_r \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{4.3.7}$$

La prima equazione descrive un moto uniforme con velocità data dalla somma della velocità dell'oggetto rispetto al treno e di quella di quest'ultimo. La seconda un moto uniformemente accelerato (l'accelerazione è la stessa nel sistema di riferimento solidale al vagone e in $\mathcal{R}$, come anche la velocità verticale).

Considerando la seconda equazione si vede che il tempo di volo è quello determinato all'esercizio precedente. Sostituendo quest'ultimo nella prima equazione troviamo la gittata

$$d = x(t_V) = (V_r \cos\alpha + V_{tr}) \frac{V_r \sin\alpha}{g} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{V_r^2 \sin^2\alpha}}\right] \tag{4.3.8}$$

Problema 3

L'istante a cui i due oggetti si scontrano non dipende dal sistema di riferimento. Ponendosi nel sistema del vagone abbiamo per il primo oggetto

$$\begin{aligned} x_1(t) &= V_r \cos\alpha\, t & (4.3.9)\\ y_1(t) &= h + V_r \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 & (4.3.10) \end{aligned}$$

e per il secondo

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \ell - V_r \cos\alpha\, t & (4.3.11)\\ y_2(t) &= h + V_r \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 & (4.3.12) \end{aligned}$$

Notare che è sempre $y_1(t) = y_2(t)$. Per determinare l'istante dello scontro è sufficiente porre $x_1(t_S) = x_2(t_S)$, cioè

$$t_S = \frac{\ell}{2V_r \cos\alpha} \tag{4.3.13}$$

Una prima condizione da imporre è $t_S > 0$, che significa $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Inoltre lo scontro deve avvenire al di sopra del pavimento, quindi $y_{1,2}(t_S) > 0$. Questo significa

$$h + \frac{\ell \sin\alpha}{2\cos\alpha} - \frac{g\ell^2}{8V_r^2 \cos^2\alpha} > 0 \tag{4.3.14}$$

che si può anche scrivere

$$\tan^2\alpha - \frac{4V_r^2}{g\ell} \tan\alpha - \left(\frac{8hV_r^2}{g\ell^2} - 1\right) < 0 \tag{4.3.15}$$

ed ha per soluzione

$$\frac{2V_r^2}{g\ell} - \sqrt{\left(\frac{2V_r^2}{g\ell}\right)^2 + \left(\frac{8hV_r^2}{g\ell^2} - 1\right)} < \tan\alpha < \frac{2V_r^2}{g\ell} + \sqrt{\left(\frac{2V_r^2}{g\ell}\right)^2 + \left(\frac{8hV_r^2}{g\ell^2} - 1\right)} \tag{4.3.16}$$

Soluzione secondo problema

Problema 1

Elevando al quadrato $x(t)$ e $y(t)$ otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{A^2} &= \cos^2\theta & (4.3.17)\\ \frac{y^2}{B^2} &= \sin^2\theta & (4.3.18) \end{aligned}$$

e sommando membro a membro abbiamo

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \tag{4.3.19}$$

che è l'equazione di un'ellisse. Dato che θ è crescente e illimitata superiormente il punto materiale la percorrerà integralmente e ripetutamente.

Problema 2

Possiamo calcolare la velocità

$$\vec{v} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} -A\sin\theta \\ B\cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.3.20}$$

l'accelerazione

$$\vec{a} = \dot{\theta}^2 \begin{pmatrix} -A\cos\theta \\ -B\sin\theta \end{pmatrix} + \ddot{\theta} \begin{pmatrix} -A\sin\theta \\ B\cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.3.21}$$

il versore tangente alla traiettoria

$$\hat{\tau} = \frac{1}{\sqrt{A^2\sin^2\theta + B^2\cos^2\theta}} \begin{pmatrix} -A\sin\theta \\ B\cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.3.22}$$

e quello normale

$$\hat{n} = -\frac{1}{\sqrt{A^2\sin^2\theta + B^2\cos^2\theta}} \begin{pmatrix} B\cos\theta \\ A\sin\theta \end{pmatrix} \tag{4.3.23}$$

Abbiamo quindi per il raggio di curvatura

$$\frac{v^2}{\rho} = \vec{a}\cdot\hat{n} = \frac{AB\dot{\theta}^2}{\sqrt{A^2\sin^2\theta + B^2\cos^2\theta}} \tag{4.3.24}$$

ossia, tenendo conto che $v^2 = \dot{\theta}^2\left(A^2\sin^2\theta + B^2\cos^2\theta\right)$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{AB}{\left(A^2\sin^2\theta + B^2\cos^2\theta\right)^{3/2}} \tag{4.3.25}$$

Notare che se $A = B = R$ la traiettoria si riduce a una circonferenza, e $\rho = R$.

Problema 3

Abbiamo

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} A\cos(\omega t + \theta_0) \\ B\sin(\omega t + \theta_0) \end{pmatrix} \tag{4.3.26}$$

e derivando ripetutamente rispetto al tempo

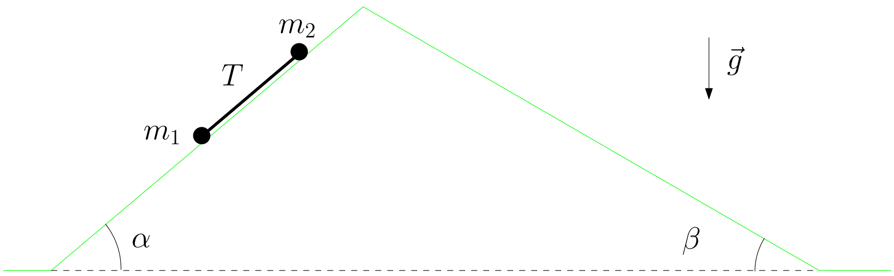
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -A\omega \sin(\omega t + \theta_0) \\ B\omega \cos(\omega t + \theta_0) \end{pmatrix} \tag{4.3.27}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -A\omega^2 \cos(\omega t + \theta_0) \\ -B\omega^2 \sin(\omega t + \theta_0) \end{pmatrix} \tag{4.3.28}$$

Quindi $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$, e $K = -\omega^2$.

4.4. 15 dicembre 2010

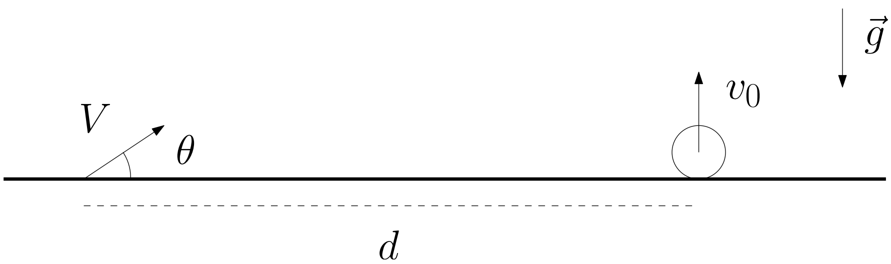
Problema 1 (15 punti)



Due corpi di massa m_1 e m_2 sono collegati da una fune inestensibile di massa nulla e salgono su un piano inclinato collegato a un altro piano in discesa. I due piani formano con la direzione orizzontale angoli rispettivamente $\alpha = \pi/4$ e $\beta = \pi/6$. Tutte le superfici sono liscie.

1. Scrivere le equazioni del moto per i due corpi.
2. Il primo corpo valica la cima del piano inclinato e ridiscende dall'altra parte. Calcolare le accelerazioni delle due masse.
3. Se la fune è in grado di sostenere una tensione massima T_{MAX}, per quali valori di m_1 e m_2 questa non si spezza?

Problema 2 (15 punti)

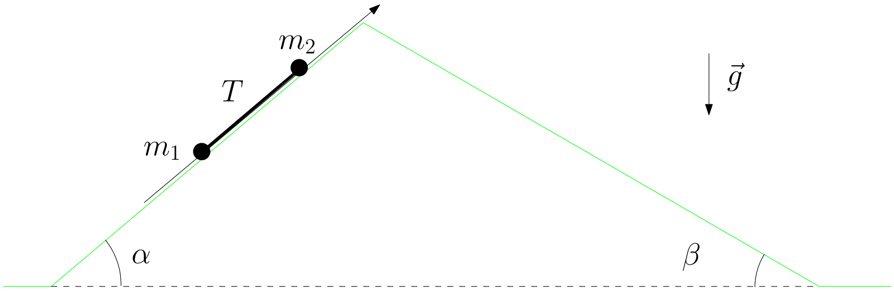


Un piattello viene lanciato verso l'alto con velocità iniziale v_0. Un tiratore, che si trova ad una distanza d dalla posizione del lancio vuole colpirlo con un proiettile che parte dal fucile con velocità iniziale V.

1. Supponendo che V sia abbastanza grande, e che il tiratore spari nell'istante in cui il piattello si ferma a mezz'aria, determinare l'angolo di inclinazione del fucile rispetto all'orizzontale.
2. Determinare il minimo valore di V per cui è possibile colpire il piattello, nelle stesse ipotesi precedenti riguardo l'istante dello sparo.
3. Determinare l'angolo di inclinazione del fucile rispetto all'orizzontale se lo sparo avviene all'istante del lancio, nell'ipotesi che V sia sufficientemente grande.

Soluzione primo problema

Domanda 1



Scegliamo un sistema di riferimento come in figura. Indicando con x_1 e x_2 le coordinate delle due masse abbiamo

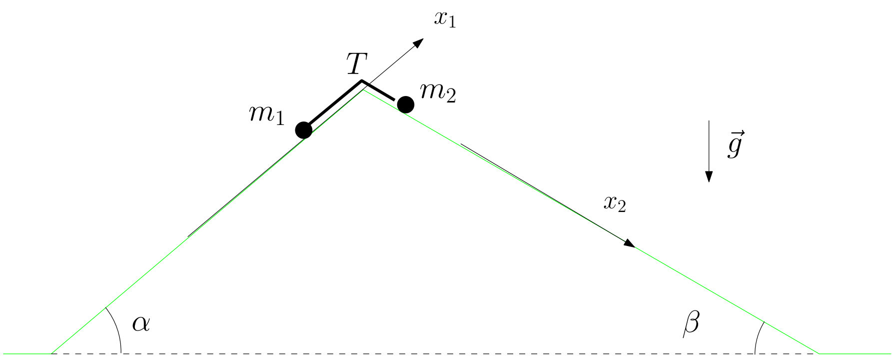
$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -m_1 g \sin\alpha + T \\ m_2\ddot{x}_2 &= -m_2 g \sin\alpha - T \end{aligned}$$

e dato che il filo è inestensibile $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$ sommando membro a membro otteniamo

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = -(m_1 + m_2) g \sin\alpha$$

Domanda 2

Nella nuova situazione, fissiamo due diversi sistemi di riferimento come in figura. Scriviamo nuovamente le equazioni del moto per le due masse.



Abbiamo

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -m_1 g \sin\alpha + T \\ m_2\ddot{x}_2 &= m_2 g \sin\beta - T \end{aligned}$$

Anche in questo caso data l'inestensibilità del filo $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = a$ quindi

$$\begin{aligned} m_1 a &= -m_1 g \sin\alpha + T \\ m_2 a &= m_2 g \sin\beta - T \end{aligned}$$

e sommando membro a membro otteniamo l'accelerazione

$$a = g\frac{m_2 \sin\beta - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_2}$$

che è diretta per ciascuna massa parallelamente al piano di appoggio.

Domanda 3

Dall'equazione del moto scritta nel primo esercizio otteniamo,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -g\sin\alpha + \frac{1}{m_1}T \\ \ddot{x}_2 &= g\sin\beta - \frac{1}{m_2}T \end{aligned}$$

e sottraendo membro a membro troviamo che $T = 0$ quando le due masse si trovano sullo stesso piano. Se invece si trovano su piani diversi dalle equazioni del moto scritte nel secondo esercizio abbiamo

$$\begin{aligned} a &= -g\sin\alpha + \frac{1}{m_1}T \\ a &= g\sin\beta - \frac{1}{m_2}T \end{aligned}$$

e sottraendo ancora membro a membro abbiamo

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g\left(\sin\alpha + \sin\beta\right) < T_{MAX}$$

che è la condizione per non far spezzare la fune. Usando i valori dati degli angoli deve essere

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right) < T_{MAX}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Calcoliamo l'altezza h alla quale si ferma il piattello. Ponendo $t = 0$ al momento del lancio deve essere

$$v_p(t) = v_0 - gt = 0$$

e

$$y_p(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = h$$

Sostituendo nella seconda equazione il tempo $t = v_0/g$ ricavato dalla prima abbiamo

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Adesso poniamo $t = 0$ al momento dello sparo. Le leggi orarie del proiettile si possono scrivere

$$\begin{aligned} X(t) &= Vt\cos\theta \\ Y(t) &= Vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

e quelle del piattello

$$\begin{aligned} x_p(t) &= d \\ y_p(t) &= h - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Se questo viene colpito deve essere ad un certo istante$X(\bar{t}) = x_p(\bar{t})$ e $Y(\bar{t}) = y_p(\bar{t})$ cioè

$$\begin{aligned} V\bar{t}\cos\theta &= d \\ V\bar{t}\sin\theta - \frac{1}{2}g\bar{t}^2 &= h - \frac{1}{2}g\bar{t}^2 \end{aligned}$$

Dalla prima equazione troviamo

$$\bar{t} = \frac{d}{V\cos\theta}$$

e sostituendo nella seconda abbiamo

$$\tan\theta = \frac{h}{d} = \frac{v_0^2}{2gd}$$

cioè si deve mirare alla posizione in cui il piattello si ferma.

Domanda 2

Per colpire il piattello la collisione tra questo e il proiettile deve avvenire a $y > 0$. Quindi

$$y_p(\bar{t}) = h - \frac{1}{2}g\frac{d^2}{V^2\cos^2\theta} > 0$$

da cui

$$V^2 > \frac{gd^2}{2h\cos^2\theta} = \frac{g^2d^2}{v_0^2}\left(1 + \tan^2\theta\right)$$

cioè

$$V > \frac{v_0}{2}\sqrt{1+\left(\frac{2gd}{v_0^2}\right)^2}$$

Domanda 3

In questo caso le leggi orarie si scrivono

$$\begin{aligned}
X(t) &= Vt\cos\theta \\
Y(t) &= Vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 \\
x_p(t) &= d \\
y_p(t) &= v_0 t - \frac{1}{2}gt^2
\end{aligned}$$

La collisione avviene dopo un tempo

$$\bar{t} = \frac{d}{V\cos\theta}$$

come nel caso precedente, e deve essere

$$V\bar{t}\sin\theta - \frac{1}{2}g\bar{t}^2 = v_0\bar{t} - \frac{1}{2}g\bar{t}^2$$

Segue che la velocità verticale del piattello e del proiettile devono essere le stesse

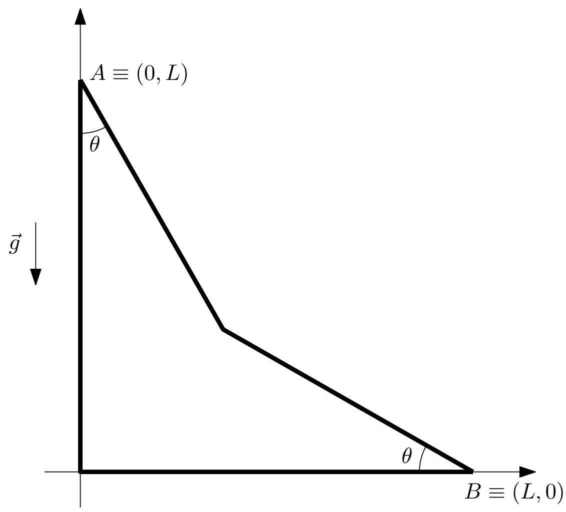
$$V\sin\theta = v_0$$

e quindi

$$\sin\theta = \frac{v_0}{V}$$

4.5. 9 novembre 2011

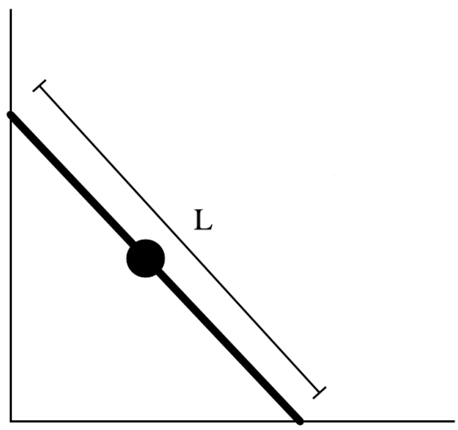
Problema 1 (15 punti)



Un corpo di massa m inizialmente immobile viene lasciato libero di cadere sul doppio piano inclinato rappresentato in figura partendo dal punto A, in assenza di attrito. La giunzione tra le parti di piano con diversa pendenza è opportunamente arrotondata, in modo che la velocità del corpo si conservi in modulo attraversandola.

1. Calcolare l'accelerazione della massa sulle due parti del piano.
2. Determinare la velocità della particella in funzione del tempo per $0 < \theta < \pi/2$.
3. Calcolare la velocità della massa nel punto B in funzione di θ.

Problema 2 (15 punti)



Una sbarra rigida di lunghezza L e massa trascurabile è vincolata a muoversi mantenendo gli estremi fissi su due guide perpendicolari tra loro. Al centro della sbarra è fissato rigidamente un corpo puntiforme di massa m. La sbarra è inizialmente in posizione verticale.

1. Descrivere la traiettoria percorsa dal corpo quando la sbarra si muove dalla posizione iniziale verticale a quella orizzontale: che tipo di curva è? (Suggerimento: calcolare la lunghezza della sbarra in funzione delle coordinate del corpo).

2. Assumendo che l'estremo della sbarra vincolato sulla guida orizzontale si muova a velocità costante v_0, calcolare il modulo quadro della velocità del corpo in funzione del tempo.

3. Nelle stesse condizioni della domanda precedente, calcolare le componenti tangenti e normali alla traiettoria della forza totale che agisce sul corpo.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Il moto su ciascuna delle due parti del piano è uniformenente accelerato, come su un piano inclinato semplice, e le accelerazioni valgono

$$\begin{aligned} a_+ &= g\cos\theta \\ a_- &= g\sin\theta \end{aligned}$$

Domanda 2

e la lunghezza di entrambe le parti è data da

$$\ell = \frac{L}{\sin\theta + \cos\theta}$$

Inizialmente abbiamo

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}gt^2\cos\theta \\ v &= gt\cos\theta \end{aligned}$$

valida fino al tempo

$$t_1 = \sqrt{\frac{2\ell}{g\cos\theta}}$$

Successivamente abbiamo

$$\begin{aligned} s &= \ell + gt_1\cos\theta\,(t-t_1) + \frac{1}{2}g\,(t-t_1)^2\sin\theta \\ v &= gt_1\cos\theta + g\,(t-t_1)\sin\theta \end{aligned}$$

valida fino al tempo t_2 nel quale

$$s = 2\ell$$

cioè

$$(t_2 - t_1)^2 + 2t_1 \cot\theta \, (t_2 - t_1) - \frac{2\ell}{g\sin\theta} = 0$$

ossia

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= -t_1 \cot\theta + \sqrt{t_1^2 \cot^2\theta + \frac{2\ell}{g\sin\theta}} \\ &= -t_1 \cot\theta + \sqrt{\frac{2\ell}{g\sin\theta}\left(\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta}\right)} \end{aligned}$$

In conclusione

$$v(t) = \begin{cases} gt\cos\theta & \text{per } 0 < t < t_1 \\ gt_1\cos\theta + g\,(t - t_1)\sin\theta & \text{per } t_1 < t < t_2 \end{cases}$$

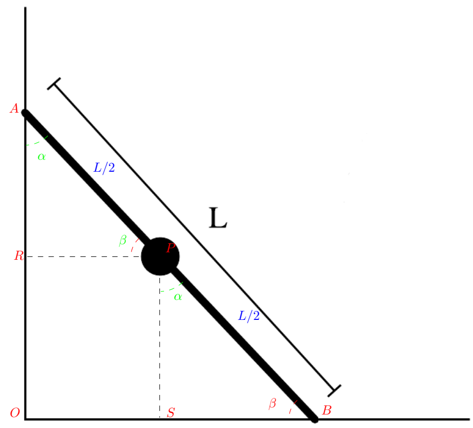
Domanda 3

Abbiamo

$$\begin{aligned} v_B &= v(t_2) = gt_1\cos\theta + g\,(t_2 - t_1)\sin\theta \\ &= gt_1\cos\theta + g\sin\theta\left[-t_1\cot\theta + \sqrt{\frac{2\ell}{g\sin\theta}\left(\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta}\right)}\right] \\ &= \sqrt{2g\ell\,(\cos\theta + \sin\theta)} = \sqrt{2gL} \end{aligned}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1



Dalla figura segue che i triangoli ARP e PSB sono uguali, dette x,y le coordinate del corpo rispetto ad un sistema di assi coincidente con le pareti deve quindi essere

$$(2x)^2 + (2y)^2 = L^2$$

e quindi la traiettoria è il quarto di circonferenza di lato $L/2$ con centro nell'origine che si trova nel primo quadrante.

Domanda 2

Dato che

$$2x = v_0 t$$

e che

$$y = \sqrt{\frac{L^2}{4} - x^2}$$

abbiamo

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \\ &= \dot{x}^2 \left[1 + \frac{x^2}{\frac{L^2}{4} - x^2}\right] \\ &= \frac{v_0^2}{4} \frac{L^2}{L^2 - v_0^2 t^2} \end{aligned}$$

Il moto del corpo e la sua traiettoria sono rappresentati nella animazione `http://www.df.unipi.it/~cella/videos/provescritte/caduta.html`.

Domanda 3

Dato che il moto è circolare, l'accelerazione normale sarà

$$a_n = -2\frac{v^2}{L}$$

e quella tangenziale

$$a_t = \dot{v}$$

Derivando il modulo di v calcolato al punto precedente abbiamo

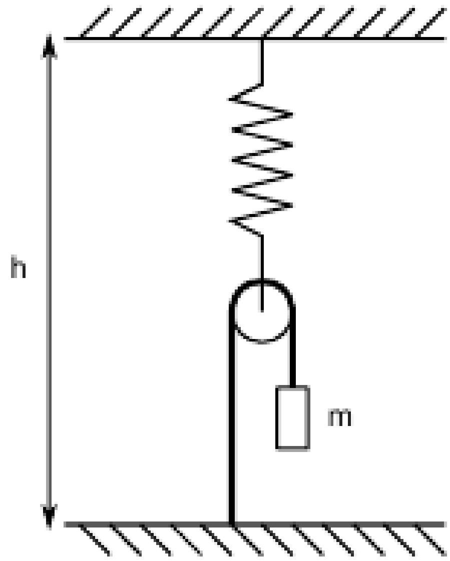
$$a_t = \frac{t}{2L^2} \left(\frac{L^2 v_0^2}{L^2 - v_0^2 t^2}\right)^{3/2}$$

Moltiplicando per la massa abbiamo le forze totali:

$$
\begin{aligned}
F_t &= \frac{mt}{2L^2}\left(\frac{L^2 v_0^2}{L^2 - v_0^2 t^2}\right)^{3/2} \\
F_n &= -2m\frac{v^2}{L}
\end{aligned}
$$

4.6. 5 dicembre 2012

Problema 1 (15 punti)



Un corpo di massa m è appeso con una fune inestensibile di lunghezza $\frac{3}{4}h$ e di massa nulla ad una carrucola anch'essa di massa nulla, come in figura. La carrucola è attaccata attraverso una molla con lunghezza a riposo $\frac{1}{4}h$ e costante elastica k al soffitto, che si trova ad una distanza h dal pavimento. Il raggio della carrucola è trascurabile rispetto alle altre lunghezze in gioco. Il corpo e la carrucola possono muoversi solamente lungo la direzione verticale.

1. Trovare la posizione di equilibrio del corpo.
2. Calcolare la frequenza di oscillazione del corpo in verticale.
3. Il corpo si trova inizialmente nella posizione di equilibrio. Gli viene impressa una velocità v_0 lungo la verticale e diretta verso il basso. Qual'è il minimo valore di v_0 affinché il corpo urti il pavimento?

Problema 2 (15 punti)

Un punto materiale con velocità iniziale v_0 sale su un piano inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale. Il moto è senza attrito.

1. Quale altezza raggiunge il punto?
2. Ora il piano, che ha massa m pari alla massa del punto materiale, viene lasciato libero di muoversi sul piano orizzontale. Quale altezza raggiunge ora il punto?

3. Stessa domanda, sapendo che sul piano c'è attrito dinamico con coefficiente di attrito μ_d .

Soluzione primo problema

Domanda 1

Indicando con y la posizione verticale della massa rispetto al suolo per l'inestensibilità del filo la carrucola deve trovarsi a

$$y_c = \frac{1}{2}\left(y + \frac{3}{4}h\right)$$

quindi la lunghezza della molla vale

$$\ell = h - y_c = h - \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}h$$

e la forza di richiamo

$$F_{el} = k\left(\ell - \frac{1}{4}h\right) = k\left(\frac{3}{8}h - \frac{1}{2}y\right)$$

La massa sarà in equilibrio quando $T = mg$, e la carrucola quando

$$F_{el} = 2T = 2mg$$

da cui

$$y_{eq} = \frac{3}{4}h - \frac{4mg}{k}$$

Domanda 2

Scriviamo l'equazione del moto per la massa:

$$m\ddot{y} = T - mg = \frac{F_{el}}{2} - mg = \frac{3}{8}kh - \frac{1}{2}ky - mg$$

da cui

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}}$$

Domanda 3

Dato che il moto consiste in una oscillazione armonica attorno alla posizione di equilibrio, avremo

$$y = y_{eq} + A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

Imponendo le condizioni al contorno abbiamo

$$\begin{aligned} y_{eq} &= y_{eq} + A \\ v_0 &= B\omega \end{aligned}$$

e quindi

$$y = y_{eq} + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

Per urtare il pavimento dovremo quindi avere

$$v_0 = -\omega y_{eq} = -\sqrt{\frac{k}{2m}} \left(\frac{3}{4} h - \frac{4mg}{k} \right)$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Usando la conservazione dell'energia abbiamo

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = mgh$$

e quindi

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Domanda 2

Adesso si conserva sia l'energia E che la quantità di moto orizzontale P_x. Indicando con v_x e v_y le componenti della velocità del punto materiale rispetto al piano e con V la velocità (orizzontale) di quest'ultimo abbiamo

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} m \left[(V + v_x)^2 + v_y^2 \right] + mgy \\ P_x &= mV + m (V + v_x) \end{aligned}$$

Inizialmente

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m v_0^2 \\ P_x &= m v_0 \cos \alpha \end{aligned}$$

e quando il punto materiale raggiunge la sua altezza massima ($v_x = v_y = 0$, $y = h$)

$$\begin{aligned} E &= mV^2 + mgh \\ P_x &= 2mV \end{aligned}$$

quindi

$$V = \frac{1}{2} v_0 \cos\alpha$$

e

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{4} m v_0^2 \cos^2\alpha + mgh$$

da cui

$$h = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \frac{1}{2}\cos^2\alpha\right) = \frac{v_0^2}{4g}\left(1 + \sin^2\alpha\right)$$

Domanda 3

Scriviamo le equazioni del moto del piano

$$m\ddot{X} = N\sin\alpha + \mu_d N\cos\alpha$$

e del punto materiale, queste ultime nella direzione normale

$$m\left(-\ddot{X}\sin\alpha\right) = N - mg\cos\alpha$$

e parallela al piano

$$m\left(a + \ddot{X}\cos\alpha\right) = -mg\sin\alpha - \mu_d N$$

Abbiamo indicato con a l'accelerazione del punto materiale relativa al piano, che è parallela ad esso. Risolvendo il sistema troviamo

$$a = -\frac{2g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)}{\mu_d\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha + 1}$$

e quindi il moto del punto materiale relativo al piano è uniformemente accelerato. Lo spazio percorso relativamente al piano che il punto materiale percorre prima di fermarsi (sempre relativamente ad esso) è

$$s = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2\left(\mu_d\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha + 1\right)}{4g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)}$$

che corrisponde ad una altezza

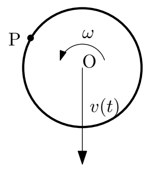
$$h = \frac{v_0^2}{4g}\frac{\mu_d\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha + 1}{\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha}\sin\alpha$$

Ponendo $\mu_d = 0$ si può ottenere la risposta alla domanda precedente come caso particolare

$$h = \frac{v_0^2}{4g}\left(1 + \sin^2\alpha\right)$$

4.7. 8 febbraio 2012

Problema 1 (15 punti)



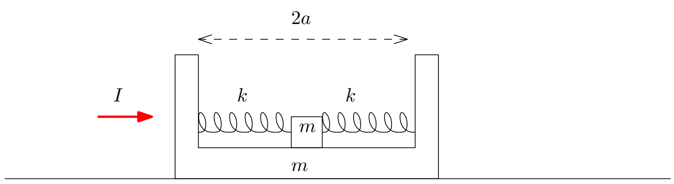
Il centro di una moneta di raggio R, inizialmente fermo, cade con accelerazione costante $\vec{a} = -g\hat{y}$ verso il basso come in figura. La moneta inoltre ruota con una velocità angolare costante ω.

1. Scrivere il modulo della velocità del punto P posto sul bordo della moneta in funzione del tempo, sapendo che all'istante iniziale si trova sulla verticale del centro O, al di sopra di esso.

2. Ad un istante $t > 0$ qualsiasi determinare la posizione di un punto della moneta con velocità nulla, se esiste.

3. Ad un istante $t > 0$ qualsiasi determinare la posizione di un punto della moneta con accelerazione nulla, se esiste.

Problema 2 (15 punti)



Un contenitore di massa m della forma in figura ospita al suo interno un corpo puntiforme, pure di massa m. Il corpo può muoversi senza attrito sul fondo, che ha una lunghezza totale $2a$, ed è fissato ai due bordi da molle di lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica k. Inizialmente il contenitore è in quiete su un piano orizzontale privo di attrito, e anche il corpo si trova all'interno in quiete nella posizione di equilibrio.

1. In un tempo molto breve si applica al contenitore un impulso orizzontale I. Determinare nell'istante immediatamente successivo la velocità del contenitore e quella del corpo all'interno.

2. Per quale valore minimo di I il corpo all'interno urta contro le pareti?

3. Se tra corpo e contenitore esistesse attrito, quale frazione dell'energia cinetica iniziale del sistema verrebbe dissipata?

Soluzione primo problema

Domanda 1

Il moto del punto P sarà dato dalla composizione del moto circolare uniforme attorno ad O e di quello uniformemente accelerato di quest'ultimo. Quindi, ponendo la posizione iniziale di O nell'origine di un sistema di coordinate,

$$\begin{aligned} x &= -R\sin\omega t \\ y &= R\cos\omega t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

e derivando

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -R\omega\cos\omega t \\ \dot{y} &= -R\omega\sin\omega t - gt \end{aligned}$$

da cui otteniamo il modulo della velocità

$$v = \sqrt{R^2\omega^2 + g^2t^2 + 2R\omega gt\sin\omega t}$$

Domanda 2

Dato il centro di massa si muove ad un dato istante con una velocità $\vec{v} = -gt\hat{y}$ un punto della moneta potrà essere fermo solo se questa velocità verticale è compensata da quella del suo moto circolare. Questo può accadere solo sul diametro orizzontale della moneta, dove la velocità del moto circolare non ha componenti orizzontali. Inoltre indicando con d la posizione sul diametro relativa ad O di P dovrà essere

$$\omega d - gt = 0$$

e quindi $d = gt/\omega$. Il punto cercato esisterà solo per $d \le R$, e quindi per $t < \omega R/g$.

Domanda 3

In questo caso è l'accelerazione del moto circolare che deve compensare quella uniforme del centro di massa. Quindi il punto si troverà sul diametro verticale della moneta (dove l'accelerazione centripeta non ha componenti orizzontali) e dovrà essere

$$-\omega^2 d - g = 0$$

dove d è ancora la posizione sul diametro di P relativa ad O. In conclusione

$$d = -\frac{g}{\omega^2}$$

ed il punto cercato esisterà sempre, a condizione che $\omega^2 > g/R$.

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che l'urto è istantaneo il corpo all'interno del contenitore non ne risente, e qindi la sua velocità resta nulla. Per la velocità del contenitore abbiamo invece

$$mv_c = I$$

Domanda 2

Usando il teorema di Koenig l'energia del sistema si può scrivere nella forma

$$E = \frac{1}{2}(2m)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)\dot{x}_r^2 + \frac{k}{2}\left(x_r - a\right)^2 + \frac{k}{2}\left(x_r + a\right)^2$$

dove v_{cm} è la velocità del centro di massa (costante) e x_r la posizione del corpo relativa al centro del contenitore. Usando la conservazione dell'energia abbiamo inizialmente

$$E_i = \frac{1}{2}(2m)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v_c^2 + \frac{2k}{2}a^2$$

e al momento dell'urto ($x_r = -a$), nel caso limite in cui la velocità relativa si annulla,

$$E_f = \frac{1}{2}(2m)v_{cm}^2 + \frac{k}{2}4a^2$$

Usando la conservazione dell'energia otteniamo

$$\frac{m}{4}v_c^2 = ka^2$$

e quindi

$$I = mv_c = m\sqrt{\frac{4ka^2}{m}}$$

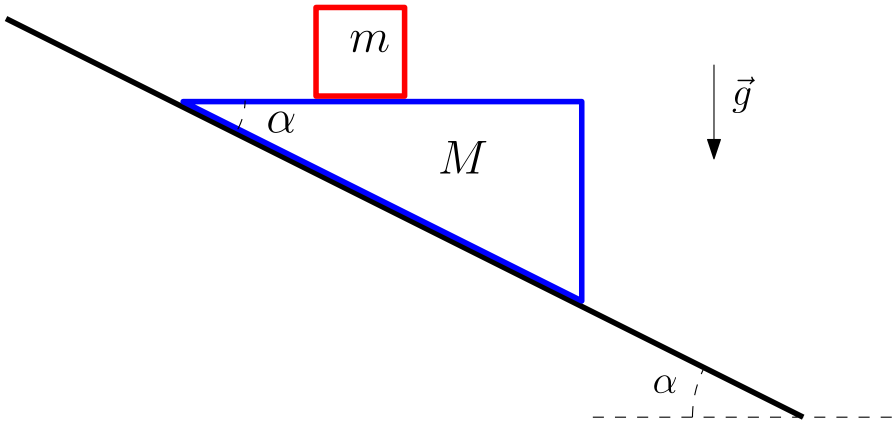
Domanda 3

L'energia dissipata sarebbe quella cinetica disponibile nel centro di massa. La frazione rispetto alla cinetica totale sarà

$$\gamma = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v_c^2}{\frac{1}{2}(2m)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v_c^2} = \frac{v_c^2}{4v_{cm}^2 + v_c^2} = \frac{I^2}{I^2 + 4\frac{I^2}{4}} = \frac{1}{2}$$

4.8. 20 novembre 2013

Problema 1 (15 punti)



Un cuneo di massa M, con sezione triangolare retta, può scivolare senza attrito lungo un piano inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale, in modo che una faccia del cuneo resti sempre orizzontale.

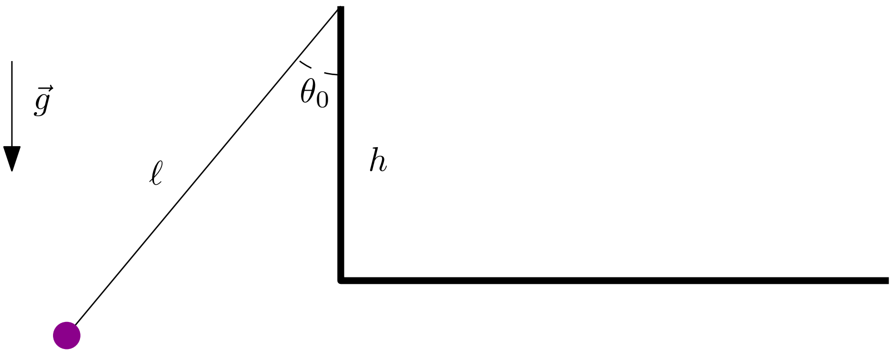
Sulla faccia orizzontale del cuneo è appoggiato un corpo di massa m soggetto ad una forza di attrito radente con coefficiente statico μ_s e coefficiente dinamico μ_d.

1. Nell'ipotesi che il corpo non scivoli sulla superficie del cuneo, determinare la componente normale della reazione vincolare che il cuneo esercita sul corpo.

2. Determinare il massimo valore dell'angolo α oltre il quale il corpo inizia a scivolare.

3. Determinare infine l'accelerazione del corpo in assenza di attrito.

Problema 2 (15 punti)



Un pendolo di lunghezza ℓ e massa m è appeso ad una parete verticale come in figura. Ad una distanza $h = \ell/2$ al di sotto del punto di sospensione la parete diviene orizzontale. Il pendolo viene lasciato cadere da fermo da un angolo iniziale θ_0. Il filo è privo di massa e gli attriti sono trascurabili.

1. Calcolare la velocità della massa quando il filo raggiunge la posizione verticale.
2. Per quale valore minimo dell'angolo θ_0 la massa arriva a urtare il piano orizzontale?
3. Calcolare la tensione del filo immediatamente prima e immediatamente dopo l'istante nel quale il filo entra in contatto con la parete verticale. Sono uguali?

Soluzione primo problema

Prima domanda

Se il corpo non scivola sul cuneo, entrambi scivoleranno lungo il piano inclinato con accelerazione $a = g \sin \alpha$. L'equazione del moto per il corpo nella direzione verticale è quindi

$$m\left(-g\sin^2\alpha\right) = R - mg$$

dove R è la reazione normale cercata, che quindi vale

$$R = mg\cos^2\alpha$$

Seconda domanda

Scriviamo adesso l'equazione del moto per il corpo lungo la direzione orizzontale, nell'ipotesi che rimanga solidale al cuneo. Avremo

$$mg\sin\alpha\cos\alpha = F_a$$

dove F_a è la forza di attrito. Ma d'altra parte

$$|F_a| \leq \mu_s R$$

e quindi deve essere

$$mg\sin\alpha\cos\alpha \leq \mu_s mg\left(1-\sin^2\alpha\right)$$

e quindi

$$\sin\alpha\cos\alpha \leq \mu_s\cos^2\alpha$$

cioè

$$\tan\alpha \leq \mu_s$$

Terza domanda

In assenza di attrito il corpo può accelerare solo in verticale, dato che non ci sono forze orizzontali che agiscono su di esso. L'equazione del moto in tale direzione sarà

$$ma = R - mg \tag{4.8.1}$$

dove R è la reazione normale, diversa da quella calcolata precedentemente. Il cuneo avrà la stessa accelerazione verticale, quindi

$$Ma = -R - Mg + N\cos\alpha \tag{4.8.2}$$

dove N è la reazione normale del piano sul cuneo. D'altra parte il cuneo non accelera nella direzione perpendicolare al piano, per cui

$$0 = N - Mg\cos\alpha - R\cos\alpha$$

Ricavando N e sostituendo nella (4.8.2) otteniamo

$$R = -Mg - \frac{Ma}{\sin^2\alpha}$$

ed infine sostituendo nella (4.8.1) otteniamo

$$a = -\frac{(M+m)\,g\sin^2\alpha}{M + m\sin^2\alpha} = -\frac{\tan^2\alpha}{\frac{M}{M+m} + \tan^2\alpha}g$$

Soluzione secondo problema

Prima domanda

Dalla conservazione dell'energia abbiamo

$$-mg\ell\cos\theta_0 = \frac{1}{2}mv^2 - mg\ell$$

e quindi

$$v = \sqrt{2gl\,(1-\cos\theta_0)}$$

Seconda domanda

Dato che l'energia si conserva, il caso limite si ottiene quando la quota iniziale della massa è uguale a quella finale. Di conseguenza

$$\cos\theta_0 = \frac{h}{\ell} = \frac{1}{2}$$

e quindi

$$\theta_0 = \frac{\pi}{3}$$

Terza domanda

Abbiamo già calcolato la velocità nella posizione verticale. Dato che immediatamente prima del contatto il moto della massa è circolare e di raggio ℓ l'equazione del moto radiale da

$$m\frac{v^2}{\ell} = T - mg$$

e quindi

$$T = mg + m\frac{v^2}{\ell} = mg\left(3 - 2\cos\theta_0\right)$$

Immediatamente dopo il contatto la velocità non è cambiata, ma il moto è circolare con raggio $\ell - h$. Di conseguenza

$$m\frac{v^2}{\ell - h} = T' - mg$$

e quindi la tensione è maggiore:

$$\begin{aligned} T' &= mg\left[1 + \frac{2\ell}{\ell - h}\left(1 - \cos\theta_0\right)\right] \\ &= mg\left(5 - 4\cos\theta_0\right) \end{aligned}$$

4.9. 17 dicembre 2014

Primo problema

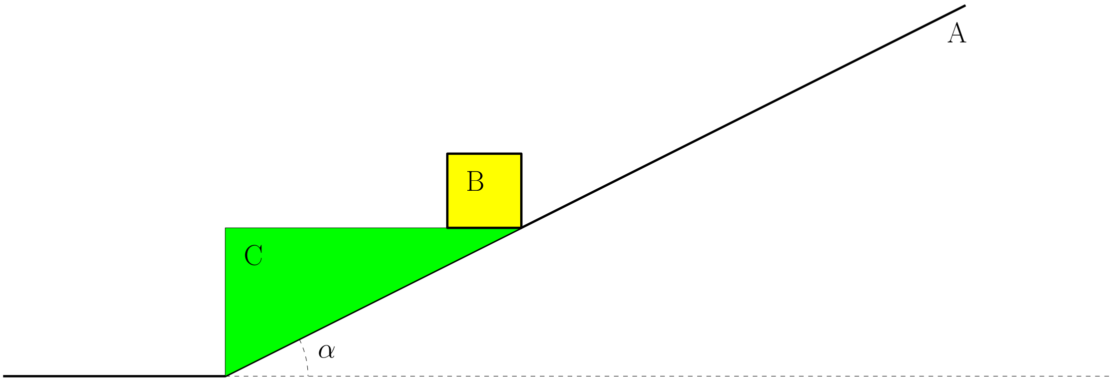


Figura 4.1.: Il piano inclinato A, con il cuneo C e il blocco B nella posizione iniziale.

Un blocchetto B di massa m è appoggiato sul piano orizzontale di un cuneo C di massa M, a sua volta giacente su un piano inclinato A (che è fisso in un sistema inerziale). B è libero di scivolare senza attrito sul cuneo C, mentre tra C e il piano A è presente un attrito radente con coefficiente statico μ_s e coefficiente dinamico $\mu_d < 1$. La lunghezza della faccia di C appoggiata sul piano inclinato è a. Il piano A è inclinato di un angolo α rispetto a quello orizzontale. Inizialmente il sistema $B + C$ è fermo (per esempio alla base del piano inclinato), con il blocchetto B situato all'estremità di C che poggia sul piano inclinato A. Con un colpo secco assestato *al cuneo*, il sistema si mette in moto con una velocità di C di modulo v_0 e verso in salita lungo il piano A, mentre B si muove di conseguenza. Nel seguito si assuma che il cuneo C e il blocco B non si stacchino l'uno dall'altro durante il colpo iniziale.

1. Determinare l'impulso (quantità di moto) complessivamente ricevuto dal sistema $B + C$ al momento del colpo iniziale, specificando l'angolo che esso forma con il piano orizzontale.

2. Nel caso in cui l'attrito sia assente ($\mu_s = \mu_d = 0$), determinare il massimo valore v_{max} di v_0 affinché B non cada fuori dal bordo del cuneo C e la massima altezza alla quale arriva il blocchetto B in funzione di v_0 per $v_{max} < v_0$.

3. Nel caso in cui l'attrito sia presente ($\mu_s > \mu_d > 0$), determinare la massima altezza alla quale arriva il blocchetto B in funzione di v_0 (nell'ipotesi $v_0 < v_{max}$); determinare inoltre il minimo valore di μ_s affinché, successivamente, il sistema $B + C$ non torni nella posizione iniziale.

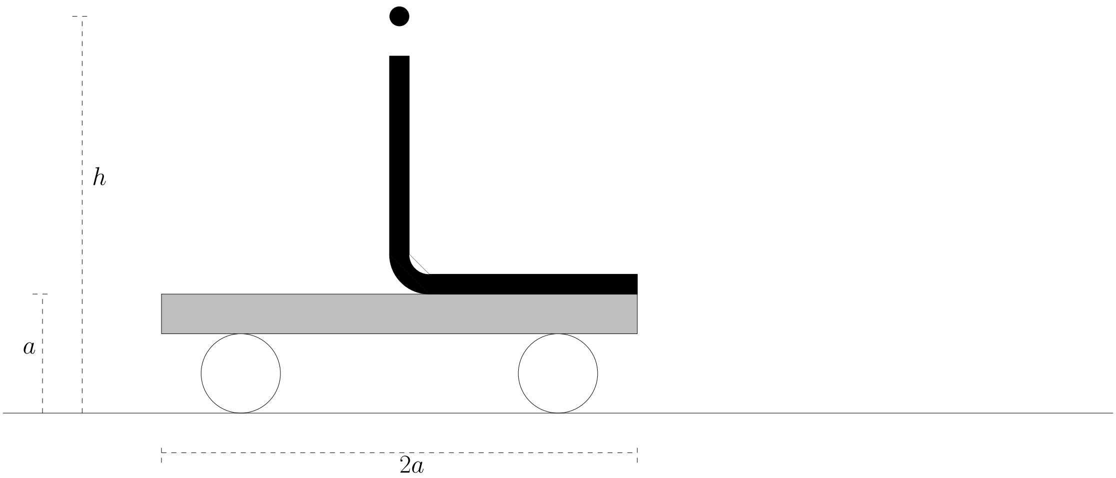


Figura 4.2.: Il carrello e la pallina nella posizione iniziale.

Secondo problema

Una pallina di massa m cade, da un'altezza h, un un tubo a "L", avente un opportuno racordo fra le sezioni verticale e orizzontale, dove può scivolare senza attrito. Il tubo è fissato ad un carrello di massa M, altezza da terra a e lunghezza $2a$. Le masse del tubo e delle ruote sono trascurabili rispetto a quella del carrello. La verticale del punto di caduta si trova a metà della lunghezza del carrello.

1. Nell'ipotesi che il carrello sia *bloccato* sul binario, determinare la distanza fra il punto nel quale la pallina tocca terra e la verticale di caduta.
2. Nell'ipotesi che il carrello sia *libero* di muoversi lungo il binario, determinare la velocità del carrello quando la pallina tocca terra e
3. la distanza tra il punto nel quale la pallina tocca terra e la verticale di caduta.

Soluzione primo problema

Prima domanda

Dopo il colpo il cuneo si muove parallelamente al piano inclinato con velocità

$$\vec{v}_C = v_0 \left(\cos\alpha \hat{e}_x + \sin\alpha \hat{e}_y\right)$$

Dato che nessuna forza orizzontale agisce sul blocco, questo si muove solo verticalmente, e dato che deve rimanere in contatto con il cuneo la sua velocità sarà

$$\vec{v}_B = v_0 \sin\alpha \hat{e}_y$$

Possiamo adesso scrivere la quantità di moto totale del sistema, che sarà uguale all'impulso complessivamente ricevuto:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= M\vec{v}_C + m\vec{v}_B \\ &= (M+m)\, v_0 \sin\alpha \hat{e}_y + M v_0 \cos\alpha \hat{e}_x\end{aligned}$$

L'angolo θ rispetto all'orizzontale sarà dato da

$$\tan\theta = \frac{P_y}{P_x} = \frac{M+m}{M}\tan\alpha$$

Seconda domanda

Trascurando le dimensioni del blocchetto, dato che questo non si muove in orizzontale cadrà dal cuneo se lo spostamento orizzontale di quest'ultimo sarà maggiore di $a\cos\alpha$. Il corrispondente spostamento verticale sarà

$$\Delta y = a\sin\alpha$$

Possiamo calcolare lo spostamento verticale massimo (per $v_0 \le v_{max}$) utilizzando la conservazione dell'energia. Immediatamente dopo il colpo abbiamo

$$E_i = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2\sin^2\alpha$$

e nel momento di massimo spostamento verticale

$$E_f = (M+m)g\Delta y$$

di conseguenza

$$\frac{1}{2}\left(M + m\sin^2\alpha\right)v_0^2 = (M+m)\, g\Delta y$$

e possiamo rispondere alla seconda parte della domanda risolvendo rispetto a Δy

$$\Delta y = \frac{v_0^2}{2g}\frac{M+m\sin^2\alpha}{M+m}$$

Ponendo adesso $v_0 = v_{max}$ e $\Delta y = a\sin\alpha$ otteniamo

$$\frac{1}{2}\left(M + m\sin^2\alpha\right)v_{max}^2 = (M+m)\, ga\sin\alpha$$

e quindi

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2(M+m)ga\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}}$$

Terza domanda

Scriviamo l'equazione del moto per il sistema $B+C$ nella direzione verticale. Detta A l'accelerazione del cuneo (parallela al piano) abbiamo

$$(M+m)\,A\sin\alpha = N\cos\alpha - \mu_d N\sin\alpha - (M+m)\,g$$

dove N è la reazione normale del piano, e per determinare il segno della forza di attrito si è considerata la situazione iniziale nella quale il cuneo sale. Scriviamo adesso l'equazione del moto per il solo cuneo nella direzione orizzontale, ottenendo

$$MA\cos\alpha = -N\sin\alpha - \mu_d N\cos\alpha$$

Da questa seconda equazione possiamo determinare N

$$N = -\frac{MA\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha}$$

e sostituendo nella prima troviamo

$$A = -\frac{(M+m)\,(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)}{M + m\sin\alpha\,(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)}g$$

Il cuneo compie quindi un moto uniformemente accelerato, e lo spostamento massimo sarà determinato da

$$\begin{aligned} s_{max} &= v_0 t + \frac{1}{2}At^2 \\ 0 &= v_0 + At \end{aligned}$$

e di conseguenza

$$s_{max} = -\frac{v_0^2}{2A}$$

e

$$\Delta y = -\frac{v_0^2}{2A}\sin\alpha$$

Verifichiamo questo risultato in alcuni casi particolari. In assenza di attrito

$$\begin{aligned} A &= -\frac{(M+m)\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}g \\ \Delta y &= \frac{v_0^2}{2g}\frac{M+m\sin^2\alpha}{M+m} \end{aligned}$$

in accordo con quanto visto precedentemente. Per un piano orizzontale ($\alpha = 0$)

$$A = -\frac{(M+m)\,\mu_d}{M} g$$
$$\Delta y = 0$$

e per un piano verticale ($\alpha = \pi/2$)

$$\begin{aligned} A &= -g \\ \Delta y &= \frac{v_0^2}{2g} \end{aligned}$$

Per non tornare al punto di partenza dopo essersi fermato il sistema $B+C$ si dovrà trovare in condizioni di equilibrio. Le equazioni del moto scritte precedentemente diventano adesso ($A = 0$)

$$0 = N\cos\alpha + F_a \sin\alpha - (M+m)\,g$$

e

$$0 = -N\sin\alpha + F_a\cos\alpha$$

dove F_a è la forza di attrito statico. Risolvendo per F_ae N troviamo

$$\begin{aligned} F_a &= (M+m)\,g\sin\alpha \\ N &= (M+m)\,g\cos\alpha \end{aligned}$$

ma deve essere

$$|F_a| \le \mu_s N$$

per cui

$$\mu_s \ge \tan\alpha$$

Soluzione secondo problema

Prima domanda

Usando la conservazione dell'energia possiamo calcolare la velocità della pallina all'uscita dal tubo:

$$v_0 = \sqrt{2g\,(h-a)}$$

Successivamente la pallina segue una traiettoria parabolica. Prendendo l'origine nell'intersezione tra il piano orizzontale d'appoggio e la verticale del punto di caduta si ha per la gittata d

$$\begin{aligned} d &= a + \sqrt{2g(h-a)}t \\ 0 &= a - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

ricavando il tempo di caduta dalla seconda equazione troviamo

$$y = \sqrt{\frac{2a}{g}}$$

e sostituendo nella prima

$$d = a + 2\sqrt{a(h-a)}$$

che si annulla come ci si aspetta per $a = 0$ e per $a = h$.

Seconda domanda

Possiamo ancora una volta usare la conservazione dell'energia, che si scrive in questo caso

$$mg\,(h-a) = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

dove abbiamo uguagliato l'energia iniziale a quella cinetica nel momento in cui la pallina esce dal tubo. Le velocità v e V sono quelle, rispettivamente, della pallina e del carrello.

Dato che

- si conserva la quantità di moto orizzontale
- la quantità di moto orizzontale è inizialmente nulla
- all'istante finale considerato tutte le velocità sono orizzontali

possiamo anche scrivere che

$$mv + MV = 0$$

e di conseguenza

$$v = -\frac{M}{m}V$$

Sostituendo nella espressione dell'energia cinetica troviamo

$$mg\,(h-a) = \frac{1}{2}M\left(1+\frac{M}{m}\right)V^2$$

e quindi, scegliendo opportunamente il segno,

$$V = -\sqrt{2g(h-a)\frac{m^2}{M\,(m+M)}}$$

Dato che dal momento del distacco la velocità del carrello non cambia, questa è la quantità cercata.

Terza domanda

Dalle equazioni ricavate nella domanda precedente troviamo subito la velocità (orizzontale) della pallina all'uscita dal tubo

$$v = -\frac{M}{m}V = \sqrt{2g(h-a)\frac{M}{(m+M)}}$$

Se in questo momento il carrello si è mosso all'indietro di $-\ell$, l'uscita avverrà (rispetto all'origine del sistema di riferimento scelta precedentemente) in $x = a - \ell$ e $y = a$. D'altra parte il centro di massa del sistema non si deve essere spostato in orizzontale e quindi

$$-M\ell + m(a-\ell) = 0$$

da cui

$$\ell = \frac{m}{m+M}a$$

Possiamo adesso determinare nuovamente d

$$\begin{aligned} d &= a - \ell + \sqrt{2g(h-a)\frac{M}{(m+M)}}t \\ 0 &= a - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} d &= a - \ell + 2\sqrt{a(h-a)\frac{M}{(m+M)}} \\ &= \frac{M}{m+M}a + 2\sqrt{\frac{M}{(m+M)}}\sqrt{a(h-a)} \end{aligned}$$

4.10. 18 dicembre 2015

Problema 1

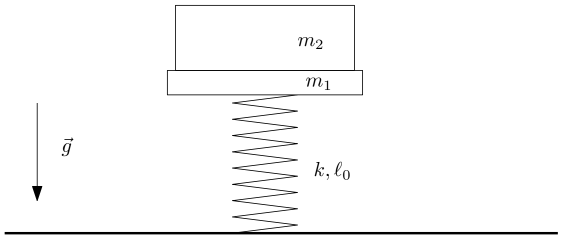


Figura 4.3.: La molla e le due masse considerate nel problema.

Una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo ℓ_0 è fissata a terra ad un estremo e a una massa m_1 all'altro. Sopra m_1 è appoggiata un'altra massa m_2, come in Figura 4.3. Supponendo che $\ell_0 = 16\,(m_1 + m_2)\,g/k$

1. Trovare la lunghezza della molla nella condizione di equilibrio.
2. Applicando una opportuna forza esterna si porta la lunghezza della molla a $(m_1 + m_2)\,g/k$ e quindi la si lascia libera. Dire se la massa m_2 si distacca ad un certo momento dalla massa m_1, giustificando la risposta.
3. Se la risposta alla domanda precedente è positiva dire quanto vale la lunghezza della molla al momento del distacco, e dopo quanto tempo dal momento del rilascio questa avviene.

Problema 2

In un cilindro di raggio R è praticato un foro che lo attraversa lungo un diametro, orizzontalmente. Il foro permette il passaggio di una particella di massa m, che scorre all'interno di esso senza attriti. Il cilindro viene fatto ruotare attorno al suo asse con velocità angolare costante ω, e la rotazione è sincronizzata con l'arrivo della particella che riesce ad entrare nel foro con velocità v_0 e scorre in esso.

1. Per quale valore minimo v_{min} del modulo v_0 della velocità di entrata la particella attraversa tutto il foro uscendo dalla parte opposta?
2. Calcolare il lavoro totale fatto dal disco sulla particella quando quest'ultima è uscita.
3. Supponendo $v_0 > v_{min}$, trovare il valore di v_0 per il quale la particella esce dal foro quando il cilindro ha compiuto una rotazione di $\pi/2$?

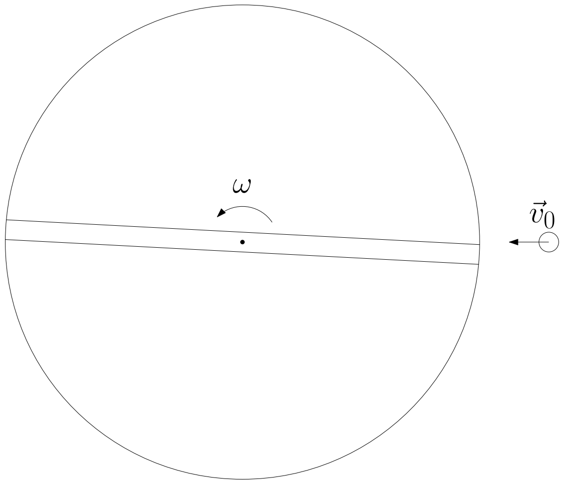


Figura 4.4.: Il disco con il foro considerato nel problema

Soluzione primo problema

Domanda 1

Scriviamo l'equazione del moto. Detta $y$la lunghezza della molla abbiamo

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{y} = -k\,(y - \ell_0) - (m_1 + m_2)\,g$$

Dato che all'equilibrio $\ddot{y} = 0$ otteniamo

$$\begin{aligned} y &= \ell_0 - \frac{(m_1 + m_2)\,g}{k} \\ &= 15\frac{(m_1 + m_2)\,g}{k} \end{aligned}$$

Domanda 2

Mentre le due masse sono in contatto abbiamo

$$\begin{aligned} m_1\ddot{y} &= -k\,(y - \ell_0) - m_1 g - N \\ m_2\ddot{y} &= -m_2 g + N \end{aligned}$$

dove N è la forza di contatto che la massa m_1 esercita sulla massa m_2. Dividendo ciascuna equazione per la rispettiva massa e sottraendo membro a membro otteniamo

$$0 = -\frac{k}{m_1}\,(y - \ell_0) - \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) N$$

ossia

$$N = -k\frac{m_2}{m_1 + m_2}(y - \ell_0)$$

che diviene negativa per $y > \ell_0$. Al momento del rilascio $y_i = (m_1 + m_2)g/k$, e il valore massimo di y_f raggiungibile si ottiene dalla conservazione dell'energia:

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2}[y_i - \ell_0]^2 + (m_1 + m_2)\,g y_i &= \frac{k}{2}[y_f - \ell_0]^2 + (m_1 + m_2)\,g y_f \\
\frac{k}{2}\left\{[y_i - \ell_0]^2 - [y_f - \ell_0]^2\right\} &= (m_1 + m_2)\,g\,(y_f - y_i) \\
\frac{k}{2}(y_i - y_f)(y_i + y_f - 2\ell_0) &= (m_1 + m_2)\,g\,(y_f - y_i)
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
(y_i + y_f - 2\ell_0) &= -\frac{2\,(m_1 + m_2)\,g}{k} \\
y_f &= 2\ell_0 - y_i - \frac{2\,(m_1 + m_2)\,g}{k} \\
&= \frac{29\,(m_1 + m_2)\,g}{k}
\end{aligned}$$

Chiaramente prima di arrivare a y_f la massa superiore si staccherà dato che $y_f > \ell_0$

Domanda 3

Come abbiamo appena visto, il distacco avverrà quando la lunghezza della molla è quella a riposo ℓ_0. Fino al momento del distacco della massa m_2 il sistema è un oscillatore armonico di frequenza angolare

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

compie oscillazioni di ampiezza

$$\frac{15\,(m_1 + m_2)\,g}{k} - \frac{(m_1 + m_2)\,g}{k} = \frac{14\,(m_1 + m_2)\,g}{k}$$

attorno alla posizione di equilibrio. Di conseguenza

$$y(t) = \frac{15\,(m_1 + m_2)\,g}{k} - \frac{14\,(m_1 + m_2)\,g}{k}\cos\omega t$$

La posizione di distacco verrà raggiunta al tempo determinato dall'equazione

$$\frac{15\,(m_1 + m_2)\,g}{k} - \frac{14\,(m_1 + m_2)\,g}{k}\cos\omega t = \frac{16\,(m_1 + m_2)\,g}{k}$$

cioè per

$$t = \frac{1}{\omega} \arccos\left(-\frac{1}{14}\right)$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

In un sistema di riferimento solidale al disco, scegliendo l'asse x nella direzione del foro, abbiamo l'equazione del moto lungo tale direzione

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x$$

dove $m\omega^2 x$ è la forza centrifuga. La soluzione generale è

$$x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

Per le condizioni al contorno abbiamo

$$\begin{aligned} x(0) &= A + B = R \\ \dot{x}(0) &= \omega A - \omega B = -v_0 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left(R - \frac{v_0}{\omega}\right) \\ B &= \frac{1}{2}\left(R + \frac{v_0}{\omega}\right) \end{aligned}$$

da cui

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(R - \frac{v_0}{\omega}\right) e^{\omega t} + \frac{1}{2}\left(R + \frac{v_0}{\omega}\right) e^{-\omega t}$$

Se la particella esce dalla parte opposta a quella di entrata deve esistere una soluzione dell'equazione

$$-R = \frac{1}{2}\left(R - \frac{v_0}{\omega}\right) e^{\omega t} + \frac{1}{2}\left(R + \frac{v_0}{\omega}\right) e^{-\omega t}$$

ossia

$$\left(R - \frac{v_0}{\omega}\right) e^{2\omega t} + 2Re^{\omega t} + \left(R + \frac{v_0}{\omega}\right) = 0$$

Questa è una equazione di secondo grado in $e^{\omega t}$, che ha per risultato

$$e^{\omega t} = -\frac{R\omega \pm v_0}{R\omega - v_0}$$

L'unica soluzione accettabile è

$$e^{\omega t} = \frac{v_0 + R\omega}{v_0 - R\omega}$$

per $v_0 > R\omega$. Quindi $v_{min} = R\omega$.

Domanda 2,

Se l'uscita avviene dal lato opposto dell'ingresso la componente della velocità nella direzione del foro è identica a quella di entrata. Infatti ponendo $e^{\omega t} = (v_0 + R\omega)/(v_0 - R\omega)$ troviamo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{2}\left(R\omega - v_0\right)\frac{v_0 + R\omega}{v_0 - R\omega} - \frac{1}{2}\left(R\omega + v_0\right)\frac{v_0 - R\omega}{v_0 + R\omega} \\ &= -\frac{1}{2}\left(R\omega + v_0\right) - \frac{1}{2}\left(v_0 - R\omega\right) = -v_0\end{aligned}$$

Se invece l'uscita avviene dalla stessa estremità di entrata abbiamo

$$R = \frac{1}{2}\left(R - \frac{v_0}{\omega}\right)e^{\omega t} + \frac{1}{2}\left(R + \frac{v_0}{\omega}\right)e^{-\omega t}$$

e quindi

$$\left(R - \frac{v_0}{\omega}\right)e^{2\omega t} - 2Re^{\omega t} + \left(R + \frac{v_0}{\omega}\right) = 0$$

cioè

$$e^{\omega t} = \frac{R \pm \frac{v_0}{\omega}}{R - \frac{v_0}{\omega}}$$

La soluzione che corrisponde all'uscita è

$$e^{\omega t} = \frac{R\omega + v_0}{R\omega - v_0}$$

da cui

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{2}\left(R\omega - v_0\right)\frac{R\omega + v_0}{R\omega - v_0} - \frac{1}{2}\left(R\omega + v_0\right)\frac{R\omega - v_0}{R\omega + v_0} \\ &= v_0\end{aligned}$$

cioè in questo caso la velocità di uscita è opposta a quella di entrata. In entrambi i casi la particella in uscita ha però anche una componente della velocità perpendicolare al foro uguale a ωR. La variazione di energia cinetica tra ingresso e uscita è dunque

$$\Delta E = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 + \omega^2 R^2\right) - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 R^2$$

che sarà uguale al lavoro fatto sulla particella dal disco.

Domanda 3

Abbiamo già calcolato il tempo di uscita

$$t = \frac{1}{\omega}\log\left(\frac{v_0 + R\omega}{v_0 - R\omega}\right)$$

Questo deve essere uguale a un quarto del periodo di rotazione, quindi

$$\frac{\pi}{2\omega} = \frac{1}{\omega} \log \left(\frac{v_0 + R\omega}{v_0 - R\omega} \right)$$

Risolvendo troviamo

$$v_0 = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{e^{\frac{\pi}{2}} - 1} R\omega \simeq 1.52\, R\omega$$

5. Seconda prova in itinere

5.1. 22 dicembre 2006

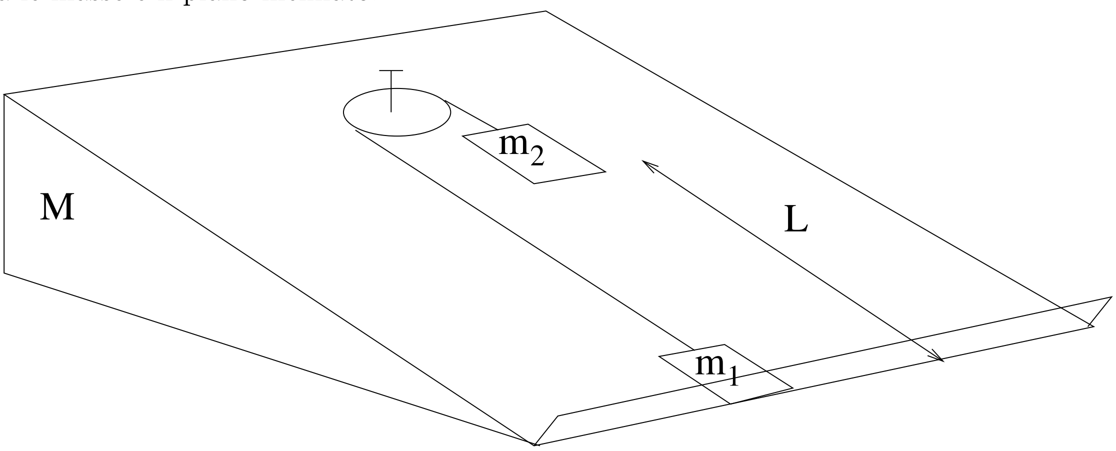
Primo problema (15 punti)

Le due masse in figura somo $m_1 = m_2 = m$. Quella a sinistra si muove inizialmente con velocità v_0, l'altra è ferma. La molla ha lunghezza a riposo ℓ e costante elastica k, ed è libera ad un estremo.

1. Per quali valori v_0 le due masse non arrivano a toccarsi?
2. Calcolare la velocità delle masse quando queste sono di nuovo separate.
3. Se la velocità iniziale è sufficiente a far toccare le massa, e queste rimangono attaccate, calcolare la velocità finale del sistema.

Secondo problema (15 punti)

Un cuneo di massa M a forma di prisma triangolare di apertura angolare θ è libero di muoversi sul piano orizzontale su cui è appoggiato. Sul cuneo si trovano due masse m_1 e m_2 ($m_2 > m_1$), collegate tra loro da un filo inestensibile di massa nulla come mostrato in figura. Il filo scorre senza attrito su un perno solidale al piano inclinato. Non vi è attrito tra le masse e il piano inclinato.



1. Se il cuneo è mantenuto immobile, determinare il moto delle masse m_1 e m_2(lasciate andare da ferme).
2. Se il cuneo è libero di muoversi senza attrito sul piano orizzontale, determinare il suo spostamento quando la massa m_2 raggiunge il bordo.
3. In presenza di attrito statico μ_s tra il cuneo e il piano orizzonale, determinare il valore minimo affinchè il cuneo resti immobile durante la discesa di m_2.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Cerchiamo sotto quali condizioni le masse si toccano. Possiamo utilizzare la conservazione dell'energia e della quantità di moto. Uguagliando il valore iniziale di queste quantità a quello posseduto al momento del contatto abbiamo

$$m_1 v_0 \geq (m_1 + m_2) v_2$$

e

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 \geq \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_2^2 + \frac{1}{2} k \ell^2 \,.$$

Si è utilizzato il fatto che al momento del contatto $v_2 \leq v_1$, e la molla è completamente contratta. Ricavando v_f dalla prima relazione si trova

$$v_2 \leq \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0$$

e sostituendo nella seconda

$$m_1 v_0^2 \geq \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_2^2 + k \ell^2$$

da cui

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{k}{\mu}} \ell$$

dove $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2) = m/2$ è la massa ridotta del sistema. Le masse non arriveranno dunque a toccarsi per

$$v_0 < \sqrt{\frac{k}{\mu}} \ell \,.$$

Domanda 2

Si tratta di un urto elastico, e dato che le masse sono uguali deve essere

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$
$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

ossia $v_1 = 0$ e $v_2 = v_0$ se $m_1 = m_2 = m$.

Domanda 3

Anche in questo caso possiamo vedere il problema come un urto, questa volta completamente anelastico. Sarà ovviamente

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_f \,.$$

Avremo quindi ($m_1 = m_2 = m$)

$$v_f = \frac{1}{2} v_0 \,.$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Consideriamo le forze che agiscono sulle due masse lungo la direzione parallela al piano. Per la prima abbiamo

$$m_1 a_1 = m_1 g \sin\theta - T$$

e per la seconda

$$m_2 a_2 = m_2 g \sin\theta - T \,.$$

Abbiamo preso come verso positivo per le accelerazioni di entrambe le masse quello verso lo spigolo del cuneo. Sottraendo membro a membro abbiamo

$$m_1 a_1 - m_2 a_2 = (m_1 - m_2) g \sin\theta$$

ma $a_2 = -a_1$ da cui

$$a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \sin\theta < 0 \,.$$

Le due masse quindi si muovono di moto uniformemente accelerato. Partendo da fermi e misurando lo spostamento a partire dalla posizione iniziale di ciascuna massa abbiamo

$$s_1 = \frac{1}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \sin\theta \, t^2$$

$$s_2 = \frac{1}{2} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \sin\theta \, t^2$$

Domanda 2

La quantità di moto orizzontale del sistema si conserva. Questo significa che la posizione orizzontale del centro di massa non cambia, dato che inizialmente è ferma. Possiamo dunque scrivere

$$\frac{M X_0 + m_1 x_1 + m_2 x_2}{M + m_1 + m_2} = \frac{M\,(X_0 + \Delta) + m_1\,(x_1 + \delta_1) + m_2\,(x_2 + \delta_2)}{M + m_1 + m_2}$$

dove X_0, x_1 e x_2 sono le coordinate orizzontali iniziali del centro di massa del cuneo e delle due masse, e Δ, δ_1, δ_2 i relativi spostamenti finali, il tutto nel sistema di riferimento del laboratorio. D'altra parte lo spostamento orizzontale finale della massa m_2 è noto

$$\delta_2 - \Delta = L\cos\theta$$

e per l'inestensibilità del filo deve essere

$$\delta_2 - \Delta = -\left(\delta_1 - \Delta\right) .$$

Ricavando δ_1, δ_2 da queste ultime due relazioni otteniamo

$$\begin{aligned}
\delta_2 &= \Delta + L\cos\theta \\
\delta_1 &= \Delta - L\cos\theta
\end{aligned}$$

e sostituendo nella prima abbiamo

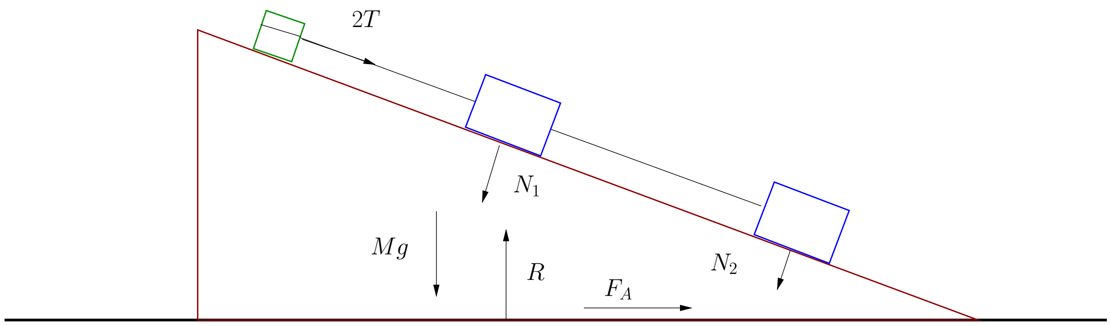
$$M\Delta + m_1\left(\Delta - L\cos\theta\right) + m_2\left(\Delta + L\cos\theta\right) = 0$$

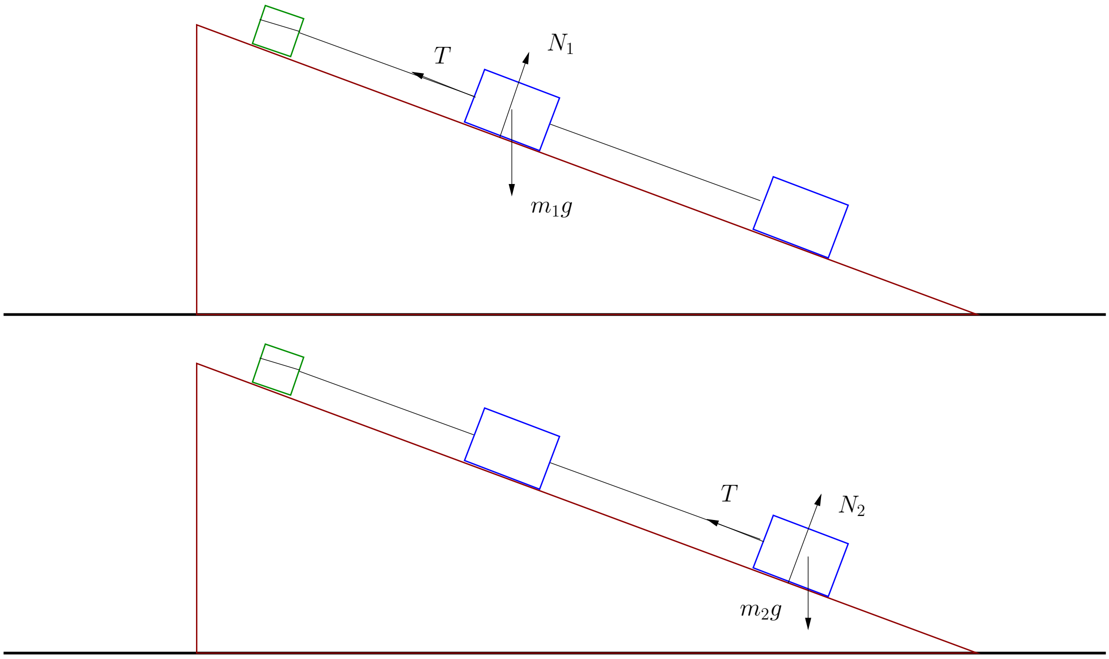
da cui

$$\Delta = \frac{(m_1 - m_2)L\cos\theta}{M + m_1 + m_2} .$$

Domanda 3

Facciamo riferimento ai diagrammi delle forze agenti sul cuneo e sulle due masse riportati qui sotto. Indichiamo con T la tensione del filo, con N_1 e N_2 le reazioni vincolari del piano obliquo, con R la reazione vincolare del piano orizzontale e con F_A la forza di attrito.





Scriviamo le equazioni del moto per le masse e per il cuneo, nell'ipotesi che quest'ultimo resti fermo. Tenendo conto del fatto che

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= -\ddot{y}_2\\ \ddot{x}_1 &= -\ddot{x}_2\,.\end{aligned}$$

possiamo scrivere

$$m_1\ddot{x}_1 = N_1\sin\theta - T\cos\theta \tag{5.1.1}$$
$$m_1\ddot{y}_1 = N_1\cos\theta + T\sin\theta - m_1 g \tag{5.1.2}$$

$$-m_2\ddot{x}_1 = N_2\sin\theta - T\cos\theta \tag{5.1.3}$$
$$-m_2\ddot{y}_1 = N_2\cos\theta + T\sin\theta - m_2 g \tag{5.1.4}$$

e

$$0 = -(N_1+N_2)\sin\theta + 2T\cos\theta + F_A \tag{5.1.5}$$
$$0 = R - Mg - (N_1+N_2)\cos\theta - 2T\sin\theta\,. \tag{5.1.6}$$

Dato che

$$\frac{\ddot{y}_1}{\ddot{x}_1} = \frac{\ddot{y}_2}{\ddot{x}_2} = -\tan\theta$$

dividendo membro a membro le equazioni (5.1.1), (5.1.2) e (5.1.3), (5.1.4) otteniamo

$$N_1 = m_1 g\cos\theta$$

$$N_2 = m_2 g \cos\theta$$

Dalle equazioni del moto per le masse abbiamo

$$\left(\frac{N_1}{m_1}+\frac{N_2}{m_2}\right)\sin\theta - T\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\cos\theta = 0$$

$$\left(\frac{N_1}{m_1}+\frac{N_2}{m_2}\right)\cos\theta + T\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\sin\theta = 2g$$

da cui ($\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$)

$$T = 2g\mu\sin\theta\,.$$

Sostituendo nella equazione (5.1.6) troviamo

$$R = Mg + (m_1+m_2)g\cos^2\theta + 4g\mu\sin^2\theta$$

e tenendo conto che deve essere $|F_A| \leq \mu_s R$ abbiamo infine

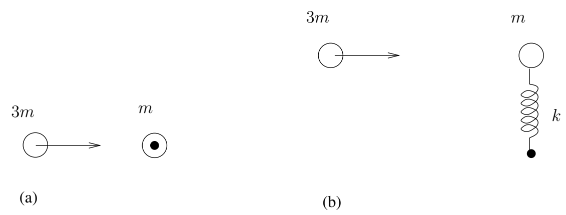
$$[(m_1+m_2)-4\mu]\,|\cos\theta\sin\theta| \leq \mu_s\left[M+(m_1+m_2)\cos^2\theta+4\mu\sin^2\theta\right]$$

ossia

$$\mu_s \geq \frac{(m_1-m_2)^2\cos\theta\sin\theta}{M(m_1+m_2)+(m_1+m_2)^2\cos^2\theta+4m_1m_2\sin^2\theta}\,.$$

5.2. 19 dicembre 2008

Problema 1 (15 punti)



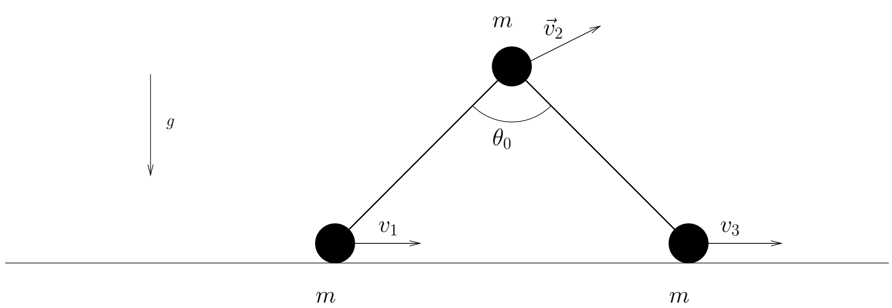
Un proiettile urta come in figura (a) un bersaglio tenuto da una molla di lunghezza nulla e costante elastica k. Il proiettile ha massa tripla del bersaglio, e l'urto ha una durata trascurabile.

1. Si calcoli la velocità di bersaglio e proiettile appena dopo l'urto nel caso di urto completamente anelastico.

2. Si calcoli la massima elongazione della molla.

3. Ora il bersaglio è tenuto fermo a distanza ℓ dalla posizione di equilibrio al momento dell'urto, in maniera che la molla sia perpendicolare alla velocità del proiettile come in figura (b). Si calcoli il momento angolare del sistema dopo l'urto e quindi la massima elongazione della molla.

Problema 2 (15 punti)



Le tre masse identiche in figura sono collegate da due aste di lunghezza ℓ e massa trascurabile come in figura. Quelle agli estremi sono inoltre vincolate a scorrere su un piano orizzontale, mentre l'angolo tra le due aste può variare liberamente, e vale inizialmente θ_0.

1. Se $v_1(0) = V$ e $v_3(0) = 0$ determinare la velocità iniziale della massa intermedia $\vec{v}_2(0)$.

2. Nel caso $v_1(0) = v_3(0) = 0$ determinare la velocità $\vec{v}_2$ quando la massa intermedia urta il piano.

3. Se $v_3(0) = 0$, determinare il minimo valore di $v_1(0)$ che permette alle masse agli estremi di toccarsi.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Dato che l'urto è istantaneo la molla non cambia la sua lunghezza mentre questo avviene e può essere ignorata. Nell'urto si conserva la quantità di moto, e la velocità di proiettile e bersaglio dopo l'urto è la stessa. Di conseguenza

$$\begin{aligned} 3mv_0 &= 4mV_x \\ 0 &= 4mV_y \end{aligned}$$

cioè $V_y = 0$ e $V_x = 3V_0/4$.

Domanda 2

Dopo l'urto si conserva sia l'energia che la quantità di moto. Confrontando l'energia iniziale e quella al momento della massima elongazione otteniamo

$$\frac{1}{2}4m\left(\frac{3}{4}V_0\right)^2 = \frac{1}{2}k\ell^2$$

da cui

$$\ell = \sqrt{\frac{9}{4}\frac{m}{k}}V_0$$

Domanda 3

Anche questa volta la molla può essere ignorata durante l'urto, e la velocità finale delle due masse è la stessa calcolata precedentemente. Il momento angolare rispetto all'estremo vincolato della molla è uguale a quello iniziale, dato che si conserva nell'urto, e vale

$$L = -3mv_0\ell$$

Si può verificare questo anche con un calcolo diretto:

$$L = -4mV_x\ell$$

Successivamente all'urto si conserva sia l'energia che il momento angolare. Quindi possiamo scrivere l'energia in termini di potenziale efficace, come

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{k}{2}r^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$$

dove r è la lunghezza della molla. Dalla conservazione dell'energia otteniamo al momento della massima elongazione (notare che inizialmente la velocità radiale è nulla)

$$\frac{k}{2}\ell^2 + \frac{L^2}{2m\ell^2} = \frac{k}{2}\ell_{max}^2 + \frac{L^2}{2m\ell_{max}^2}$$

e quindi

$$\frac{km}{L^2}\left(\ell^2 - \ell_{max}^2\right) = \left(\frac{1}{\ell_{max}^2} - \frac{1}{\ell^2}\right)$$

Scartando la soluzione banale $\ell_{max} = \ell$, che corrisponde alla condizione iniziale, otteniamo

$$\ell_{max} = \frac{|L|}{\sqrt{km\ell}} = \frac{3v_0}{\omega}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Anzitutto

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_3 - 2\ell \sin\frac{\theta}{2} \\
x_2 &= x_3 - \ell \sin\frac{\theta}{2} \\
y_2 &= \ell \cos\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

e quindi inizialmente

$$\begin{aligned}
v_1 &= -\ell\dot{\theta}_0 \cos\frac{\theta_0}{2} \\
v_{2x} &= -\frac{\ell}{2}\dot{\theta}_0 \cos\frac{\theta_0}{2} \\
v_{2y} &= -\frac{\ell}{2}\dot{\theta}_0 \sin\frac{\theta_0}{2}
\end{aligned}$$

dato che la terza massa è ferma. Segue che

$$\begin{aligned}
v_{2x} &= \frac{V}{2} \\
v_{2y} &= \frac{V}{2}\tan\frac{\theta_0}{2}
\end{aligned}$$

Domanda 2

Dalla conservazione della quantità di moto orizzontale e dell'energia abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= 3mv_x \\ mg\ell\cos\frac{\theta_0}{2} &= \frac{1}{2}3mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_{2y}^2 \end{aligned}$$

dove v_x è la velocità finale orizzontale comune alle tre masse. Segue che $v_{2x} = 0$ e

$$v_{2y} = -\sqrt{2mg\ell\cos\frac{\theta_0}{2}}$$

Domanda 3

Le velocità iniziali sono le stesse trovate nel primo problema. Per le velocità finali deve essere

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{2x} = v_3 \\ v_{2y} &= 0 \end{aligned}$$

Dalla conservazione di energia e quantità di moto orizzontale abbiamo adesso

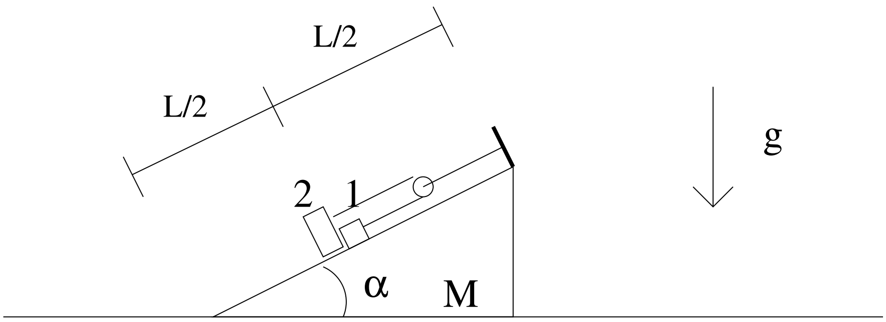
$$\begin{aligned} mV + m\frac{V}{2} &= 3mv_3 \\ \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{V^2}{4} + \frac{V^2}{4}\tan^2\frac{\theta_0}{2}\right) + mg\ell\cos\frac{\theta_0}{2} &= \frac{1}{2}3mv_3^2 + mg\ell \end{aligned}$$

e risolvendo troviamo

$$V = \frac{4\sin\frac{\theta_0}{4}}{\sqrt{2+\tan^2\frac{\theta_0}{2}}}\sqrt{g\ell}$$

5.3. 18 dicembre 2009

Problema 1 (15 punti)



Si consideri il sistema in figura: un cuneo di massa M inclinato di un angolo α è appoggiato su un piano orizzontale. Tra la superficie orizzontale e il cuneo è presente attrito statico sufficiente a mantenerlo fermo. Sul cuneo sono appoggiate due masse m_1 e m_2, con $m_2 > m_1$, attaccate ai due estremi di un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza L, che passa in una carrucola a sua volta attaccata all'estremo superiore del cuneo. Si trascuri l'attrito tra i due corpi e il cuneo, e si considerino i due corpi come punti materiali, inizialmente non in contatto tra di loro, ma appena appoggiati l'un l'altro.

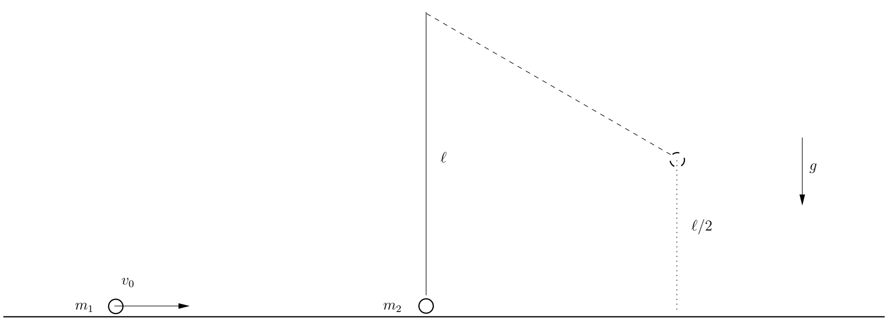
1. Determinare la tensione del filo.

2. Determinare il minimo coefficiente di attrito statico tra il cuneo e il piano orizzontale affinché il cuneo non si muova.

   Si supponga adesso che tra il piano orizzontale ed il cuneo non ci sia attrito e che quindi il cuneo sia libero di muoversi orizzontalmente. All'istante iniziale i due corpi sono tenuti fermi ad una distanza dalla fine del cuneo pari alla metà della lunghezza del filo, e sono appena appoggiati l'un l'altro. Il cuneo è fermo.

3. Determinare la velocità del cuneo quando il corpo 2 è arrivato a terra.

Problema 2 (15 punti)



Il pendolo in figura è formato da una massa m_2 appesa ad un filo inestensibile e di massa nulla di lunghezza ℓ. Viene colpito da una massa m_1 che si muove inizialmente con velocità v_0 su un piano orizzontale privo di attrito. Per rispondere a tutte le domande che seguono si assuma che l'urto avvenga in un tempo molto breve, e che in esso venga dissipata la massima quantità possibile di energia W_{MAX}.

- Calcolare per quale velocità v_0^* il pendolo riesce a sollevarsi di $\ell/2$ da terra.
- Determinare W_{MAX}.
- Per $v_0 > v_0^*$ determinare la tensione del filo quando la massa si è sollevata di $\ell/2$, nell'ipotesi che le due masse siano rimaste attaccate dopo l'urto.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Le equazioni del moto nelle direzioni parallele al piano inclinato si scrivono

$$m_1 a_1 = T - m_1 g \sin\alpha \tag{5.3.1}$$
$$m_2 a_2 = T - m_2 g \sin\alpha \tag{5.3.2}$$

ed inoltre per l'inestensibilità del filo $a_1 + a_2 = 0$. Dividendo per le masse e sommando membro a membro abbiamo

$$a_1 + a_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) T - 2g\sin\alpha \tag{5.3.3}$$

ed usando l'inestensibilità

$$T = 2g\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\sin\alpha \tag{5.3.4}$$

Domanda 2

Le reazioni vincolari applicate alle masse si determinano dalla condizione di accelerazione nulla per la particella nella direzione normale al piano:

$$N_1 = m_1 g\cos\alpha \tag{5.3.5}$$
$$N_2 = m_2 g\cos\alpha \tag{5.3.6}$$

Anche il cuneo non deve avere accelerazioni verticali, e questo permette di calcolare R

$$R = N_1\cos\alpha + N_2\cos\alpha + 2T\sin\alpha + Mg \tag{5.3.7}$$
$$= (m_1+m_2)\, g\cos^2\alpha + 4g\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\sin^2\alpha + Mg \tag{5.3.8}$$
$$= \frac{(m_1+m_2)^2\cos^2\alpha + 4m_1 m_2\sin^2\alpha + M(m_1+m_2)}{(m_1+m_2)} g \tag{5.3.9}$$

Consideriamo adesso le forze orizzontali applicate al cuneo. Deve essere

$$F_a + (N_1 + N_2)\sin\alpha - 2T\cos\alpha = 0 \tag{5.3.10}$$

da cui

$$|F_a| = |2T\cos\alpha - (N_1 + N_2)\sin\alpha| \le \mu_s R \tag{5.3.11}$$

ossia

$$\mu_s \ge \frac{(m_1 - m_2)^2\cos\alpha\sin\alpha}{(m_1 + m_2)^2 + M(m_1 + m_2) - (m_1 - m_2)^2\sin^2\alpha} \tag{5.3.12}$$

Domanda 3

In assenza di attrito si conserva l'energia e la quantità di moto orizzontale del sistema. Confrontando la configurazione iniziale e quella finale abbiamo per la prima

$$(m_1 + m_2)\, g\frac{\ell}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2}m_1\left(v_{x1}^2 + v_{y1}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(v_{x2}^2 + v_{y2}^2\right) + \frac{1}{2}MV^2 + m_1 g\ell\sin\alpha \tag{5.3.13}$$

perchè inizialmente tutte le velocità sono nulle e le due masse si trovano ad una altezza $h = \frac{1}{2}\ell\sin\alpha$, mentre alla fine la massa m_1 si trova ad una altezza $h = \ell\sin\alpha$ e la massa m_2 ad $h = 0$. Abbiamo quindi

$$m_1\left(v_{x1}^2 + v_{y1}^2\right) + m_2\left(v_{x2}^2 + v_{y2}^2\right) + MV^2 = (m_2 - m_1)\, g\ell\sin\alpha \tag{5.3.14}$$

Lo stesso confronto per la quantità di moto orizzontale dà

$$MV + m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = 0 \tag{5.3.15}$$

Inoltre a causa dell'inestensibilità del filo

$$v_{1y} = -v_{2y} \tag{5.3.16}$$

e la velocità delle due masse relativa al cuneo deve essere parallela al suo lato inclinato, quindi

$$v_{1y} = (v_{1x} - V)\tan\alpha \tag{5.3.17}$$

$$v_{2y} = (v_{2x} - V)\tan\alpha \tag{5.3.18}$$

Usando le ultime 4 relazioni lineari, possiamo esprimere tutte le velocità in termini della sola V:

$$v_{1x} = -\frac{M + 2m_2}{m_1 - m_2}V \tag{5.3.19}$$

$$v_{1y} = -v_{2y} = -\frac{(M + m_1 + m_2)}{m_1 - m_2}V\tan\alpha \tag{5.3.20}$$

$$v_{2x} = \frac{M + 2m_1}{m_1 - m_2}V \tag{5.3.21}$$

e sostituendo nella prima abbiamo

$$\left[(m_1+m_2)\frac{(M+m_1+m_2)^2}{(m_1-m_2)^2}\tan^2\alpha+m_1\frac{(M+2m_2)^2}{(m_1-m_2)^2}+m_2\frac{(M+2m_1)^2}{(m_1-m_2)^2}+M\right]V^2 \\ =(m_2-m_1)\,g\ell\sin\alpha$$

da cui

$$V=\sqrt{\frac{(m_2-m_1)^3\,g\ell\sin\alpha}{(M+m_1+m_2)\left[(m_1+m_2)(M+m_1+m_2)\tan^2\alpha+4m_1m_2+M\,(m_1+m_2)\right]}} \tag{5.3.22}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Rispondendo alla seconda domanda mostreremo che immediatamente dopo l'urto le due masse si muoveranno con la stessa velocità

$$v=\frac{m_1}{m_1+m_2}v_0 \tag{5.3.23}$$

Supponendo che rimangano attaccate ed imponendo la conservazione dell'energia deve essere

$$\frac{1}{2}\,(m_1+m_2)\,v^2=(m_1+m_2)\,g\frac{\ell}{2} \tag{5.3.24}$$

se invece le masse restano separate, solo m_2 si solleva mentre m_1 continua a muoversi orizzontalmente a velocità v. In questo caso

$$\frac{1}{2}m_2v^2=m_2g\frac{\ell}{2} \tag{5.3.25}$$

ma in entrambe le eventualità si trova

$$v=\frac{m_1}{m_1+m_2}v_0^*=\sqrt{g\ell} \tag{5.3.26}$$

e quindi

$$v_0^*=\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\sqrt{g\ell} \tag{5.3.27}$$

Domanda 2

Fino ad immediatamente dopo l'urto possiamo scrivere l'energia nella forma

$$E=\frac{1}{2}\,(m_1+m_2)\,v_{cm}^2+\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}v_r^2 \tag{5.3.28}$$

dove v_{cm} è la velocità del centro di massa del sistema e v_r la velocità relativa tra le due masse. Dato che si conserva la quantità di moto deve essere

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{cm}^2+\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}v_0^2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{cm}^2+\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}v_r^2+W \qquad (5.3.29)$$

dove v_r è la velocità relativa immediatamente dopo l'urto e W l'energia dissipata. Chiaramente la massima dissipazione si ha quando $v_r = 0$, e in questo caso

$$W_{MAX}=\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}v_0^2 \qquad (5.3.30)$$

Inoltre abbiamo, dato che $v_1 = v_2 = v$

$$v_{cm}=v=\frac{m_1}{m_1+m_2}v_0 \qquad (5.3.31)$$

Domanda 3

Dalla conservazione dell'energia troviamo la velocità v_h delle due masse quando raggiungono l'altezza $h = \ell/2$:

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 v_0^2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_h^2+(m_1+m_2)g\frac{\ell}{2} \qquad (5.3.32)$$

cioè

$$v_h^2=\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 v_0^2-g\ell \qquad (5.3.33)$$

Scrivendo l'equazione del moto nella direzione parallela al filo deve essere

$$-(m_1+m_2)\frac{v_h^2}{\ell}=(m_1+m_2)g\cos\alpha-T \qquad (5.3.34)$$

dove $\alpha = \pi/3$ è l'angolo che il filo forma con la verticale. Quindi

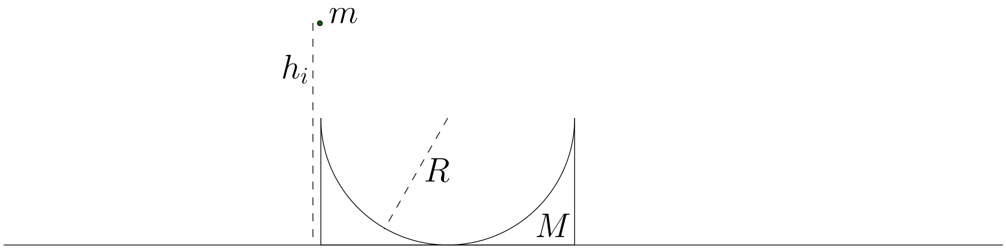
$$T=(m_1+m_2)g\cos\alpha+(m_1+m_2)\frac{v_h^2}{\ell} \qquad (5.3.35)$$

ossia

$$T=(m_1+m_2)\left[\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\frac{v_0^2}{\ell}-\frac{1}{2}g\right] \qquad (5.3.36)$$

5.4. 9 marzo 2010

Problema 1 (15 punti)



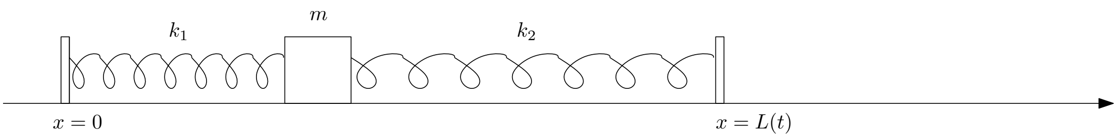
Una scodella semisferica di massa M è appoggiata su un piano orizzontale privo di attrito. Un punto materiale di massa m viene lasciato cadere da una altezza $h_i > R$, in modo da arrivare sul bordo sinistro della scodella. Da questo momento esso rimane vincolato ad essa, fino ad arrivare eventualmente al bordo opposto e lasciarla.

1. Calcolare lo spostamento orizzontale della scodella al momento del distacco, e l'altezza finale a cui arriva il punto materiale.

2. Calcolare la velocità del punto materiale al suo passaggio nel punto più basso della scodella.

3. Applicando una forza orizzontale alla scodella la si mantiene ferma. Quale è il valore massimo della forza da applicare?

Problema 2 (15 punti)



Una massa m di dimensioni trascurabili è collegata a due punti posti nelle posizioni $x = 0$ e $x = L(t) > 0$ da due molle di massa trascurabile, lunghezza a riposo nulla e costanti elastiche k_1 e k_2.

1. Determinare la posizione di equilibrio del sistema se $L(t) = L_0$ è costante.

2. Sempre nell'ipotesi $L(t) = L_0$ determinare la legge oraria della massa nell'ipotesi che a $t = 0$ questa si trovi ferma in $x = L_0/2$.

3. Si osserva adesso che la legge oraria della massa è, per $t > 0$,

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + x_0$$

dove a e x_0 sono costanti positive dalle opportune dimensioni. Determinare $L(t)$.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Indichiamo con X_i la posizione orizzontale iniziale del centro di massa della sola scodella. Per il centro di massa del sistema avremo

$$X_{cm,i} = \frac{MX_i + m\left(X_i - R\right)}{M+m}$$

Al momento del distacco avremo

$$X_{cm,f} = \frac{M\left(X_i + d\right) + m\left(X_i + d + R\right)}{M+m}$$

dove d è lo spostamento cercato. Ma dato che la componente orizzontale della quantità di moto del sistema si conserva ed è inizialmente nulla sarà $X_{cm,i} = X_{cm,f}$, quindi

$$\frac{MX_i + m\left(X_i - R\right)}{M+m} = \frac{M\left(X_i + d\right) + m\left(X_i + d + R\right)}{M+m}$$

e risolvendo troviamo

$$d = -\frac{2mR}{m+M}$$

Indichiamo con v_x, v_y le componenti della velocità della particella, con V la velocità della scodella.

Al distacco la componente orizzontale della velocità della particella relativa alla scodella è nulla. Ma dato che la quantità di moto orizzontale si conserva ed è inizialmente nulla abbiamo

$$0 = mv_x + MV = m\left(v_x - V\right) + \left(M+m\right)V = (m+M)V$$

Quindi $V = 0$, ma anche $v_x = -\frac{M}{m}V = 0$. In conclusioni al momento del distacco la scodella è ferma e la particella si muove verticalmente. Dalla conservazione dell'energia segue che l'altezza finale sarà uguale a quella iniziale.

Domanda 2

Usando la conservazione dell'energia possiamo scrivere

$$mgh_i = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

dove abbiamo indicato con v, V le velocità della particella e della scodella (entrambe orizzontali quando la prima si trova nel punto più basso). Inoltre dalla conservazione della quantità di moto orizzontale abbiamo

$$0 = mv + MV$$

e quindi

$$V = -\frac{m}{M}v$$

Sostituendo otteniamo0

$$mgh_i = \frac{1}{2}m\left(1+\frac{m}{M}\right)v^2$$

e quindi

$$v = \sqrt{2gh_i\left(\frac{M}{m+M}\right)}$$

Domanda 3

Dato che la forza da applicare è l'unica che agisce

$$F = (M+m)\frac{ma_x}{m+M} = ma_x$$

dove a_x è l'accelerazione orizzontale della particella. D'altra parte

$$ma_x = -N\sin\theta \tag{5.4.1}$$

dove N è la reazione vincolare della scodella. Se scriviamo l'equazione del moto per la particella nella direzione radiale abbiamo invece

$$m\frac{v^2}{R} = -mg\cos\theta + N$$

Inoltre dalla conservazione dell'energia

$$mgh_i = mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2$$

possiamo ricavare la velocità in funzione della posizione. Sostituendo nella (5.4.1) otteniamo

$$N = 2mg\left(\frac{h_i}{R} - 1 + \cos\theta\right) + mg\cos\theta$$

e quindi

$$F = -mg\left[2\left(\frac{h_i}{R}-1\right)+3\cos\theta\right]\sin\theta$$

Cerchiamo il minimo:

$$\frac{dF}{d\theta} = -mg\left[2\left(\frac{h_i}{R}-1\right)+3\cos\theta\right]\cos\theta + 3mg\sin^2\theta = 0$$

cioè

$$\cos^2\theta + 2\gamma\cos\theta - \frac{1}{2} = 0$$

dove abbiamo posto per semplicità

$$\gamma = \frac{1}{6}\left(\frac{h_i}{R} - 1\right)$$

Risolvendo troviamo

$$\cos\theta = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + \frac{1}{2}}$$

Scartando la soluzione negativa (non corrisponde ad una posizione sulla scodella) e sostituendo abbiamo

$$F = \pm 3mg\left(3\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \frac{1}{2}}\right)\sqrt{\frac{1}{2} - 2\gamma^2 + 2\gamma\sqrt{\gamma^2 + \frac{1}{2}}}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Detta x la posizione della massa, la forza che agisce su di essa vale

$$F = -k_1 x - k_2\left(x - L_0\right)$$

e si annulla quindi per

$$x = \frac{k_2}{k_1 + k_2} L_0$$

che corrisponde alla posizione di equilibrio.

Domanda 2

L'equazione del moto si scrive

$$m\ddot{x} = -(k_1 + k_2)x + k_2 L_0$$

che corrisponde ad una massa collegata ad una molla di costante elastica $k_1 + k_2$ sottoposta ad una forza costante $k_2 L_0$. La soluzione generale dell'equazione omogenea

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = 0$$

è un'oscillazione armonica

$$x_{om}(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

dove

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

Una soluzione particolare dell'equazione completa corrisponde alla massa ferma nella posizione di equilibrio

$$x_p(t) = \frac{k_2}{k_1+k_2}L_0$$

e quindi la soluzione generale sarà

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{k_2}{k_1+k_2}L_0$$

Imponiamo ora le condizioni al contorno. La massa si trova inizialmente in $L_0/2$, quind

$$x(0) = A + \frac{k_2}{k_1+k_2}L_0 = \frac{L_0}{2}$$

da cui

$$A = \frac{1}{2}\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}L_0$$

Inoltre è ferma:

$$\dot{x}(0) = B\omega = 0$$

e quindi

$$x(t) = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\frac{L_0}{2}\cos\omega t + \frac{k_2}{k_1+k_2}L_0$$

Notare che se $k_1 = k_2$ non si ha oscillazione.

Domanda 3

L'accelerazione della massa vale

$$\ddot{x} = a$$

e sostituendo nell'equazione del moto

$$m\ddot{x} + (k_1+k_2)x = k_2 L(t)$$

troviamo

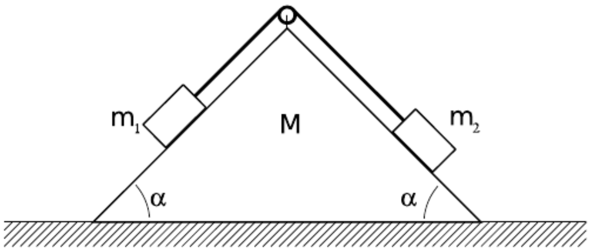
$$ma + (k_1+k_2)\left(\frac{1}{2}at^2 + x_0\right) = k_2 L(t)$$

quindi otteniamo

$$L(t) = \frac{ma}{k_2} + \left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)x_0 + \frac{1}{2}\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)at^2$$

5.5. 14 dicembre 2011

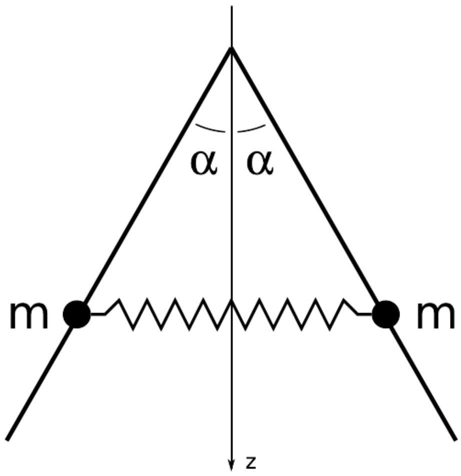
Problema 1 (15 punti)



Un cuneo di massa M triangolare simmetrico come in figura è appoggiato su un piano orizzontale su cui può scorrere senza attrito. Sulla sommità del cuneo è fissata una carrucola su cui scorre una fune ideale, a cui sono appesi due corpi di masse m_1 e m_2 come in figura. Le due masse possono scorrere senza attrito sulle superfici laterali del cuneo.

1. Supponendo in un primo momento che il cuneo venga tenuto fermo da una opportuna forza esterna orizzontale F_x, calcolare le accelerazioni delle due masse.
2. Calcolare la forza F_x di cui al punto precedente.
3. Assumendo ora che la forza esterna venga rimossa, calcolare l'accelerazione del cuneo.

Problema 2 (15 punti)



Due corpi puntiformi di uguale massa sono vincolati a muoversi lungo due guide rettilinee inclinate di un angolo α rispetto alla verticale, come in figura. Le due massa sono collegate da una molla ideale di lunghezza a riposo ℓ_0 e costante elastica k. Si assuma che durante tutto il moto le due masse rimangano allineate orizzontalmente una rispetto all'altra.

1. Scrivere l'energia meccanica del sistema. E' conservata?
2. Trovare eventuali posizioni di equilibrio e dire se sono stabili o instabili.
3. Le due masse si trovano inizialmente in quiete nella giunzione tra le due guide, e vengono lasciate libere. Determinare l'allungamento massimo della molla relativo alla lunghezza di riposo

Soluzione primo problema

Domanda 1

Le equazioni del moto per le due masse nella direzione parallela al piano si scrivono

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= T - m_1 g \sin\alpha \\ m_2 a_2 &= -T + m_2 g \sin\alpha \end{aligned}$$

dove a_1 e a_2 sono le componenti delle accelerazioni parallele al piano (le uniche diverse da zero), prese positive da sinistra verso destra. Per l'inestensibilità del filo $a_1 = a_2 \equiv a$. Sommando membro a membro otteniamo

$$(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)\, g \sin\alpha$$

e quindi

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g \sin\alpha$$

Domanda 2

La componente orizzontale della accelerazione del centro di massa del sistema è data da

$$a_{cm,x} = \frac{m_1 a \cos\alpha + m_2 a \cos\alpha}{m_1 + m_2 + M}$$

e quindi

$$\begin{aligned} F_x &= (m_1 + m_2 + M)\, a_{cm,x} \\ &= (m_1 + m_2)\, a \cos\alpha \\ &= (m_2 - m_1)\, g \sin\alpha \cos\alpha \end{aligned}$$

Domanda 3

Detta A l'accelerazione del cuneo abbiamo

$$a_{cm,x} = \frac{m_1 \left(A + a\cos\alpha\right) + m_2 \left(A + a\cos\alpha\right) + MA}{m_1 + m_2 + M} = 0 \tag{5.5.1}$$

dove adesso a è la componente parallela al piano dell'accelerazione dei due corpi relativa al cuneo. Le equazioni del moto delle due masse si possono scrivere in un sistema di riferimento solidale al cuneo

$$\begin{aligned} m_1 a &= T - m_1 g\sin\alpha - m_1 A\cos\alpha \\ m_2 a &= -T + m_2 g\sin\alpha - m_2 A\cos\alpha \end{aligned}$$

e sommando membro a membro abbiamo ancora

$$a + A\cos\alpha = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g\sin\alpha$$

Ricavando a e sostituendo nell'Equazione (5.5.1) abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \left(m_1 + m_2 + M\right) A + \left(m_1 + m_2\right) a\cos\alpha \\ &= \left(m_1 + m_2 + M\right) A + \left(m_1 + m_2\right)\cos\alpha \left[\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g\sin\alpha - A\cos\alpha\right] \\ &= \left[m_1 + m_2 + M - \left(m_1 + m_2\right)\cos^2\alpha\right] A + \left(m_2 - m_1\right) g\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}$$

da cui

$$A = \frac{\left(m_1 - m_2\right)\sin\alpha\cos\alpha}{\left(m_1 + m_2\right)\sin^2\alpha + M} g$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Utilizzando la distanza s di ciascuna massa dal vertice come coordinata abbiamo

$$E = \frac{1}{2} 2m\dot{s}^2 - 2mgs\cos\alpha + \frac{1}{2} k\left(2s\sin\alpha - \ell_0\right)^2$$

che si conserva dato che le reazioni vincolari non fanno lavoro sul sistema, essendo sempre perpendicolari agli spostamenti delle masse.

Domanda 2

Le posizioni di equilibrio stabile corrispondono ai minimi del potenziale, quelle instabili ai massimi. Il potenziale vale

$$U(s) = 2k\sin^2\alpha\left(s - \frac{\ell_0}{2\sin\alpha}\right)^2 - 2mgs\cos\alpha$$

che ha un unico minimo quando

$$\frac{dU}{ds} = 4k\sin^2\alpha\left(s - \frac{\ell_0}{2\sin\alpha}\right) - 2mg\cos\alpha = 0$$

cioè per

$$s = \frac{mg\cos\alpha}{2k\sin^2\alpha} + \frac{\ell_0}{2\sin\alpha}$$

Domanda 3

Usiamo la conservazione dell'energia. Inizialmente

$$E_i = \frac{1}{2}k\ell_0^2$$

e nell'istante di massimo allungamento della molla le masse sono nuovamente ferme, per cui

$$E_f = -2mgs\cos\alpha + \frac{1}{2}k\left(2s\sin\alpha - \ell_0\right)^2$$

In conclusione da $E_i = E_f$ segue

$$-2mgs\cos\alpha + \frac{1}{2}k\left(2s\sin\alpha - \ell_0\right)^2 = \frac{1}{2}k\ell_0^2$$

cioè

$$s\left[2ks\sin^2\alpha - 2k\ell_0\sin\alpha - 2mg\cos\alpha\right] = 0$$

Il valore di s che corrisponde al massimo allungamento è quindi

$$s = \frac{k\ell_0\sin\alpha + mg\cos\alpha}{k\sin^2\alpha}$$

e quest'ultimo sarà dato da

$$\begin{aligned}\Delta\ell &= 2\sin\alpha\frac{k\ell_0\sin\alpha + mg\cos\alpha}{k\sin^2\alpha} - \ell_0 \\ &= \frac{k\ell_0\sin\alpha + 2mg\cos\alpha}{k\sin\alpha} \\ &= \ell_0 + \frac{2mg\cos\alpha}{k\sin\alpha}\end{aligned}$$

5.6. 14 dicembre 2016

Esercizio 1

Un cuneo di massa $M = 5\,\mathrm{kg}$ è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito, sul quale è libero di scorrere. L'angolo formato dal piano inclinato con la direzione orizzontale è $\theta = \pi/6$. All'estremo superiore di questo è fissata una molla ideale di costante elastica $k = 30\,\mathrm{N m^{-1}}$ e lunghezza a riposo ℓ_0 uguale a quella del piano inclinato, come in Figura 5.1.

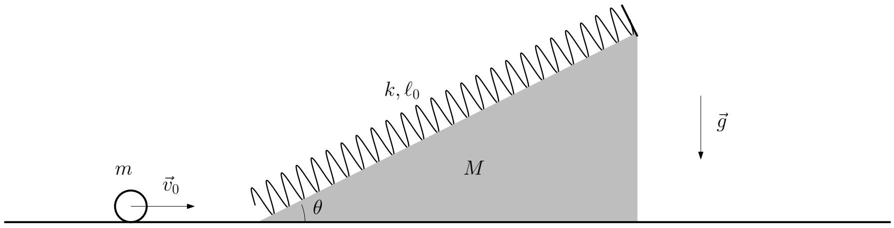


Figura 5.1.:

Inizialmente una particella di massa $m = 2\,\mathrm{kg}$ viene lanciata lungo il piano con velocità $v_0 = 1\,\mathrm{m s^{-1}}$, e arrivata al cuneo vi sale sopra (lo spigolo tra piano inclinato e superficie orizzontale è stato opportunamente arrotondato).

1. Determinare due costanti del moto per il sistema, e calcolarne il valore numerico iniziale.

2. Quanto vale la velocità del cuneo nell'istante in cui la compressione della molla è massima? E la velocità della particella?

3. Calcolare la massima compressione della molla.

Esercizio 2

Un piano è inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale. Su di esso è posato un cuneo con un angolo al vertice β come in Figura 5.2.

Il cuneo ha massa M, e su di esso è posato un punto materiale di massa m. Si considera il vincolo tra punto materiale e cuneo come bilatero. Inizialmente cuneo e punto materiale sono fermi.

1. Supponendo che vi sia attrito tra cuneo e piano inclinato, per quale valore minimo del coefficiente di attrito statico μ_s il cuneo rimane fermo?

2. In assenza di attrito, ad α fissato determinare almeno un valore di β per il quale il punto materiale si muova solo in direzione verticale.

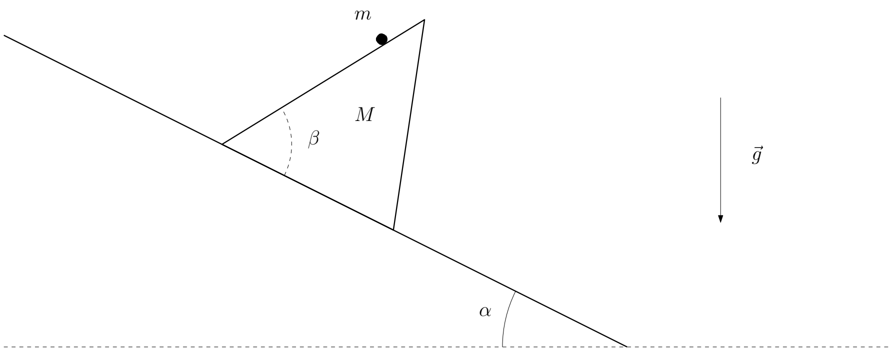


Figura 5.2.:

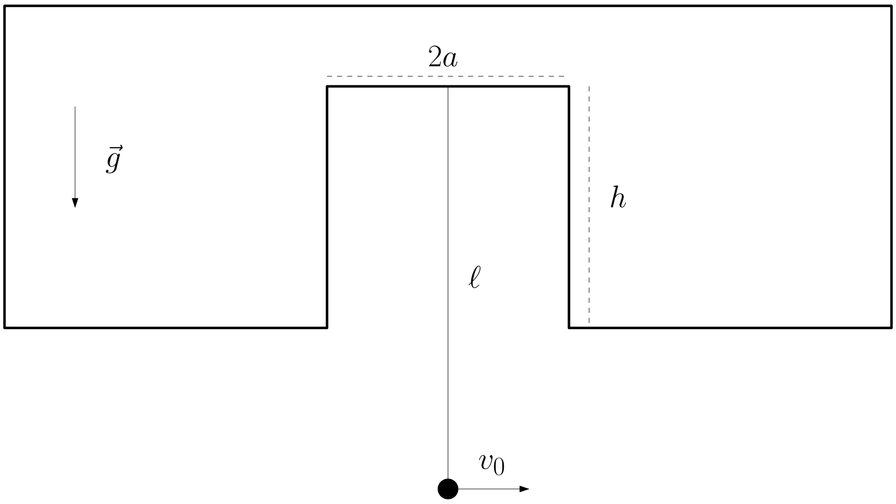


Figura 5.3.:

Esercizio 3

Un pendolo di lunghezza ℓ, con $\ell > \sqrt{a^2 + h^2}$, è appeso all'interno della struttura rappresentata in Figura 5.3. Inizialmente si trova in posizione verticale, e la massa appesa m ha una velocità v_0.

1. Per quale valore massimo di $v_0 = v_1$ il filo non tocca lo spigolo della struttura durante l'oscillazione?

2. Per quale valore minimo di $v_0 = v_2$ la massa urta la struttura?

3. Considerando $v_0 = v_2$, determinare la tensione del filo immediatamente prima e immediatamente dopo il suo contatto con lo spigolo della struttura.

Soluzioni

Esercizio 1

Domanda 1

Sul sistema complessivo non agiscono forze esterne orizzontali, quindi la quantità di moto orizzontale totale P_x si conserva. Le forze che agiscono sul sistema sono:

1. La forza peso, conservativa.
2. Le forze di richiamo dovute alla molla, anche esse conservative.
3. La reazione normale del piano orizzontale, che non compie lavoro perchè perpendicolare allo spostamento dei punti di applicazione.
4. Le due reazioni normali, uguali e contrarie, tra cuneo e particella. I lavori da esse compiute si cancellano, dato che lo spostamento relativo tra cuneo e particella è normale ad esse.

In conclusione l'energia meccanica totale E, data dalla somme delle energie cinetiche e delle energie potenziali gravitazionali e della molla si conservano. Possiamo scrivere

$$P_x = mv_x + MV$$
$$E = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) + \frac{1}{2}MV^2 + mgh + \frac{1}{2}k\left(\Delta\ell\right)^2$$

dove v_x e v_y sono le componenti orizzontali e verticali della velocità della particella, V la velocità del cuneo (solo orizzontale), h la posizione verticale della particella rispetto al piano orizzontale, e $\Delta\ell$ la deformazione della molla. Inizialmente $v_x = v_0$, $v_y = V = 0$, $h = 0$ e $\Delta\ell = 0$ quindi

$$P_x = mv_0 = 2\mathrm{kg} \times 1\mathrm{m\,s^{-1}} = 2\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$$
$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}2\mathrm{kg} \times \left(1\mathrm{m\,s^{-1}}\right)^2 = 1\mathrm{J}$$

Domanda 2

Nel momento di massima compressione le velocità del cuneo e della particella sono le stesse, ed in particolare $v_y = 0$. Dalla conservazione della quantità di moto orizzontale troviamo quindi

$$mv_0 = (m + M)\,V$$

cioè

$$V = \frac{m}{m+M}v_0$$

Domanda 3

Nel momento di massima compressione $h = -\Delta\ell \sin\theta$. Dalla conservazione dell'energia meccanica abbiamo

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m+M)V^2 - mg\Delta\ell\sin\theta + \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2$$

cioè, eliminando V,

$$(\Delta\ell)^2 - \frac{2mg}{k}\sin\theta\Delta\ell - \mu\frac{v_0^2}{k} = 0$$

dove $\mu = mM/(m+M)$ è la massa ridotta del sistema. Risolvendo per $\Delta\ell$ troviamo

$$\Delta\ell = \frac{mg\sin\theta}{k} \pm \sqrt{\frac{m^2g^2\sin^2\theta}{k^2} + \mu\frac{v_0^2}{k}}$$

La compressione massima corrisponde alla soluzione negativa, e quindi

$$\Delta\ell = \frac{mg\sin\theta}{k}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{\mu k v_0^2}{m^2g^2\sin^2\theta}}\right)$$

Esercizio 2

Domanda 1

Se il cuneo rimane fermo, il punto materiale ha una accelerazione uniforme (indichiamo nel seguito con $\hat{\tau}$ il versore parallelo al piano inclinato e con $\hat{n}$ quello normale)

$$\vec{a} = -g\sin(\beta-\alpha)(\hat{\tau}\cos\beta + \hat{n}\sin\beta)$$

e il centro di massa del sistema cuneo+punto materiale avrà una accelerazione

$$\vec{a}_{cm} = -g\sin(\beta-\alpha)\frac{m}{m+M}(\hat{\tau}\cos\beta + \hat{n}\sin\beta)$$

che deve essere uguale alla forza totale agente diviso la massa totale. Quindi

$$-mg\sin(\beta-\alpha)(\hat{\tau}\cos\beta + \hat{n}\sin\beta) = N\hat{n} - (m+M)g\hat{y} + F_a\hat{\tau}$$

Proiettando nelle direzioni $\hat{\tau}$ e $\hat{n}$ troviamo

$$\begin{aligned}
-mg\sin(\beta-\alpha)\cos\beta &= -(m+M)g\hat{y}\cdot\hat{\tau} + F_a \\
-mg\sin(\beta-\alpha)\sin\beta &= N - (m+M)g\hat{y}\cdot\hat{n}
\end{aligned}$$

da cui

$$
\begin{aligned}
F_a &= -mg\sin(\beta-\alpha)\cos\beta - (m+M)\,g\sin\alpha \\
N &= -mg\sin(\beta-\alpha)\sin\beta + (m+M)\,g\cos\alpha
\end{aligned}
$$

Dato che deve essere $|F_a| \leq \mu_s N$ troviamo

$$
\begin{aligned}
\mu_s &= \frac{(m+M)\sin\alpha + m\cos\beta\sin(\beta-\alpha)}{(m+M)\cos\alpha - m\sin\beta\sin(\beta-\alpha)} \\
&= \frac{M\sin\alpha + m\sin\beta\cos(\beta-\alpha)}{M\cos\alpha + m\cos\beta\cos(\beta-\alpha)}
\end{aligned}
$$

Domanda 2

Se il punto materiale si muove solo verticalmente, la sua accelerazione orizzontale deve essere nulla. Questo accade ad esempio se il suo piano di appoggio è orizzontale, cioè quando $\alpha = \beta$. L'unica altra possibilità è che non vi sia alcuna forza tra punto materiale e cuneo. In questo caso l'accelerazione del punto materiale sarà semplicemente

$$\vec{a} = -g\hat{y}$$

mentre quella del cuneo sarà

$$\vec{a}' = g\sin\alpha\hat{\tau}$$

Ma punto materiale e cuneo devono rimanere in contatto, quindi le componenti delle due accelerazioni lungo la normale al lato obliquo del cuneo devono coincidere:

$$\vec{a}\cdot(-\hat{\tau}\sin\beta + \hat{n}\cos\beta) = \vec{a}'\cdot(-\hat{\tau}\sin\beta + \hat{n}\cos\beta)$$

da cui

$$\cos\alpha\cos\beta = 0$$

Il caso $\alpha = \pi/2$ corrisponde ad un piano verticale: in questo caso il cuneo e la particella cadono entrambi con accelerazione $\vec{a} = -g\hat{y}$. Abbiamo infine il caso $\beta = \pi/2$.

Esercizio 3

Domanda 1

L'angolo massimo possibile del filo rispetto alla verticale è dato da

$$\tan\theta_{max} = \frac{a}{h}$$

L'energia meccanica del sistema si conserva ed è data da

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mg\ell\cos\theta$$

Di conseguenza per non avere contatto deve essere

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mg\ell \leq -mg\ell\cos\theta_{max}$$

da cui

$$v_1 = \sqrt{2g\ell\left(1-\cos\theta_{max}\right)}$$

Volendo si può eliminare θ_{max} utilizzando la relazione

$$\cos\theta_{max} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta_{max}}} = \frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}$$

Domanda 2

Possiamo utilizzare ancora una volta la conservazione dell'energia, che scriviamo nella forma

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

Infatti la forza di contatto tra il filo e la struttura non fa lavoro, dato che il punto di applicazione è in quiete. Di conseguenza

$$\frac{1}{2}mv^2 - mg\ell \leq -mgh$$

da cui

$$v_2 = \sqrt{2g\left(\ell-h\right)}$$

Domanda 3

Al momento del contatto la velocità della massa si determina dalla conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - mg\ell = \frac{1}{2}mv^2 - mg\ell\cos\theta_{max}$$

Segue che

$$v^2 = v_2^2 + 2g\ell\left(\cos\theta_{max}-1\right)$$

Immediatamente prima del contatto abbiamo un moto circolare con raggio $\rho_1 = \ell$. Quindi l'equazione del moto nella direzione del filo da

$$-m\frac{v^2}{\rho_1} = -T + mg\cos\theta_{max}$$

da cui

$$
\begin{aligned}
T &= m\frac{v^2}{\rho_1} + mg\cos\theta_{max} \\
&= m\frac{v_2^2}{\ell} + 3mg\cos\theta_{max} - 2mg \\
&= m\frac{v_2^2}{\ell} + \frac{3mgh}{\sqrt{h^2+a^2}} - 2mg
\end{aligned}
$$

Subito dopo il contatto abbiamo ancora un moto circolare, ma con raggio $\rho_2 = \ell - \sqrt{a^2+h^2}$. Quindi

$$
\begin{aligned}
T &= m\frac{v^2}{\rho_2} + mg\cos\theta_{max} \\
&= m\frac{v_2^2}{\ell-\sqrt{a^2+h^2}} + 2mg\frac{\ell}{\ell-\sqrt{a^2+h^2}}\left(\cos\theta_{max}-1\right) + mg\cos\theta_{max}
\end{aligned}
$$

6. Terza prova in itinere

6.1. 1 aprile 2009

Problema 1 (15 punti)

In un semplice modello per una galassia ciascuna stella si muove in un'orbita circolare, sotto l'azione di un potenziale centrale $U(r)$ che tiene conto delle interazioni gravitazionali con le rimanenti. Le osservazioni mostrano che la velocità di una stella dipende dalla sua distanza dal centro della galassia come

$$V(r) = \sqrt{\frac{K}{1+\frac{r}{r_0}}} \tag{6.1.1}$$

dove K e r_0 sono costanti positive.

1. Determinare il potenziale $U(r)$ che potrebbe spiegare i dati sperimentali.

2. Studiare qualitativamente le orbite nel potenziale $U(r)$, dicendo in particolare se sono possibili orbite illimitate.

3. Supponendo che la galassia sia approssimabile con una distribuzione sferica di massa, determinarne la massa totale studiando il comportamento di $V(r)$ per $r \gg r_0$.

Problema 2 (15 punti)

Un'asta di lunghezza ℓ e massa m è fissata a una parete verticale attraverso un giunto elastico con momento di richiamo $M = -k\theta$, dove θ è l'angolo con il quale si deforma il giunto. Si suppone il giunto sufficientemente rigido per cui gli angoli sono piccoli. In assenza di gravità l'asta è perpendicolare alla parete.

1. Calcolare la posizione di equilibrio sotto l'influenza della gravità e il periodo delle piccole oscillazioni.

2. La parete si muove con moto sinusoidale di ampiezza y_0 con frequenza ω. Si calcoli l'ampiezza del moto a regime dell'asta.

3. Il giunto ha una dissipazione viscosa che genera un momento $M_v = -\gamma\dot{\theta}$. Si calcoli l'ampiezza e la fase del moto a regime dell'asta in funzione di ω. Qual'è l'energia dissipata per ciclo?

Soluzione primo problema

Domanda 1

La forza radiale che agisce su una stella è data da

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

e deve essere uguale all'accelerazione radiale. Per un'orbita circolare abbiamo quindi

$$-m\frac{V^2(r)}{r} = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

ossia

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{mK}{r\left(1+\frac{r}{r_0}\right)}$$

Integrando troviamo il potenziale, a meno di una costante inessenziale:

$$\begin{aligned} U &= mK \int \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+r_0}\right) dr \\ &= -mK \log\left(1+\frac{r_0}{r}\right) \end{aligned}$$

Domanda 2

Il potenziale efficace vale

$$U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - mK\log\left(1+\frac{r_0}{r}\right)$$

ed abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} U_{eff}(r) &= +\infty \\ \lim_{r\to +\infty} U_{eff}(r) &= 0 \end{aligned}$$

Inoltre la derivata

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{mKr_0}{r\,(r+r_0)}$$

si annulla se

$$r^2 - \frac{L^2}{Km^2r_0}r - \frac{L^2}{Km^2} = 0$$

cioè quando

$$r = \frac{L^2}{2Km^2r_0} + \sqrt{\left(\frac{L^2}{2Km^2r_0}\right)^2 + \frac{L^2}{Km^2}} \equiv r^*$$

Il potenziale ha quindi un minimo in r^*, che deve corrispondere ad un valore negativo del potenziale efficace. Abbiamo quindi, in termini dell'energia totale E,

1. orbite circolari quando $E = U_{eff}(r^*)$
2. orbite limitate quando $U_{eff}(r^*) < E < 0$
3. orbite illimitate (che si avvicinano al centro fino ad un raggio minimo) per $E \geq 0$

Domanda 3

Per $r \gg r_0$ possiamo approssimare

$$V(r) \simeq \sqrt{\frac{Kr_0}{r}}$$

ma d'altra parte a grande distanza dalla galassia la forza gravitazionale deve essere

$$F_r \simeq -\frac{GmM}{r^2}$$

e quindi dall'equazione del moto

$$-m\frac{V^2}{r} = F_r$$

troviamo

$$m\frac{Kr_0}{r^2} \simeq \frac{GmM}{r^2}$$

ossia

$$M = \frac{Kr_0}{G}$$

Da un altro punto di vista per $r \gg r_0$

$$U(r) \simeq -\frac{mKr_0}{r}$$

che è l'energia potenziale del campo gravitazionale generato dalla massa M appena determinata.

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Scegliendo il polo nel giunto possiamo scrivere la seconda equazione cardinale nella forma

$$I\ddot{\theta} = -k\theta - mg\frac{\ell}{2}\cos\theta$$

dove l'angolo θ e quello tra la sbarra e la direzione orizzontale. All'equilibrio deve essere

$$k\theta_0 + \frac{1}{2}mg\ell\cos\theta_0 = 0$$

e per piccoli angoli possiamo approssimare $\cos\theta_0 \simeq 1$ da cui

$$\theta_0 = -\frac{mg\ell}{2k}$$

Ponendo $\theta = \theta_0 + \epsilon$ abbiamo infine

$$I\ddot{\epsilon} = -k\epsilon$$

e per la frequenza delle piccole oscillazioni

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{I}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3k}{m\ell^2}}$$

dove abbiamo utilizzato il valore del momento di inerzia della sbarra rispetto ad un suo estremo

$$I = \frac{m\ell^2}{3}$$

Domanda 2

Nel sistema di riferimento della parete abbiamo la forza apparente dovuta alla accelerazione, e l'equazione del moto diventa

$$I\ddot{\epsilon} + k\epsilon = m\omega_0^2 y_0 \frac{\ell}{2} \sin \omega_0 t$$

A regime abbiamo dunque

$$\epsilon(t) = \frac{m\omega_0^2 y_0 \ell}{2\left(k - I\omega_0^2\right)} \sin \omega_0 t$$

Domanda 3

In questo caso l'equazione del moto diviene

$$I\ddot{\epsilon} + \gamma\dot{\epsilon} + k\epsilon = m\omega_0^2 y_0 \frac{\ell}{2} \sin \omega_0 t$$

e la soluzione a regime sarà

$$\epsilon(t) = \mathrm{Im}\left(\frac{m\ell\omega_0^2 y_0 e^{i\omega_0 t}}{2\left(k + \gamma i\omega_0 - \omega_0^2\right)}\right)$$

L'ampiezza dell'oscillazione sarà dunque

$$A = \left|\frac{m\ell\omega_0^2 y_0}{2\left(k + \gamma i\omega_0 - \omega_0^2\right)}\right| = \frac{m\ell\omega_0^2 y_0}{2\sqrt{\left(k - \omega_0^2\right)^2 + \gamma^2\omega_0^2}}$$

e la fase

$$\tan\phi = \frac{\gamma\omega_0}{\omega_0^2 - k}$$

L'energia dissipata in un ciclo si ottiene osservando che se si moltiplica membro a membro l'equazione del moto per $\dot{\epsilon}$

$$I\ddot{\epsilon}\dot{\epsilon} + \gamma\dot{\epsilon}^2 + k\epsilon\dot{\epsilon} = m\omega_0^2 y_0 \frac{\ell}{2}\dot{\epsilon}\sin\omega_0 t$$

da cui

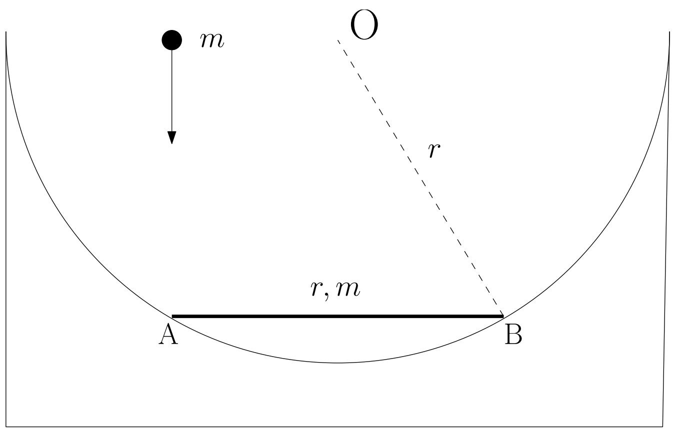
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I\dot{\epsilon}^2 + \frac{1}{2}k\epsilon^2\right) = m\omega_0^2 y_0 \frac{\ell}{2}\dot{\epsilon}\sin\omega_0 t - \gamma\dot{\epsilon}^2$$

Il primo termine a destra è la potenza della forzante, e il secondo la potenza dissipata. L'integrale al secondo membro su un ciclo si deve annullare a regime. In ogni caso l'energia dissipata in un ciclo sarà

$$\begin{aligned}
E_{diss} &= -\gamma \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \dot{\epsilon}^2 dt \\
&= -\gamma \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} A^2\omega_0^2 \cos^2\left(\omega_0 t + \phi\right) dt \\
&= -\gamma\pi A^2\omega_0
\end{aligned}$$

6.2. 23 marzo 2010

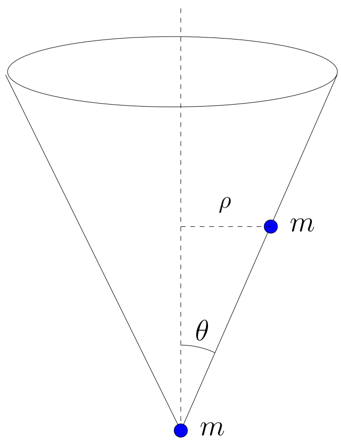
Problema 1



Un'asta di massa m e lunghezza r si muove con gli estremi vincolati ad una guida semicircolare priva di attrito. Il raggio della guida è uguale alla lunghezza dell'asta, e quest'ultima si trova inizialmente in equilibrio nella posizione in figura. Una particella di massa uguale a quella dell'asta viene lasciata cadere sulla verticale di un'estremo dell'asta, da un'altezza iniziale uguale a quella del centro della guida. L'urto con l'estremo dell'asta è istantaneo e la particella rimane attaccata ad essa.

1. Determinare l'angolo che l'asta forma con l'orizzontale nella posizione di equilibrio del sistema.
2. Calcolare l'energia dissipata durante l'urto.
3. Calcolare l'altezza massima raggiunta dal centro di massa del sistema dopo l'urto.

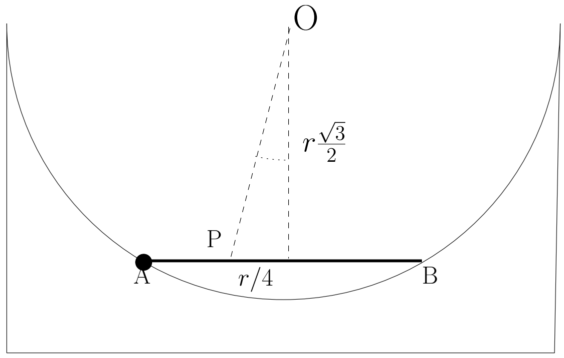
Problema 2



Una particella di massa $m = 1\text{kg}$ è vincolata a muoversi sopra un cono liscio di semiapertura $\theta = \pi/6$. Al vertice del cono è fissata un'altra particella di uguale massa: le due particelle interagiscono gravitazionalmente.

1. Calcolare il periodo di un'orbita circolare di raggio $\rho = 1\text{m}$ (la costante gravitazionale vale $G = 6.67 \times 10^{-11}\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$)
2. Determinare le costanti del moto del sistema e discutere le caratteristiche delle orbite sulla base dei loro valori.
3. Dire se tutte le orbite limitate sono chiuse, motivando la risposta. Suggerimento: studiare la traiettoria determinando un'equazione differenziale per il parametro $u = 1/r$ in funzione di ϕ.

Soluzione primo problema



Domanda 1

Il centro di massa del sistema si trova nel punto P posto a una distanza $r/4$ dal punto A, e la posizione di equilibrio si avrà quando l'energia potenziale gravitazionale è minima, cioè quando P si troverà sotto O. Questo significa che l'asta avrà ruotato di un angolo θ dato da

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{4}r}{\frac{\sqrt{3}}{2}r} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Domanda 2

Immediatamente prima dell'urto la velocità della particella vale ($h = r\sqrt{3}/2$ è l'altezza da cui cade)

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{gr\sqrt{3}}$$

Durante l'urto si conserva il momento angolare rispetto al punto O, perchè le uniche forze impulsive esterne (le reazioni vincolari) hanno momento nullo. Questo vale immediatamente prima

$$mv_0\frac{r}{2} = m\frac{r}{2}\sqrt{gr\sqrt{3}}$$

e immediatamente dopo $I\omega$ dove I è il momento di inerzia del sistema rispetto ad O:

$$I = \left(\frac{1}{12}mr^2 + \frac{3}{4}mr^2\right) + mr^2 = \frac{11}{6}mr^2$$

Nell'espressione precedente il termine tra parentesi è il momento di inerzia della sbarra, calcolato tramite il teorema di Steiner, e l'altro il contributo della particella. Abbiamo quindi

$$\omega^2 = \left(\frac{mr}{2I}\right)^2 gr\sqrt{3}$$

L'energia cinetica del sistema dopo l'urto vale quindi

$$E_f = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{3\sqrt{3}}{44}mgr$$

mentre prima valeva

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}mgr$$

l'energia dissipata è quindi

$$\Delta E = E_i - E_f = \frac{19}{44}\sqrt{3}mgr$$

Domanda 3

Il centro di massa raggiungerà la sua altezza massima rispetto alla quota iniziale quando tutta l'energia cinetica si sarà convertita in energia potenziale. Quindi

$$\frac{3\sqrt{3}}{44}mgr = 2mg\Delta h$$

ossia

$$\Delta h = \frac{3\sqrt{3}}{88}r$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Per un'orbita circolare le equazioni del moto nella direzione dell'asse del cono danno

$$0 = N\sin\theta - \frac{Gm^2}{r^2}\cos\theta$$

mentre nella direzione radiale deve essere

$$-m\frac{v^2}{r\sin\theta} = -N\cos\theta - \frac{Gm^2}{r^2}\sin\theta$$

da cui

$$v^2 = \sqrt{\frac{Gm}{r}}$$

Il periodo è quindi

$$T = \frac{2\pi r \sin\theta}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho^3}{Gm\sin\theta}} = 1.1 \times 10^6 \mathrm{s}$$

circa dodici giorni e mezzo.

Domanda 2

Si conserva la componente del momento angolare L_z parallela all'asse del cilindro, valutata rispetto a un punto qualsiasi di questo, e l'energia E. Utilizzando un sistema di coordinate sferiche centrate nel vertice del cono abbiamo

$$L_z = mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta$$

e

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta - \frac{Gm^2}{r}$$

Se scriviamo l'energia in funzione del potenziale efficace

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$$

abbiamo

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L_z^2}{2mr^2\sin^2\theta} - \frac{Gm^2}{r}$$

che è identico al potenziale efficace del problema di Keplero, ridefinendo

$$L'_z = \frac{L_z}{\sin\theta}$$

Avremo quindi orbite circolare quando l'energia totale è uguale al minimo del potenziale effettivo, orbite limitate per $E < 0$, orbite illimitate per $E \geq 0$. Si può avere caduta nel vertice solo se $L_z = 0$.

Domanda 3

Se usiamo come parametro ϕ invece del tempo possiamo scrivere

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{d\phi}\frac{L_z}{mr^2\sin^2\theta}\right)^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2\sin^2\theta} - \frac{Gm^2}{r}$$

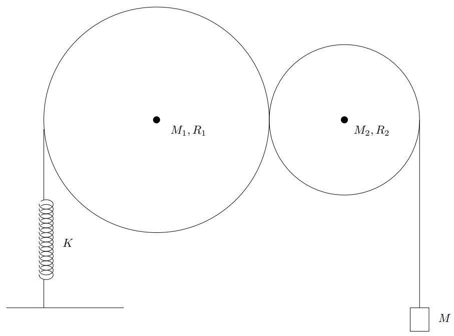
e introducendo

$$r = \frac{1}{u}$$

otteniamo
$$E = \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{m\sin^4\theta}\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{m\sin^2\theta}u^2 - Gm^2u$$
Derivando rispetto a ϕ abbiamo
$$\frac{L_z^2}{m\sin^4\theta}\frac{d^2u}{d\phi^2} + \frac{L_z^2}{m\sin^2\theta}u - Gm^2 = 0$$
che è l'equazione di un oscillatore su cui agisce una forza costante. Possiamo scrivere la soluzione generale nella forma
$$u = \frac{1}{r} = A\cos(\phi\sin\theta + \beta) + \frac{Gm^3}{L_z^2}\sin^2\theta$$
cioè
$$r = \frac{\frac{Gm^3}{L_z^2}\sin^2\theta}{1 + \frac{AL_z^2}{Gm^3}\cos(\phi\sin\theta + \beta)}$$
Si hanno orbite limitate quando il denominatore non si annulla, cioè
$$\frac{AL_z^2}{Gm^3} < 1$$
in questo caso r è una funzione periodica di ϕ, di periodo
$$T = \frac{2\pi}{\sin\theta} = 2\times 2\pi$$
quindi le orbite si chiudono sempre, più precisamente dopo aver fatto due giri del cilindro.

6.3. 13 aprile 2011

Problema 1 (15 punti)



I due dischi in figura, di massa M_1, M_2 e raggio R_1, R_2 sono vincolati a ruotare intorno ai loro centri e lo fanno senza strisciare uno sull'altro. Una massa M è appesa a un filo inestensibile avvolto al disco di destra, il sinistro è collegato mediante una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla ad un punto fisso.

1. Il sistema è inizialmente in quiete, e l'allungamento della molla è nullo. Viene lasciato libero di muoversi: calcolare di quanto si abbassa al massimo la massa M.

2. Mostrare che il sistema è equivalente ad un oscillatore armonico, e determinarne la frequenza.

3. Se sulla massa M agisce una forza di attrito viscoso $F = -\lambda v$, dove λ è una costante positiva dalle opportune dimensioni, valutare il fattore di qualità dell'oscillatore.

Problema 2 (15 punti)

Un satellite di massa m si trova in orbita circolare attorno alla terra, la durata del periodo è 24h. La massa del satellite è molto minore della massa della terra, $m \ll M_T = 6 \times 10^{24}$kg.

1. Determinare il raggio dell'orbita, sapendo che la costante di gravitazione universale vale $G = 6.7 \times 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$.

2. Mediante un opportuno impulso $\vec{I}$ applicato istantaneamente in direzione tangenziale si vuole portare il satellite su un'orbita parabolica. Determinare $\vec{I}$.

3. Supponendo nuovamente il satellite in orbita circolare come al punto 1., lo si vuole portare su un'orbita circolare di raggio doppio, applicando ad opportuni istanti due impulsi $\vec{I}_1$ e $\vec{I}_2$, passando attraverso un'orbita ellittica intermedia. Calcolare $\vec{I}_1$ e $\vec{I}_2$ supponendoli entrambi applicati in direzione tangenziale.

Soluzione primo problema

Domanda 1 L'energia del sistema si conserva, e vale

$$E = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + Mgy + \frac{K}{2}\delta^2$$

dove ω_1, ω_2 sono le velocità angolari dei due cilindri ed y l'altezza della massa misurata rispetto alla posizione iniziale. La deformazione della molla δ è data da $\delta = y$ a causa della condizione di rotolamento puro. Uguagliando l'energia iniziale a quella nella posizione di massimo allungamento abbiamo

$$Mgy + \frac{K}{2}y^2 = 0$$

da cui otteniamo il massimo abbassamento

$$y = -\frac{2Mg}{K}$$

Domanda 2 Le condizioni di rotolamento puro sono

$$\begin{aligned} \omega_1 R_1 &= -\omega_2 R_2 \\ \omega_2 R_2 &= \dot{y} \end{aligned}$$

da cui segue che l'energia può essere scritta nella forma (usando $I_1 = M_1R_1^2/2$ e $I_2 = M_2R_2^2/2$)

$$E = \frac{1}{2}\left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)\dot{y}^2 + Mgy + \frac{K}{2}y^2$$

Derivando rispetto al tempo

$$\dot{E} = \left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)\dot{y}\ddot{y} + Mg\dot{y} + Ky\dot{y} = 0$$

troviamo le equazioni del moto

$$\left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)\ddot{y} + Ky = -Mg$$

che sono quelle di un oscillatore armonico sottoposto ad una forza costante. La frequenza sarà dunque

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2K}{2M + M_1 + M_2}}$$

Non volendo utilizzare l'energia, possiamo scrivere direttamente le equazioni del moto. Per la massa sospesa abbiamo

$$M\ddot{y} = -Mg + T$$

dove T è la tensione del filo. La seconda equazione cardinale per il primo cilindro si scrive

$$I_1\ddot{\theta}_1 = -KR_1^2\theta_1 + FR_1$$

dove F è la forza applicata al punto di contatto e θ_1 è lo spostamento angolare dalla posizione iniziale. Per il secondo abbiamo

$$I_2\ddot{\theta}_2 = FR_2 - TR_2$$

dove θ_2 è lo spostamento angolare dalla posizione iniziale. La condizione di puro rotolamento si scrive

$$R_1\dot{\theta}_1 = -R_2\dot{\theta}_2$$

ossia

$$R_1\theta_1 = -R_2\theta_2$$

Inoltre

$$y = R_2\theta_2$$

Esprimendo tutte le equazioni in funzione di y abbiamo

$$\begin{aligned} M\ddot{y} &= -Mg + T \\ I_1\ddot{y} &= -KR_1^2 y - FR_1^2 \\ I_2\ddot{y} &= FR_2^2 - TR_2^2 \end{aligned}$$

da cui

$$\left(M + \frac{I_1}{R_1^2} + \frac{I_2}{R_2^2}\right)\ddot{y} = -Mg - Ky$$

ossia

$$\left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)\ddot{y} + Ky = -Mg$$

Domanda 3 In presenza di attrito viscoso l'equazione del moto diventa

$$\left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)\ddot{y} + \lambda\dot{y} + Ky = -Mg$$

Il fattore di qualità è dato dal prodotto

$$Q = \omega\tau$$

dove τ è il tempo di smorzamento,

$$\tau = \frac{2\left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)}{\lambda}$$

Quindi

$$Q=\frac{2\left(M+\frac{1}{2}M_1+\frac{1}{2}M_2\right)}{\lambda}\sqrt{\frac{K}{M+\frac{1}{2}M_1+\frac{1}{2}M_2}}=\frac{1}{\lambda}\sqrt{2K\left(2M+M_1+M_2\right)}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1 L'equazione del moto in direzione radiale si scrive

$$m\frac{v^2}{R}=G\frac{mM_T}{R^2}$$

e d'altra parte per il periodo vale

$$v=\frac{2\pi R}{T}$$

da cui

$$R=\left(\frac{GM_TT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}\simeq\left(\frac{6.7\times10^{-11}\times6\times10^{24}\times(24\times60\times60)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}\mathrm{m}\simeq4.2\times10^7\mathrm{m}$$

Domanda 2 Prima di applicare l'impulso l'energia vale

$$E=\frac{L^2}{2mR^2}-\frac{k}{R}$$

dato che l'orbita è circolare. Inoltre sappiamo che il potenziale effettivo è minimo,

$$\frac{d}{dR}\left(\frac{L^2}{2mR^2}-\frac{k}{R}\right)=-\frac{L^2}{mR^3}+\frac{k}{R^2}=0$$

da cui

$$L^2=kmR$$

Applicando l'impulso cambiamo il momento angolare di $\Delta L=IR$. Dato che la velocità radiale resta nulla la nuova energia vale

$$E'=\frac{(L+IR)^2}{2mR^2}-\frac{k}{R}$$

e per avere un'orbita parabolica deve essere $E'=0$. Quindi (supponendo $L>0$) otteniamo

$$\left(\sqrt{kmR}+IR\right)^2=2kmR$$

da cui

$$I=-\left(1\pm\sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$$

Si può quindi applicare l'impulso con lo stesso verso della velocità

$$I = \left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$$

oppure in verso opposto

$$I = -\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$$

Domanda 3 Applicando il primo impulso si ottiene un'orbita ellittica che deve avere il perigeo in R e l'apogeo in $2R$. Per ottenere questo l'equazione

$$E_1 = \frac{\left(L+I_1R\right)^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

deve essere verificata in $r = R$ e $r = 2R$, ossia

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\left(L+I_1R\right)^2}{2mR^2} - \frac{k}{R} \\ E_1 &= \frac{\left(L+I_1R\right)^2}{8mR^2} - \frac{k}{2R} \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro troviamo

$$\frac{3}{8}\frac{\left(L+I_1R\right)^2}{mR^2} - \frac{k}{2R} = 0$$

da cui

$$I_1 = -\left(1 \pm \sqrt{\frac{4}{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$$

Il secondo impulso deve essere applicato all'apogeo, in modo da ottenere un'orbita circolare di raggio $2R$ e quindi un momento angolare

$$L' = \pm\sqrt{2kmR}$$

Se vogliamo $L' > 0$ abbiamo dunque le due possibilità determinate da

$$L + RI_1 + 2RI_2 = \sqrt{2kmR}$$

ossia

$$I_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\sqrt{\frac{km}{R}}$$

mentre se $L' < 0$ (l'orbita circolare finale è percorsa nel verso opposto di quella iniziale) deve essere

$$L + RI_1 + 2RI_2 = -\sqrt{2kmR}$$

e quindi

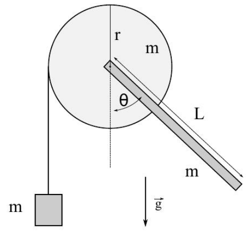
$$I_2 = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\sqrt{\frac{km}{R}}$$

Riassumendo abbiamo le quattro possibilità in tabella

I_1	I_2
$-\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$
$-\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$
$-\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$
$-\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{km}{R}}$

6.4. 18 aprile 2012

Problema 1 (15 punti)



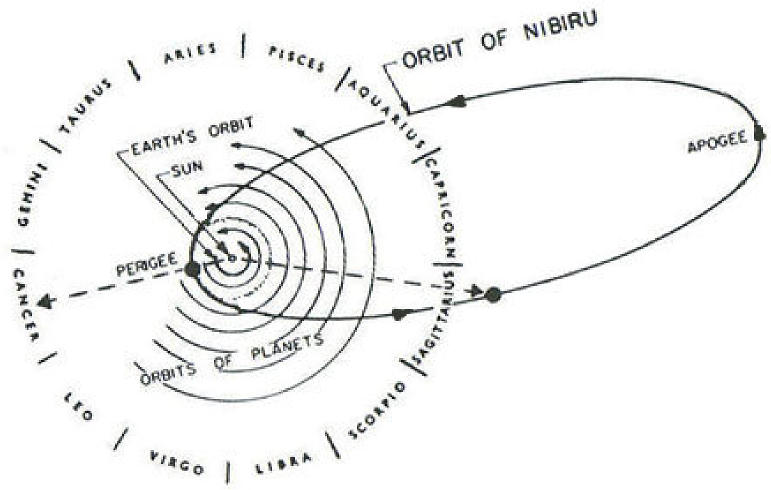
Un'asta omogenea di lunghezza L, massa m e spessore trascurabile è rigidamente connessa ad un disco di raggio r e massa m, come in figura. Il disco è vincolato a ruotare attorno ad un perno fisso passante per il suo centro. Uno degli estremi dell'asta coincide con il centro del disco. Attorno al disco è avvolto un filo inestensibile di massa trascurabile, che scorre sul bordo senza strisciare. All'estremità inferiore del filo è sospeso un corpo puntiforme di massa m. Tutti e tre i corpi hanno la stessa massa. Il tutto è immerso in un campo gravitazionale uniforme di intensità g diretto verso il basso.

1. Assumendo che la sbarra sia inizialmente ferma formando un angolo θ_0 noto con la verticale, determinare quali condizioni devono soddisfare i parametri del sistema (m, L e r) affinchè la massa sospesa al filo acceleri verso il basso.

2. Trovare eventuali posizioni di equilibrio stabile del sistema, determinando che condizioni devono essere soddisfatte dai parametri affinchè esistano.

3. Nell'ipotesi che una posizione di equilibrio stabile esista, determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno a questa.

Problema 2 (15 punti)



Secondo una teoria accreditata da un grandissimo numero di pagine web ogni 3600 anni il pianeta Nibiru arriva con la sua orbita in prossimità della terra. Il prossimo avvicinamento è previsto da alcuni attorno al primo aprile del 2013. Nel seguito si considereranno solo le interazioni gravitazionali tra la terra e il sole e tra Nibiru e il sole, per semplicità si considererà la massa di Nibiru uguale a quella della terra, e l'orbita di quest'ultima circolare e di raggio $a_T \simeq 1.5 \times 10^{11}$m. Inoltre si supporrà che il perielio di Nibiru e quello della terra coincidano, che le orbite siano nello stesso piano e percorse nello stesso senso.

1. Sulla base dei dati precedenti calcolate il rapporto tra l'afelio di Nibiru e la distanza terra-sole.
2. Modellando l'eventuale scontro tra la terra e Nibiru come un'urto istantaneo completamente anelastico al perielio calcolare la frazione di energia cinetica dissipata durante l'urto.
3. Determinare l'afelio dell'unico pianeta risultante.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Il disco ruota soggetto ai momenti di due forze, calcolati rispetto al centro del disco: la forza peso dell'asta e la tensione della fune:

$$I\dot{\omega} = -\frac{L}{2}mg\sin\theta + rT \tag{6.4.1}$$

dove I è il momento di inerzia del sistema calcolato rispetto al perno del disco. Per ora non serve calcolarlo. Abbiamo preso come verso positivo per ω quello che determina una rotazione in senso anti-orario. Il moto del corpo appeso al filo è determinato dall'equazione

$$m\ddot{z} = -mg + T \tag{6.4.2}$$

dove z è crescente verso l'alto. Il fatto che la fune non strisci sul disco dà il vincolo:

$$\ddot{z} = -r\dot{\omega} \tag{6.4.3}$$

Sostituendo nell'Equazione (6.4.1) e ricavando T dalla (6.4.2) si ottiene

$$\ddot{z} = mg\frac{\frac{L}{2}\sin\theta - r}{\frac{I}{r} + mr} \tag{6.4.4}$$

Il corpo accelera verso il basso se $\ddot{z} < 0$, ovvero se

$$L < \frac{2r}{\sin\theta} \tag{6.4.5}$$

Domanda 2

Per trovare le posizioni di equilibrio si scrive l'energia potenziale del sistema e si cercano i minimi. L'energia potenziale ha solamente contributi gravitazionali:

$$U = mgz - mg\frac{L}{2}\cos\theta = -mgr\theta - mg\frac{L}{2}\cos\theta = -mg\left(r\theta + \frac{L}{2}\cos\theta\right) \tag{6.4.6}$$

dove si è usata la relazione di rotolamento della corda ($r\dot{\theta} = -\dot{z}$) e si è omessa una costante irrilevante. Otteniamo la derivata

$$\frac{dU}{d\theta} = mg\left(-r + \frac{L}{2}\sin\theta\right) \tag{6.4.7}$$

che si annulla quando

$$\sin\theta = \frac{2r}{L} \tag{6.4.8}$$

Esiste soluzione solamente se $2r/L < 1$ ovvero $L > 2r$. In questo caso esistono due angoli che danno lo stesso seno, uno compreso tra 0 e $\pi/2$ e l'altro compreso tra $\pi/2$ e π. Per vedere quali posizioni sono di equilibrio stabile, serve la derivata seconda

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = mg\frac{L}{2}\cos\theta \tag{6.4.9}$$

che è positiva (equilibrio stabile) per $0 < \theta_{eq} < \pi/2$ e negativa (equilibrio instabile) per $\pi/2 < \theta_{eq} < \pi$.

Domanda 3

La frequenza delle piccole oscillazioni si trova ponendo $\theta = \theta_{eq} + \delta$ nell'espressione dell'energia

$$E = \frac{m}{2}\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mg\left[r\theta + \frac{L}{2}\cos\theta\right] \tag{6.4.10}$$

Sviluppando al secondo ordine si trova

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\left(mr^2+I\right)\dot{\delta}^2 - mg\left[r\left(\theta_{eq}+\delta\right)+\frac{L}{2}\cos\left(\theta_{eq}+\delta\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(mr^2+I\right)\dot{\delta}^2 - mg\left[r\left(\theta_{eq}+\delta\right)+\frac{L}{2}\cos\theta_{eq}-\frac{L}{2}\delta\sin\theta_{eq}-\frac{1}{2}\frac{L}{2}\delta^2\cos\theta_{eq}\right]+O(\delta^2) \\
&= \frac{1}{2}\left(mr^2+I\right)\dot{\delta}^2 + \frac{1}{2}mg\frac{L}{2}\delta^2\cos\theta_{eq} + \text{costante} + O(\delta^2) \qquad (6.4.11)
\end{aligned}$$

Il momento d'inerzia rispetto al perno è dato dalla somma dei contributi del disco e dell'asta (che si ottiene usando il teorema di Koenig):

$$I = \frac{1}{2}mr^2 + \left[\frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right] = m\left(\frac{r^2}{2}+\frac{L^2}{3}\right) \tag{6.4.12}$$

La pulsazione delle piccole oscillazioni è data infine da

$$\begin{aligned}
\Omega^2 &= \frac{\frac{L}{2}\cos\theta_{eq}}{I+mr^2} = \frac{mg\frac{L}{2}\sqrt{1-\sin^2\theta_{eq}}}{m\left(\frac{3}{2}r^2+\frac{1}{3}L^2\right)} \\
&= \frac{g\frac{L}{2}\sqrt{1-\frac{4r^2}{L^2}}}{\left(\frac{3}{2}r^2+\frac{1}{3}L^2\right)} = \frac{g\sqrt{\frac{L^2}{4}-r^2}}{\left(\frac{3}{2}r^2+\frac{1}{3}L^2\right)} \qquad (6.4.13)
\end{aligned}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Conosciamo il periodo T dell'orbita e il perielio. Dalla terza legge di Keplero sappiamo che

$$\frac{T_N^2}{a_N^3} = \frac{T_T^2}{a_T^3}$$

dove a è il semiasse maggiore. Quindi

$$a_N = \left(\frac{T_N}{T_T}\right)^{2/3} a_T \simeq 234.9\, a_T$$

Indicati con r_- e r_+ il perielio e l'afelio dell'orbita abbiamo

$$r_+ + r_- = 2a$$

e quindi

$$r_+ = 2a_N - a_T \simeq 468.9\, a_T$$

Domanda 2

Al momento dell'urto le velocità radiali sono entrambe nulle, e si conserva il momento angolare totale (o anche la quantità di moto nella direzione tangente all'orbita, che è proporzionale a quest'ultimo). Quindi

$$L_f = L_T + L_N$$

L'energia cinetica immediatamente prima dell'urto è

$$E_i = \frac{L_T^2 + L_N^2}{2m_T a_T^2}$$

e immediatamente dopo l'urto

$$E_f = \frac{(L_T + L_N)^2}{4m_T a_T^2}$$

quindi si è dissipata un'energia

$$\Delta E = \frac{2L_T^2 + 2L_N^2 - (L_T + L_N)^2}{4m_T a_T^2} = \frac{(L_T - L_N)^2}{4m_T a_T^2}$$

e quindi

$$\frac{\Delta E}{E_i} = \frac{1}{2}\frac{(L_T - L_N)^2}{L_T^2 + L_N^2} = \frac{1}{2}\frac{(L_T - L_N)^2}{L_T^2 + L_N^2} = \frac{1}{2}\frac{(1-\rho)^2}{1+\rho^2}$$

dove abbiamo indicato con ρ il rapporto

$$\rho = \frac{L_T}{L_N}$$

Dato che (indicando con M_S la massa del sole)

$$\begin{aligned} E &= \frac{L^2}{2m_T r_-^2} - \frac{Gm_T M_S}{r_-} \\ E &= \frac{L^2}{2m_T r_+^2} - \frac{Gm_T M_S}{r_+} \end{aligned}$$

abbiamo

$$L = \sqrt{2GM_S m_T^2 \left(\frac{r_+ r_-}{r_+ + r_-}\right)}$$

e quindi

$$\rho = \frac{\sqrt{GM_S m_T^2 a_T}}{\sqrt{2GM_S m_T^2 \frac{a_T r_+}{r_+ + a_T}}} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{(a_T + r_+)}{r_+}} \simeq \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1+468.9}{468.9}} \simeq 0.7$$

Sostituendo otteniamo

$$\frac{\Delta E}{E_i} = \frac{1}{2}\frac{(1-0.7)^2}{1+(0.7)^2} \simeq 0.03$$

Domanda 3

L'orbita dopo l'urto è definita dal valore delle due costanti del moto, l'energia

$$E = \frac{(L_T + L_N)^2}{4m_T a_T^2} - \frac{2Gm_T M_S}{a_T}$$

e il momento angolare

$$L = L_T + L_N$$

Il perielio e l'afelio sono soluzioni dell'equazione

$$\frac{L^2}{4m_T r^2} - \frac{2Gm_T M_S}{r} - E = \frac{L^2}{4m_T}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_-}\right) = 0$$

e quindi, dato che una delle due soluzioni concide com a_T, possiamo scrivere per l'altra

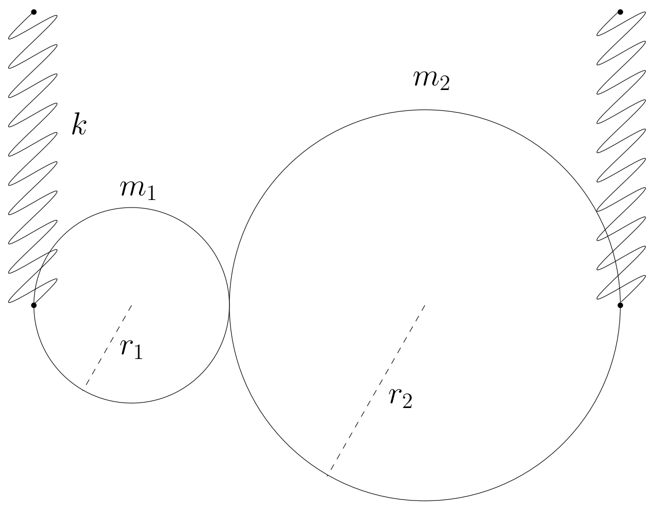
$$\frac{L^2}{4m_T}\frac{1}{r}\frac{1}{a_T} = -E$$

cioè

$$\begin{aligned} r &= -\frac{L^2}{4m_T a_T E} = \frac{(L_T+L_N)^2}{\left[8Gm_T^2 M_S a_T - (L_T+L_N)^2\right]} a_T \\ &= \frac{(L_T+L_N)^2}{\left[8L_T^2 - (L_T+L_N)^2\right]} a_T = \frac{(L_T+L_N)^2}{7L_T^2 - 2L_N L_T - L_N^2} a_T \\ &= \frac{(1+\rho)^2}{7\rho^2 - 2\rho - 1} a_T \simeq 2.7 a_T \end{aligned}$$

6.5. 20 marzo 2013

Problema 1 (15 punti)



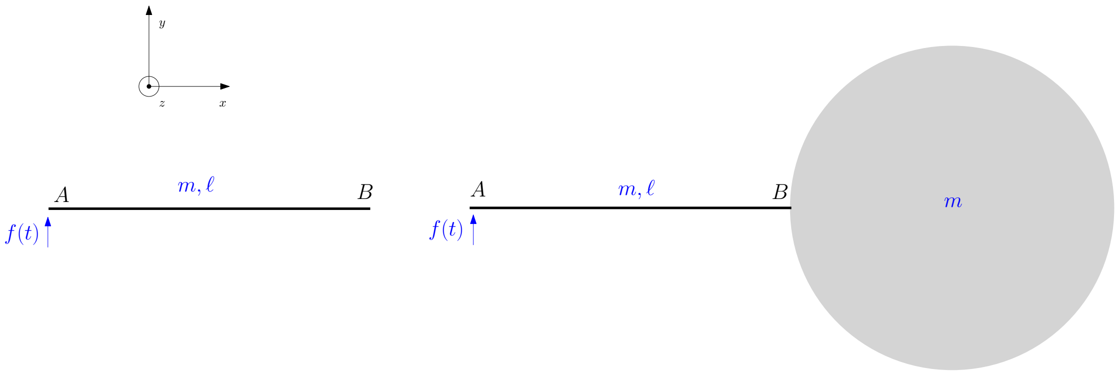
Siano due dischi di massa m_1 e m_2 e rispettivi raggi r_1, $r_2 > r_1$. I dischi sono nel medesimo piano, sono a contatto tra loro e ruotano senza strisciare l'uno rispetto all'altro attorno al rispettivo centro. Alla periferia di ciascun disco vi è una molla in direzione della tangente collegata a un punto fisso con costante elastica k. Ciascuna molla è a riposo nella configurazione iniziale mostrata in figura.

1. Si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni del sistema.

2. Sul disco più piccolo agisce ora un momento di attrito viscoso $M_v = -\gamma\omega_1$, dove ω_1 è la velocità angolare del disco più piccolo. Si stimi il tempo τ_1 necessario affinché l'energia del sistema messo in moto diminuisca di un fattore 2, assumendo che l'approssimazione di piccole oscillazioni sia valida e che per il fattore di qualità dell'oscillatore valga $Q \gg 1$.

3. Sempre supponendo di rimanere in regime di piccole oscillazioni si applica ora sempre sul disco più piccolo un momento periodico $N(t) = N_0 \cos \Omega t$. Quali saranno le ampiezze angolari di oscillazione dei due dischi a regime?

Problema 2 (15 punti)



Una sbarra omogenea di massa m, lunghezza ℓ e dimensioni trasversali trascurabili è colpita perpendicolarmente a una estremità A da una forza tale che

$$\int f(t)\mathrm{d}t = I_F$$

con I_F dato. Si consiglia di utilizzare un sistema di riferimento con assi orientati come in figura, e origine nel centro di massa del sistema.

1. Determinare il moto del centro di massa e dell'estremità opposta B della sbarra dopo il colpo.

2. Alla sbarra viene saldato un disco di uguale massa e raggio $\ell/2$. Come si muove adesso l'estremo B della sbarra e il centro di massa del sistema?

3. Dove è possibile colpire il sistema sbarra+disco, sempre nella direzione perpendicolare alla sbarra, per evitare che una parte di esso si muova in direzione opposta?

Soluzione primo problema

Prima domanda

Indicando con θ_1, θ_2 gli angoli di cui ruotano i due dischi rispetto alla posizione di equilibrio abbiamo per il puro rotolamento

$$\theta_1 r_1 = -\theta_2 r_2$$

Le equazioni cardinali per i due dischi sono

$$\begin{aligned} I_1\ddot{\theta}_1 &= M_1 + F r_1 \\ I_2\ddot{\theta}_2 &= M_2 + F r_2 \end{aligned}$$

dove F è la componente tangenziale della forza di contatto che il disco 2 esercita sul disco 1, uguale e opposta a quelle che il disco 1 esercita sul disco 2. Abbiamo indicato con M_1 e con M_2 i momenti applicati esternamente sul sistema. Moltiplicando la prima equazione per r_2, la seconda per r_1 e sottraendo membro a membro otteniamo

$$I_1 r_2 \ddot{\theta}_1 - I_2 r_1 \ddot{\theta}_2 = r_2 M_1 - r_1 M_2$$

e utilizzando il vincolo di puro rotolamento abbiamo

$$\left(I_1 r_2 + I_2 \frac{r_1^2}{r_2}\right) \ddot{\theta}_1 = r_2 M_1 - r_1 M_2 \tag{6.5.1}$$

Per quanto riguarda i momenti abbiamo $M_1 = -k r_1^2 \theta_1$ e $M_2 = -k r_2^2 \theta_2 = k r_1 r_2 \theta_1$, quindi

$$\left(I_1 + I_2 \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) r_2 \ddot{\theta}_1 = -2k r_1^2 r_2 \theta_1$$

La frequenza delle piccole oscillazioni è dunque

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k r_1^2}{\left(I_1 + I_2 \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)}}$$

ossia, sostituendo i momenti di inerzia,

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4k}{(m_1 + m_2)}}$$

Seconda domanda

Aggiungendo il momento di attrito viscoso possiamo sostituire nella (6.5.1) $M_1 = -k_1 r_1^2 \theta_1 - \gamma \dot{\theta}_1$ e $M_2 = k r_1 r_2 \theta_1$, ottenendo

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) r_1^2 r_2 \ddot{\theta}_1 = -\gamma r_2 \dot{\theta}_1 - 2k r_1^2 r_2 \theta_1 \tag{6.5.2}$$

ossia

$$\ddot{\theta}_1 + \Gamma \dot{\theta}_1 + \omega_0^2 \theta_1 = 0$$

con

$$\Gamma = \frac{2\gamma}{(m_1 + m_2) r_1^2}$$

Il fattore di qualità dell'oscillatore è dunque

$$Q = \frac{\omega_0}{\Gamma}$$

e dato che

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}$$

dove ΔE è l'energia dissipata in un periodo abbiamo che dopo n oscillazioni

$$E_n = \left[1 - \left(\frac{2\pi}{Q}\right)\right]^n E_0 \simeq e^{-\frac{2\pi n}{Q}} E_0$$

ossia

$$E(t) \simeq E(0) e^{-\frac{\omega_0}{Q} t}$$

Di conseguenza deve essere

$$e^{-\frac{\omega_0}{Q}\tau_1} = e^{-\log 2}$$

cioè

$$\tau_1 = \frac{Q}{\omega_0} \log 2$$

Terza domanda

In questo caso $M_1 = -k_1 r_1^2 \theta_1 - \gamma \dot{\theta}_1 + N_0 \cos \Omega t$ e $M_2 = k r_1 r_2 \theta_1$. La (6.5.1) diviene quindi

$$\left(I_1 r_2 + I_2 \frac{r_1^2}{r_2}\right) \ddot{\theta}_1 = -2k r_1^2 r_2 \theta_1 - \gamma r_2 \dot{\theta}_1 + r_2 N_0 \cos \Omega t \tag{6.5.3}$$

ossia

$$\ddot{\theta}_1 + \Gamma \dot{\theta}_1 + \omega_0^2 \theta_1 = A \cos \Omega t$$

con

$$A = \frac{2N_0}{r_1^2 (m_1 + m_2)}$$

La soluzione a regime è

$$\theta_1(t) = \mathrm{Re} \frac{A e^{i\Omega t}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\Gamma\Omega}$$

cioè un'oscillazione angolare di ampiezza

$$\mathcal{A}_1 = \frac{A}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$$

L'ampiezza angolare per l'oscillazione del secondo disco sarà, dalla condizione di puro rotolamento,

$$\mathcal{A}_2 = \frac{r_2}{r_1} \mathcal{A}_1$$

Soluzione secondo problema

Prima domanda

Dalle equazioni cardinale otteniamo dopo l'urto

$$
\begin{aligned}
m\vec{v}_{cm} &= I_F \hat{y} \\
\frac{1}{12} m\ell^2 \vec{\omega} &= -\frac{\ell}{2} I_F \hat{z}
\end{aligned}
$$

La prima equazione da direttamente la velocità del centro di massa,

$$\vec{v}_{cm} = \frac{I_F}{m}\hat{y}$$

$$\vec{\omega} = -\frac{6I_F}{m\ell}\hat{z}$$

Per la velocità di B abbiamo

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_B &= \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{\ell}{2}\hat{x}\right) \\
&= \frac{I_F}{m}\hat{y} - \frac{3I_F}{m}\hat{z} \wedge \hat{x} \\
&= -\frac{2I_F}{m}\hat{y}
\end{aligned}
$$

Seconda domanda

In questo caso abbiamo

$$2m\vec{v}_{cm} = I_F \hat{y}$$

e quindi

$$\vec{v}_{cm} = \vec{v}_B = \frac{I_F}{2m}\hat{y}$$

dato che il punto B coincide con il centro di massa.

Terza domanda

La seconda equazione cardinale da in questo caso

$$\left(\frac{1}{3}m\ell^2 + \frac{3}{8}m\ell^2\right)\vec{\omega} = xI_F\hat{z}$$

dove x è la posizione del punto in cui viene colpita la sbarra rispetto al centro di massa B. La velocità di un punto di coordinate X, Y appartenente al corpo sarà

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \wedge (X\hat{x} + Y\hat{y}) \\ &= \frac{I_F}{2m}\hat{y} + \frac{24}{17}\frac{xI_F}{m\ell^2}(X\hat{y} - Y\hat{x})\end{aligned}$$

Per non andare all'indietro dovrà essere

$$v_y = \frac{I_F}{2m} + \frac{24}{17}\frac{xI_F}{m\ell^2}X \geq 0$$

se $x \leq 0$ il caso più sfavorevole si ha per $X = \ell$, ossia

$$\frac{1}{2} + \frac{24}{17}\frac{x}{\ell} \geq 0$$

da cui

$$x \geq -\frac{17}{48}\ell$$

Invece per $x \geq 0$ il caso più sfavorevole è $X = -\ell$. In conclusione deve essere

$$\frac{17}{48}\ell \geq x \geq -\frac{17}{48}\ell$$

6.6. 19 febbraio 2014

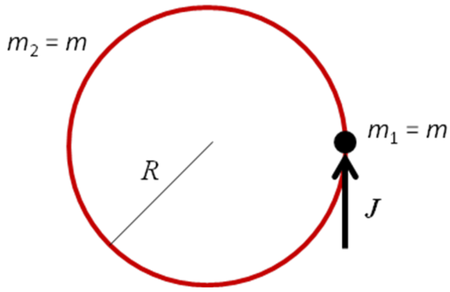


Figura 6.1.: La perla e l'anello considerati nell'esercizio.

Un sistema è costituito da una perla di massa m_1 infilata in un anello omogeneo di raggio R e massa $m_2 = m_1 = m$. Il sistema è appoggiato su un piano orizzontale senza attrito (che coincide col piano dell'anello). Inizialmente il sistema è fermo in un riferimento inerziale solidale col piano di appoggio. Con un colpo secco si impartisce alla perla un impulso J con direzione tangente all'anello.

1. Nell'ipotesi che la perla sia saldata all'anello,
   a) trovare la velocità del centro di massa G del sistema subito dopo l'urto;
   b) calcolare il momento di inerzia del sistema relativo a G, e la distanza di G dal centro dell'anello;
   c) determinare il moto del sistema anello+perla nel riferimento che trasla con il centro di massa.
2. Nell'ipotesi che la perla possa scorrere lungo l'anello con attrito radente con coefficiente d'attrito dinamico μ uguale a quello di attrito statico,
   a) trovare la velocità del centro di massa G del sistema subito dopo l'urto;
   b) trovare la velocità del centro dell'anello e della perlina subito dopo l'urto, sia nel sistema di laboratorio che in quello del centro di massa;
   c) trovare la velocità angolare con la quale l'anello ruota attorno al suo centro subito dopo l'urto;
   d) determinare nel centro di massa la velocità a regime del centro dell'anello, della perlina e la velocità angolare dell'anello attorno al suo centro;
   e) detta F_T la forza tangente all'anello che quest'ultimo esercita sulla perla, e F_N l'analoga forza normale, calcolare il rapporto F_T/F_N.
   f) **************************

Soluzione

1.a

Dato che l'impulso trasferito al sistema è uguale alla variazione della sua quantità di moto abbiamo

$$(m_1 + m_2)\, \boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{J}$$

e quindi

$$\boldsymbol{v}_G = \frac{\boldsymbol{J}}{2m}$$

1.b

Ponendo il centro dell'anello nell'origine e la perla sull'asse x ($x > 0$) abbiamo

$$x_G = \frac{0m_2 + Rm_1}{m_1 + m_2} = \frac{R}{2}$$

Questa è anche la distanza cercata. Per calcolare il momento di inerzia sommiamo il contributo dell'anello a quello della perla,

$$I_G = \left[I_{anello} + m_2 \left(\frac{R}{2}\right)^2\right] + \left[I_{perla} + m_1 \left(\frac{R}{2}\right)^2\right]$$

dove $I_{anello} = m_2 R^2$ e $I_{perla} = 0$ sono i momenti di inerzia dei due corpi rispetto al loro centro di massa e si è utilizzato il teorema di Steiner. In conclusione

$$I_G = \left[m_2 R^2 + m_2 \frac{R^2}{4}\right] + \left[m_1 \frac{R^2}{4}\right] = \frac{3}{2} m R^2$$

1.c

Il sistema è un unico corpo rigido. Dato che dopo l'urto non ci sono forze e momenti esterni si conserva sia la quantità di moto totale che il momento angolare. Quindi il centro di massa si muove a velocità costante ed il sistema di riferimento che trasla con esso è inerziale.

Il momento angolare del corpo nel sistema del laboratorio dopo l'urto è uguale all'impulso angolare di $\boldsymbol{J}$. Scegliendo il polo nel centro di massa abbiamo

$$\boldsymbol{L} = I_G \boldsymbol{\omega} = \left(\frac{R}{2}\boldsymbol{e}_x\right) \wedge \boldsymbol{J} = \frac{RJ}{2}\boldsymbol{e}_z$$

e quindi

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{RJ}{2I_G}\boldsymbol{e}_z = \frac{J}{3mR}\boldsymbol{e}_z$$

Nel sistema del centro di massa il corpo ruoterà attorno ad esso con questa velocità angolare.

2.a

Valgono le stesse considerazioni fatte al punto 1.a, quindi

$$\boldsymbol{v}_G = \frac{\boldsymbol{J}}{2m}$$

2.b

Consideriamo prima di tutto il sistema del laboratorio. Durante l'urto $\boldsymbol{J}$ è applicato alla perla, ed è l'unica forza impulsiva. Quindi la perla avrà dopo l'urto una velocità

$$\boldsymbol{v}_P = \frac{\boldsymbol{J}}{m}$$

Sull'anello non è applicata invece nessuna forza impulsiva, quindi immediatamente dopo l'urto la velocità del suo centro sarà

$$\boldsymbol{v}_A = 0$$

Dato che il centro di massa si muove con la velocità precedentemente determinata, avremo in un sistema di riferimento che trasla con esso

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}'_P &= \boldsymbol{v}_P - \frac{\boldsymbol{J}}{2m} = \frac{\boldsymbol{J}}{2m} \\
\boldsymbol{v}'_A &= 0 - \frac{\boldsymbol{J}}{2m} = -\frac{\boldsymbol{J}}{2m}
\end{aligned}$$

2.c

Dato che nessun impulso angolare è applicato all'anello durante l'urto avremo

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' = 0$$

2.d

Nel sistema del centro di massa abbiamo la situazione in Figura 6.2.

In ogni istante il centro del disco e la perla si trovano in posizioni opposte relativamente al centro di massa, e compiono un moto circolare con velocità rispettivamente

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_P &= \frac{R}{2}\dot{\theta}\boldsymbol{\tau} \\
\boldsymbol{v}_A &= -\boldsymbol{v}_P
\end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{\tau}$ è il versore tangente all'anello nel punto in cui si trova la perla.

Al tempo stesso l'anello ruota su se stesso con velocità angolare ω. La velocità dell'anello nel punto a contatto con la perla sarà

$$\boldsymbol{v}_o = -\frac{R}{2}\dot{\theta}\boldsymbol{\tau} + \omega R\boldsymbol{\tau}$$

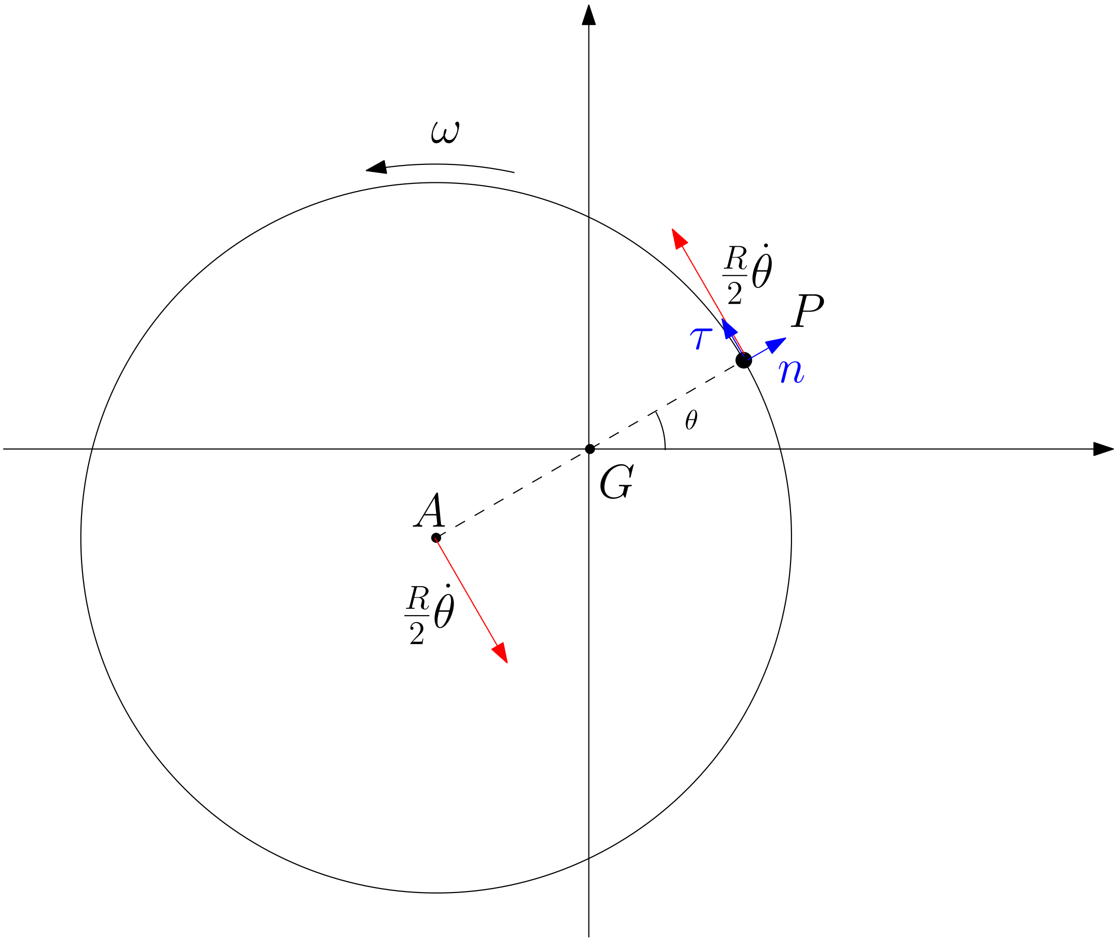


Figura 6.2.: Il sistema in rotazione.

Fino a quando la velocità relativa tra anello e perla è diversa da zero l'attrito dissiperà energia. A regime dovremo avere perciò $\boldsymbol{v}_o = \boldsymbol{v}_P$ ossia

$$\dot{\theta} = \omega$$

Il sistema sarà equivalente quindi all'unico corpo rigido considerato nella prima parte del problema, e quindi

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{J}{3mR} \\
\boldsymbol{v}_A &= -\frac{R}{2}\dot{\theta}\boldsymbol{\tau} = -\frac{J}{6m}\boldsymbol{\tau} \\
\boldsymbol{v}_P &= \frac{J}{6m}\boldsymbol{\tau}
\end{aligned} \tag{6.6.1}$$

Alternativamente si poteva dire subito che, a regime, il sistema si muove come un unico corpo rigido. Quindi la velocità di P è data semplicemente, in qualsiasi sistema di riferimento, da

$$\boldsymbol{v}_P - \boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{G})$$

Nel centro di massa $\boldsymbol{v}_G = 0$, e $\boldsymbol{v}_A$ segue di conseguenza.

2.e

Dato che il centro di massa dell'anello si muove di moto circolare, la forza totale su di esso lungo la direzione radiale indicata dal versore $\boldsymbol{n}$ in Figura 6.2 sarà

$$\boldsymbol{F}_N = m\frac{v_A^2}{R/2}\boldsymbol{n}$$

Se la velocità relativa tra perla e anello è diversa da zero, avremo anche la forza di attrito dinamico

$$\boldsymbol{F}_T = \mu_d m\frac{v_A^2}{R/2}\boldsymbol{\tau} = \mu_d m\frac{R}{2}\dot{\theta}^2\boldsymbol{\tau}$$

dove abbiamo supposto la velocità dell'anello nel punto di contatto in direzione $\boldsymbol{\tau}$ minore di quella della perla. Il rapporto richiesto è in questo caso

$$\frac{F_T}{F_N} = \mu_d$$

A regime la velocità relativa tra perla e anello è zero. Come prima

$$\boldsymbol{F}_N = m\frac{v_A^2}{R/2}\boldsymbol{n}$$

ma dato che l'accelerazione tangenziale deve essere nulla sarà

$$\boldsymbol{F}_T = 0$$

ovviamente compatibile con la condizione

$$|\boldsymbol{F}_T| \leq \mu_s |\boldsymbol{F}_N|$$

Quindi in questo caso

$$\frac{F_T}{F_N} = 0$$

2.f

Scriviamo le equazioni del moto. Per il moto del centro dell'anello nella direzione $\boldsymbol{\tau}$ abbiamo durante il transiente

$$-m\frac{R}{2}\ddot{\theta} = \mu_d m\frac{R}{2}\dot{\theta}^2$$

e quindi

$$\ddot{\theta} = -\mu_d \dot{\theta}^2$$

Inoltre il momento angolare totale del sistema si conserva, e quindi

$$\left[m\frac{R^2}{4}\dot{\theta}\right] + \left[m\frac{R^2}{4}\dot{\theta}\right] + \left[mR^2\omega\right] = \frac{JR}{2}$$

I primi due termini sono rispettivamente il momento angolare della perla e del centro di massa dell'anello. L'ultimo è il momento angolare dell'anello rispetto al suo centro di massa. Troviamo quindi

$$\omega = \frac{J}{2mR} - \frac{1}{2}\dot{\theta} \tag{6.6.2}$$

Integriamo l'equazione del moto: ponendo $\dot{\theta} = \varpi$ abbiamo

$$\int \frac{d\varpi}{\varpi^2} = -\int \mu_d dt$$

cioè

$$\frac{1}{\varpi(t)} = \frac{1}{\varpi(0)} + \mu_d t$$

ossia, tenendo conto che $\varpi(0) = \dot{\theta}(0) = J/(mR)$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\frac{J}{mR}}{1 + \frac{J}{mR}\mu_d t}$$

e per la velocità angolare dell'anello quindi vale, usando l'Equazione (6.6.2)

$$\omega = \frac{J}{2mR}\left(\frac{\frac{J}{mR}\mu_d t}{1 + \frac{J}{mR}\mu_d t}\right)$$

Si può osservare che, al crescere di t, a causa dell'attrito la velocità angolare dell'anello $\omega(t)$ aumenta, mentre diminuisce quella del corpo $\dot{\theta}(t)$. Il transiente termina quando $\dot{\theta} = \omega$, cioè quando

$$1 = \frac{J}{2mR}\mu_d t$$

ossia

$$t = \frac{2mR}{J\mu_d}$$

Sostituendo troviamo

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{J}{3mR}$$

in accordo con quanto determinato al punto 2.d (Equazione (6.6.1)).

6.7. 21 marzo 2015

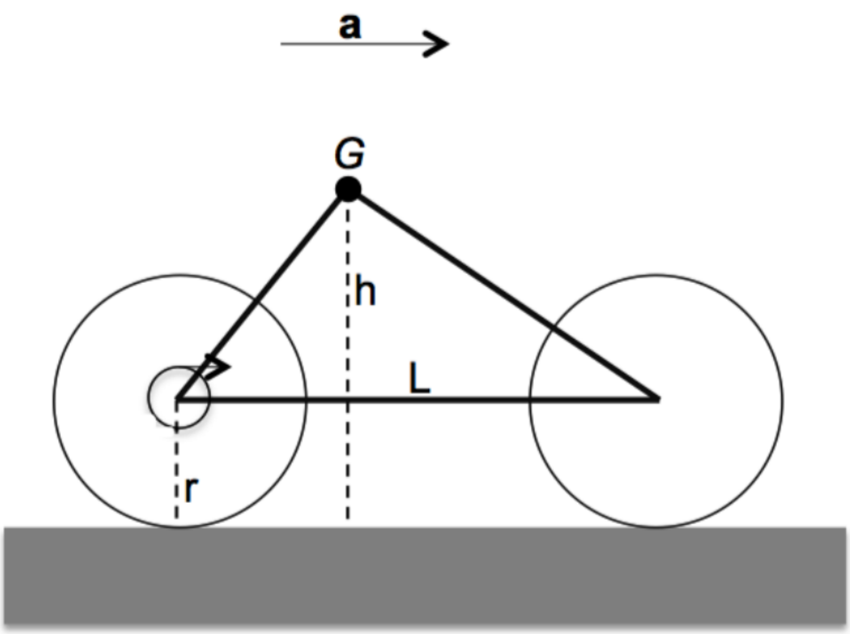


Figura 6.3.: Il modello di motocicletta considerato nel problema.

Un motociclista parte con la sua motocicletta, su una strada rettilinea e pianeggiante, con una accelerazione costante di modulo a, senza provocare impennate e senza causare slittamenti delle ruote. Si consideri il motociclista e la motocicletta, tranne le ruote, come un unico corpo rigido di massa M e centro di massa nel punto G posto ad una altezza h dal suolo. Il segmento che congiunge i centri delle due ruote è lungo L; la verticale passante per G lo divide in due parti di cui quella anteriore è doppia di quella posteriore. Le due ruote hanno ugual raggio r e massa m concentrata sul bordo.

Dati numerici: $a = 5\text{ms}^{-2}$ ($0 - 100$km/h in 5.6s), $M = 246$kg, $m = 2$kg, $h = 75$cm, $L = 130$cm, $r = 30$cm.

Determinare:

1. le forze di attrito radente che il manto stradale esercita sulle ruote;
2. il momento delle forze che il motore esercita (per mezzo della catena) sulla ruota posteriore, rispetto al centro di questa;
3. le forze normali (verticali) che il manto stradale esercita sulle ruote;
4. l'accelerazione massima consentita perché la motocicletta non si impenni;

5. quali limiti devono rispettare i coefficienti d'attrito affinché la motocicletta possa arrivare a impennarsi;

6. se le forze che trasferiscono quantità di moto e quelle che trasferiscono energia (cinetica) alla motocicletta siano interne o esterne e la potenza complessiva che esse forniscono;

7. le forze che il telaio esercita sugli assi delle ruote;

Facoltativamente si diano i valori numerici delle grandezze fisiche richieste nelle domande precedenti.

Soluzione

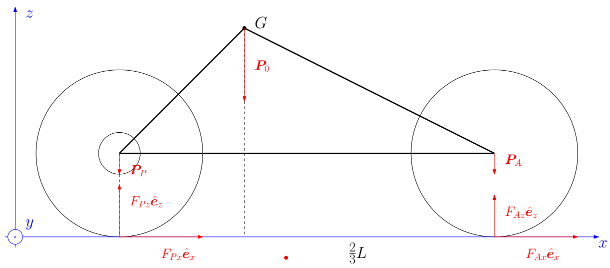


Figura 6.4.: Le forze esterne (in rosso) che agiscono sulla bicicletta.

Scegliamo come sistema di riferimento (inerziale) quello solidale alla strada e, come sistema di coordinate cartesiane, uno che abbia l'asse x orizzontale con la stessa direzione e verso del moto della motocicletta, l'asse y perpendicolare al piano della figura e verso entrante e l'asse z verticale e rivolto verso l'alto. Siano inoltre $\boldsymbol{F}_P$ e $\boldsymbol{F}_A$ le forze (esterne) esercitate dal manto stradale rispettivamente sulla ruota posteriore e su quella anteriore (Figura 6.4). Le componenti F_{Px} e F_{Ax} corrispondono alle forze di attrito, mentre le componenti F_{Pz} e F_{Az} costituiscono le forze vincolari normali.

Un'altra, e ultima, forza esterna alla motocicletta è la forza peso $\boldsymbol{P} = -(M + 2m)\, g\hat{\boldsymbol{e}}_z$ data dalla somma del peso $\boldsymbol{P}_0$ di M, e di quello $\boldsymbol{P}_A$ e $\boldsymbol{P}_P$ della ruota anteriore e posteriore.

La prima equazione cardinale della dinamica applicata all'intera motocicletta è:

$$\boldsymbol{F}_P + \boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{P} = (M + 2m)\, \boldsymbol{a} \tag{6.7.1}$$

dove $\boldsymbol{a} = a\hat{\boldsymbol{e}}_x$ è l'accelerazione del suo centro di massa G, coincidente con quella di G e di ciascuno dei centri delle ruote.

Nel seguito prenderemo spesso in considerazione separatamente le due ruote e il corpo rigido M di massa M costituito dal motociclista e dalla motocicletta senza le ruote.

Se le ruote non slittano, le reazioni tra le loro velocità angolari $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{e}}_y$ le velocità lineari $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{e}}_x$ dei loro centri sono date da

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge (r\hat{\boldsymbol{e}}_z)$$

da cui

$$v = \omega r$$

Derivando otteniamo la relazione tra accelerazioni,

$$a = \alpha r$$

dove $a = \dot{v}$ e $\alpha = \dot{\omega}$.

Domanda 1

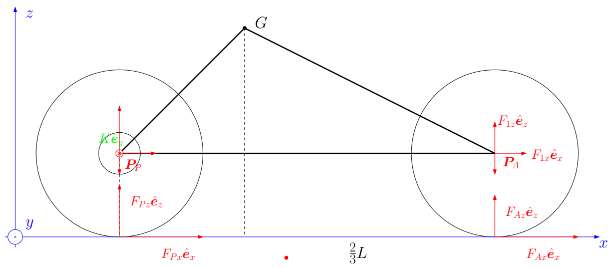


Figura 6.5.: Le forze esterne (in rosso) e i momenti esterni (in verde) che agiscono sulla ruota anteriore e posteriore.

Consideriamo le forze che agiscono sulla ruota anteriore (Figura 6.5): abbiamo la forza peso $\boldsymbol{P}_A$, la forza esercitata dall'asse $\boldsymbol{F}_1$ e la forza $\boldsymbol{F}_A$. Di queste solo l'ultima ha un momento diverso da zero rispetto al centro della ruota. Possiamo dunque scrivere la seconda equazione cardinale della dinamica per la ruota anteriore:

$$I\alpha\hat{\boldsymbol{e}}_y = -r\hat{\boldsymbol{e}}_z \wedge \boldsymbol{F}_A = -F_{Ax}r\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

Dato che $I = mr^2$ e $\alpha = a/r$ otteniamo

$$F_{Ax} = -ma$$

Consideriamo adesso la prima equazione cardinale di tutta la bicicletta. Prendendo la componente x otteniamo

$$F_{Ax} + F_{Px} = (M + 2m)\, a$$

e quindi

$$F_{Px} = (M + 3m)\, a$$

Si noti che la forza d'attrito sulla ruota anteriore è rivolta nel verso opposto a quello dell'accelerazione (potremmo chiamarla forza resistente), mentre quella sulla ruota posteriore è rivolta nel verso dell'accelerazione (potremmo chiamarla forza motrice).

Con i dati numerici del testo:

$$F_{Ax} = -10\text{N}$$
$$F_{Px} = 1260\text{N}$$

Si noti la grande differenza numerica (due ordini di grandezza) tra i moduli delle due forze.

Domanda 2

Scriviamo ora la seconda equazione cardinale per la ruota posteriore, usando come polo il centro della ruota. Rispetto al caso della ruota anteriore, qui entra in gioco anche il momento delle forze $\boldsymbol{K} = K\hat{\boldsymbol{e}}_y$ (Figura 6.5) che esercita il motore.

Anche in questo caso la forza peso $\boldsymbol{P}_P$ e la forza $\boldsymbol{F}_2$ esercitata dall'asse non hanno momento (per la precisione l'asse esercita una serie di forze, di cui $\boldsymbol{F}_2$ è la risultante, ma il momento esercitato dall'asse è in ogni caso trascurabile se lo è l'attrito - per esempio per la presenza di cuscinetti a sfera - e quindi tutte le forze sono essenzialmente radiali).

Il momento meccanico risultante è $\boldsymbol{\tau}_2 = (K - rF_{Px})\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$ e l'equazione cardinale

$$\boldsymbol{\tau}_2 = I\alpha\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

Proiettando sull'asse y e risolvendo (ancora una volta $I = mr^2$ e $\alpha = a/r$) otteniamo

$$K = (M + 4m)\,ra$$

Numericamente:

$$K = 381\text{Nm}$$

Domanda 3

Applichiamo la seconda equazione cardinale alla motocicletta nel suo complesso, ruote incluse.

Calcoliamo per prima cosa il momento delle forze $\boldsymbol{\tau}$ risultante sulla motocicletta, rispetto al polo mobile G. Le forze esterne da considerare sono $\boldsymbol{F}_A$, $\boldsymbol{P}_A$, $\boldsymbol{F}_P$, $\boldsymbol{P}_P$ e la forza peso $\boldsymbol{P}_0$ su M. Il momento di $\boldsymbol{P}_0$ rispetto a G è nullo. Considerando i bracci di ciascuna delle altre forza, il momento meccanico complessivo vale

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= \left(-hF_{Ax} - \frac{2}{3}LF_{Az} + \frac{2}{3}Lmg - hF_{Px} + \frac{1}{3}LF_{Az} - \frac{1}{3}Lmg\right)\hat{\boldsymbol{e}}_y \\
&= \left[\frac{1}{3}L\,(F_{Az} - 2F_{Pz}) - h\,(M + 2m)\,a + \frac{1}{3}Lmg\right]\hat{\boldsymbol{e}}_y
\end{aligned}$$

Il momento angolare $\boldsymbol{J}$ rispetto al polo G, se la moto non si sta impennando e quindi M sta semplicemente traslando con velocità $\boldsymbol{v}$, riceve contributi (identici) solo dal moto delle due ruote:

$$\boldsymbol{J} = 2\left[mr^2\omega - (h - r)\,mv\right]\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

La seconda equazione è dunque

$$\boldsymbol{\tau} = \dot{\boldsymbol{J}} + \boldsymbol{v}_G \wedge (M + 2m)\, \boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{J}}$$

che proiettata sull'asse y fornisce

$$\frac{1}{3}L\left(F_{Pz} - 2F_{Az}\right) - h\,(M + 2m)\,a + \frac{1}{3}Lmg = 2\left[mr^2\frac{a}{r} - (h - r)\,ma\right]$$

Questa equazione insieme alla proiezione nella direzione z della prima equazione cardinale (6.7.1) danno il sistema

$$\begin{aligned} F_{Pz} - 2F_{Az} &= 3M\frac{h}{L}a + 12m\frac{r}{L}a - mG \\ F_{Pz} + F_{Az} &= (M + 2m)\, g \end{aligned}$$

la cui soluzione fornisce:

$$F_{Pz} = \left(\frac{2}{3}M + m\right) g + \left(\frac{h}{L}M + 4\frac{r}{L}m\right) a \qquad (6.7.2)$$

$$F_{Az} = \left(\frac{1}{3}M + m\right) g - \left(\frac{h}{L}M + 4\frac{r}{L}m\right) a \qquad (6.7.3)$$

Valori numerici:

$$\begin{aligned} F_{Pz} &= 2347\text{N} \\ F_{Az} &= 105\text{N} \end{aligned}$$

Domanda 4

Il vincolo monolaterale costituito dalla strada richiede che le equazioni scritte siano valide solo alle condizioni $F_{Pz} > 0$ e $F_{Az} > 0$. Dalle equazioni (6.7.2) e (6.7.3) segue che deve essere

$$\left(\frac{1}{3}M + m\right) g - \left(\frac{h}{L}M + 4\frac{r}{L}m\right) a > 0$$

da cui si ricava immediatamente il valore massimo a_{max} dell'accelerazione:

$$a_{max} = \frac{1}{3}\frac{L\,(M + 3m)}{hM + 4rm}g \qquad (6.7.4)$$

Numericamente

$$a_{max} = 5.73\text{ms}^{-2}$$

Per $m \ll M$ la (6.7.4) può essere approssimata da

$$a_{max} \simeq \frac{1}{3}\frac{L}{h}g \tag{6.7.5}$$

che evidenzia l'importanza di mantenere basso il baricentro della motocicletta.

Una moto da corsa può raggiungere accelerazioni di $8\mathrm{ms}^{-2}$, infatti in gara spesso la ruota anteriore si solleva in fase di accelerazione dopo una curva.

Domanda 5

Nel limite $a \to a_{max}$ si ha $F_{Ax} \to -ma_{max}$ e $F_{Az} \to 0$, per cui il rapporto $|F_{Ax}/F_{Az}| \to \infty$ e, qualunque sia il coefficiente di attrito statico, la ruota anteriore perde aderenza e inizia a slittare. Per accelerazioni prossime a quella di impennata, quindi, le equazioni precedenti non sono più esatte e vale la pena considerare l'approssimazione della (6.7.5), con $m \ll M$. In questa approssimazione, dalla soluzione della prima domanda e dalle (6.7.2) e (6.7.3), si ha:

$$\begin{aligned}
F_{Ax} &\simeq 0\\
F_{Az} &\simeq \frac{1}{3}Mg - \frac{h}{L}Ma\\
F_{Px} &\simeq Ma\\
F_{Pz} &\simeq \frac{2}{3}Mg + \frac{h}{L}Ma
\end{aligned}$$

Perché la ruota posteriore non slitti, bisogna che il coefficiente di attrito statico μ_s soddisfi alla disuguaglianza:

$$\mu_s > \frac{F_{Px}}{F_{Pz}} = \frac{a}{\frac{2}{3}g + \frac{h}{L}a} = \frac{1}{\frac{2}{3}\frac{g}{a} + \frac{h}{L}} \geq \frac{1}{\frac{2}{3}\frac{g}{a_{max}} + \frac{h}{L}}$$

da cui, sostituendo la (6.7.5), si ricava

$$\mu_s > \frac{1}{3}\frac{L}{h}$$

Nel nostro caso numerico: $\mu_s > 0.58$.

Domanda 6

Le forze che trasferiscono quantità di moto devono necessariamente essere esterne. La forza peso è compensata dalle forze vincolari normali alla strada; le forze responsabili dell'incremento della quantità di moto sono quelle di attrito e, in particolare, quella agente sulla ruota posteriore F_{Px}; infatti F_{Ax} ha un modulo assai minore di F_{Px} e comunque tende a diminuire la quantità di moto.

Le forze esterne non fanno lavoro: infatti sia $\boldsymbol{F}_P$ che $\boldsymbol{F}_A$ sono applicate a punti istantaneamente in quiete, e le forze peso sono applicate a punti che si muovono orizzontalmente. Le forze che fanno lavoro sono quindi interne: si tratta delle forze applicate dal motore.

La potenza complessiva W si ottiene dalla derivata temporale dell'energia cinetica E_c:

$$
\begin{aligned}
W = \dot{E}_c &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(M+2m\right)v^2 + 2\frac{1}{2}I\omega^2\right] \\
&= \left(M+2m\right)va + 2mr^2\frac{v}{r^2}a \\
&= \left(M+4m\right)va
\end{aligned}
$$

da cui si può ricavare l'andamento temporale della potenza sviluppata dal motore nel tempo:

$$
W(t) = \left(M+4m\right)a^2 t = \dot{W}t
$$

La potenza deve crescere linearmente nel tempo. Poiché la potenza massima del motore è limitata, essa determina un limite temporale al mantenimento di un'accelerazione costante, anche senza prendere in considerazione le altre limitazioni tecniche.

Nel nostro caso, il coefficiente con cui cresce la potenza vale: $\dot{W} = 6350\text{Ws}^{-1}$

Si noti che le potenze massime W_{max} di moto GP possono raggiungere i 150kW. Nel nostro caso questa potenza massima corrisponderebbe a un tempo massimo di accelerazione costante $t_{max} = W_{max}/\dot{W} \simeq 24s$ e a una velocità massima $v_{max} = at_{max} \simeq 118\text{ms}^{-1} \simeq 425\text{km/h}$. Inoltre, in questo modello semplicistico, la velocità massima può addirittura crescere senza limiti al decrescere dell'accelerazione a, cosa ovviamente del tutto irrealistica!

I valori reali sono minori dei precedenti: le velocità massime si aggirano sui 360km/he, generalmente, le curve di accelerazione mostrano che l'accelerazione diminuisce con continuità al crescere della velocità.

Sorprendentemente, se usiamo il valore $a = a_{max} = 5.73\text{ms}^{-2}$ trovato nella risposta alla domanda 4, otteniamo $t_{max} = 18\text{s}$ e $v_{max} = 370\text{km/h}$, che sono valori piuttosto vicini alla realtà.

Domanda 7

Trascurando le masse degli assi, le forze che il telaio esercita sugli assi sono uguali alle forze $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$ esercitate dagli assi sulle ruote. Per quanto riguarda la ruota anteriore, la prima equazione cardinale applicata alla ruota fornisce

$$
\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{F}_A = m\boldsymbol{a}
$$

da cui

$$
\boldsymbol{F}_1 = m\boldsymbol{a} - m\boldsymbol{g} - \boldsymbol{F}_A
$$

proiettando questa equazione sugli assi x e z e sostituendo i valori già calcolati delle altre quantità:

$$F_{1x} = 2ma$$
$$F_{1z} = -\frac{1}{3}Mg + \left(\frac{h}{L}M + 4\frac{r}{L}m\right)a$$

Per quanto riguarda la ruota posteriore, considerando che $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$ sono opposte alle rispettive forze che gli assi esercitano sul telaio (terza legge di Newton), la prima equazione cardinale applicata a M fornisce:

$$-\boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{P}_0 - \boldsymbol{F}_1 = M\boldsymbol{a}$$

da cui

$$\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{P}_0 - \boldsymbol{F}_1 - M\boldsymbol{a}$$

proiettando questa equazione sugli assi x e z e sostituendo i valori già calcolati delle altre quantità otteniamo

$$\begin{aligned} F_{2x} &= -Ma - 2ma \\ F_{2z} &= -\frac{2}{3}Mg - \left(\frac{h}{L}M + 4\frac{r}{L}m\right)a \end{aligned}$$

Numericamente

$$F_{1x} = 20\text{N}$$
$$F_{1z} = -85.3\text{N}$$
$$F_{2x} = -1250\text{N}$$
$$F_{2z} = -2327\text{N}$$

6.8. 9 marzo 2016

Un disco rigido omogeneo di massa M e raggio R si muove su un piano verticale ed è vincolato a rotolare senza strisciare su una guida orizzontale. Al bordo della ruota è rigidamente unito un punto materiale P di massa m (vedi Figura 6.6). All'istante iniziale la ruota è abbandonata ferma nella configurazione in cui P si trova alla stessa quota del centro O della ruota.

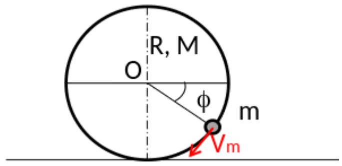


Figura 6.6.:

1. Calcolare l'energia cinetica della massa m in funzione dell'angolo ϕ che definisce la posizione della massa m sul bordo della ruota, rispetto alla linea orizzontale passante per il centro (vedi Figura 6.6).

2. Calcolare la velocità angolare ω del sistema in funzione dell'angolo ϕ.

3. Si collega al centro O del disco una molla di massa trascurabile e costante elastica k. L'altro estremo è fissato in modo che la molla risulti orizzontale e non deformata nella configurazione iniziale che prevede la massa m alla stessa altezza del centro O, come mostrato in Figura 6.7. Determinare il valore di k affinche' il sistema compia esattamente 1/4 di giro prima di invertire il suo moto.

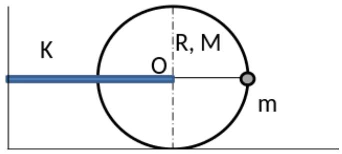


Figura 6.7.:

4. Il disco viene ora posto su di un piano di lunghezza 2ℓ con $\ell = 2\pi n R$, inclinato sull'orizzontale di un angolo α. Il piano presenta per la metà in alto una superficie ruvida, per la metà in basso una superficie liscia. Si consideri il caso $m = M$. In Figura 6.8 la posizione generica del sistema è individuata dalle coordinate x del centro del disco e dall'angolo ϕ per il punto materiale. Nel punto più alto del piano la massa è nel punto più alto del disco ($\phi = 0$). L'attrito statico μ tra il disco e la prima metà del piano inclinato è tale che il disco possa solo rotolare senza strisciare. Limitatamente al primo tratto (ruvido) del piano inclinato, e tenendo conto della condizione di rotolamento puro, rispondere alle seguenti domande:

4.1 Determinare l'andamento dell'energia potenziale del sistema $U(\phi)$.

4.2 Determinare la condizione per cui si hanno punti di equilibrio stabile.

4.3 Determinare almeno una posizione di equilibrio stabile.

4.4 Calcolare il minimo valore del coefficiente d'attrito statico μ che consenta di avere la posizione di equilibrio.

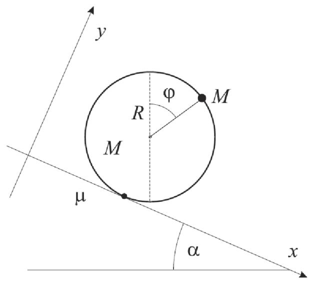


Figura 6.8.:

5. Si lascia libero il disco da fermo, nella posizione iniziale $x_0 = 0$, $\phi_0 = 0$; si supponga anche che l'angolo α sia tale che il disco non si stacchi mai dal piano. Il disco viene lasciato scendere fino alla fine del piano inclinato.

5.1 Determinare lo stato di moto (velocità di traslazione v_1 e rotazione ω_1) del sistema a metà del piano inclinato.

Soluzione

Domanda 1

L'energia si conserva, e si può scrivere come somma della energia del disco e della massa. Per quanto riguarda il disco possiamo scrivere

$$E_D = \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 = \frac{3}{4} M R^2 \dot{\phi}^2$$

dove abbiamo utilizzato la condizione di puro rotolamento per scrivere tutta l'energia cinetica come energia dovuta alla rotazione attorno al punto di appoggio. Abbiamo inoltre omesso l'energia potenziale gravitazionale, perché è una costante indipendente da ϕ. Per quanto riguarda il punto materiale abbiamo

$$E_P = \frac{1}{2} m d^2 \dot{\phi}^2 - mgr \sin\phi = mR^2 \left(1 - \sin\phi\right) \dot{\phi}^2 - mgR \sin\phi$$

dove $d = 2R^2(1 - \sin\phi)$ è la distanza tra il punto e il punto fisso. Ponendo l'energia totale uguale al suo valore iniziale abbiamo

$$K - mgR \sin\phi = 0$$

dove l'energia cinetica vale

$$K = \left[\frac{3}{4} M R^2 + mR^2 (1 - \sin\phi)\right] \dot{\phi}^2$$

e quindi

$$\dot{\phi}^2 = \frac{mgR \sin\phi}{\frac{3}{4} M R^2 + mR^2 (1 - \sin\phi)}$$

Possiamo adesso calcolare l'energia cinetica della particella:

$$\boxed{K_P = mR^2 (1 - \sin\phi) \dot{\phi}^2 = \frac{mgR(1 - \sin\phi) \sin\phi}{1 + \frac{3}{4}\frac{M}{m} - \sin\phi}}$$

Domanda 2

Dato che $\omega = -\dot{\phi}$ abbiamo

$$\left[\frac{3}{4} M R^2 + mR^2 (1 - \sin\phi)\right] \omega^2 = mgR \sin\phi$$

da cui, scegliendo opportunamente il segno,

$$\boxed{\omega = -\sqrt{\frac{g}{R} \frac{4m \sin\phi}{3M + 4m(1 - \sin\phi)}}}$$

Domanda 3

Aggiungiamo all'energia determinata precedentemente l'energia potenziale della molla. Tenendo conto che possiamo scrivere l'allungamento di quest'ultima come $\Delta\ell = R\phi$ abbiamo

$$E = \left[\frac{3}{4}MR^2 + mR^2(1-\sin\phi)\right]\dot{\phi}^2 - mgR\sin\phi + \frac{k}{2}R^2\phi^2$$

Ponendo l'energia iniziale uguale a quella finale, se nella configurazione finale $\dot{\phi} = 0$ (punto di inversione) abbiamo

$$-mgR\sin\frac{\pi}{2} + \frac{k}{2}R^2\frac{\pi^2}{4} = 0$$

da cui

$$\boxed{k = \frac{8mg}{R\pi^2}}$$

Domanda 4.1

Rispetto all'energia potenziale determinata precedentemente, dobbiamo tenere conto che sia il punto materiale che il disco hanno uno spostamento verticale addizionale di $\Delta h = -R\varphi\sin\alpha$, da cui ponendo $M = m$ abbiamo

$$\boxed{U(\varphi) = mgR\left(\cos\varphi - 2\varphi\sin\alpha\right)}$$

Domanda 4.2

Per avere equilibrio stabile deve essere $dU/d\varphi = 0$ e $d^2U/d\varphi^2 > 0$. Dai calcoli segue che

$$\begin{aligned}\frac{dU}{d\varphi} &= -mgR\left(\sin\varphi + 2\sin\alpha\right) = 0\\ \frac{d^2U}{d\phi^2} &= -mgR\cos\varphi > 0\end{aligned}$$

La prima equazione ha soluzioni sono se

$$-1 < 2\sin\alpha < 1$$

che nell'intervallo $0 < \alpha < \pi/2$ significasin $\alpha < \frac{1}{2}$ e quindi

$$\boxed{\alpha < \frac{\pi}{6}}$$

Domanda 4.3

Le soluzioni si ripetono con periodo 2π. Nell'intervallo $-\pi < \varphi < \pi$ abbiamo

$$\begin{aligned}\varphi &= -\arcsin(2\sin\alpha)\\ \varphi &= -\pi + \arcsin(2\sin\alpha)\end{aligned}$$

. La soluzione stabile è quella con $\cos\varphi < 0$, cioè la seconda. Abbiamo in conclusione

$$\boxed{\varphi_{eq} = \arcsin(2\sin\alpha) + (2k-1)\pi}$$

Per una derivazione geometrica vedere la Figura 6.9. Dall'uguaglianza dei tratti in verde segue che

$$\frac{R}{2}\sin(\varphi - \pi) = R\sin\alpha$$

e quindi si ottiene nuovamente la relazione $\sin\varphi + 2\sin\alpha = 0$ determinata precedentemente.

Domanda 4.4

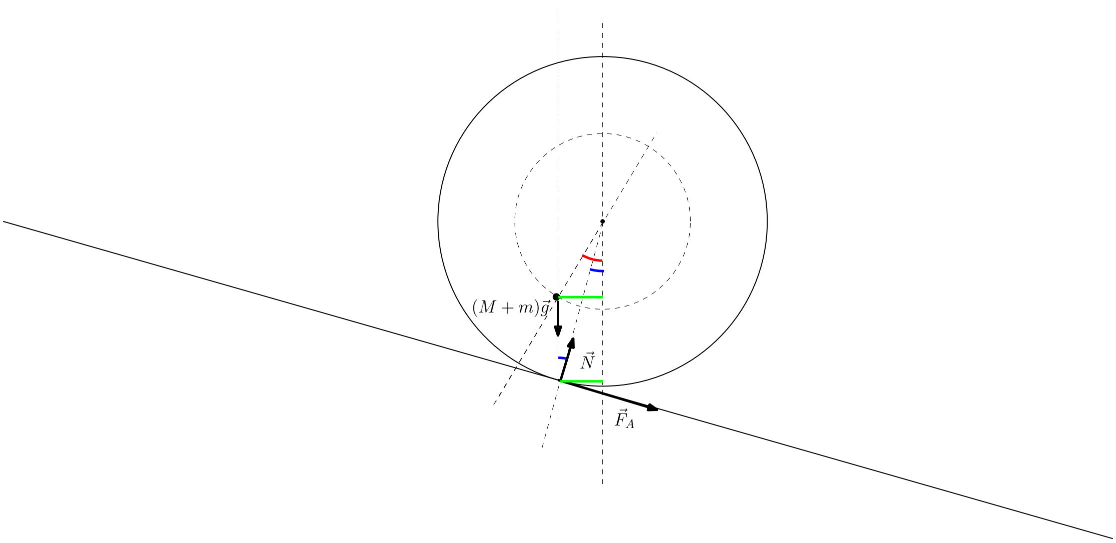


Figura 6.9.: Determinazione geometrica della posizione di equilibrio. Prendendo come polo il punto di contatto con il piano, la somma dei momenti delle forze deve essere nulla. Dato che le forze di contatto hanno braccio nullo, lo stesso deve valere anche per la forza peso applicata al centro di massa. Quindi il centro di massa deve essere sulla verticale del punto di contatto. In rosso è indicato l'angolo $\varphi - \pi$, in blu l'angolo α.

Nella condizione di equilibrio la somma delle forze deve essere nulla. Prendendo le componenti perpendicolari e parallele al piano abbiamo

$$N - 2mg\cos\alpha = 0$$
$$F_A + 2mg\sin\alpha = 0$$

Dato che deve essere $|F_A| \leq \mu N$ troviamo

$$2mg\sin\alpha \leq \mu 2mg\cos\alpha$$

e quindi

$$\boxed{\tan\alpha \leq \mu}$$

Domanda 5.1

Usiamo la conservazione dell'energia. A metà del piano inclinato il disco ha fatto un numero intero di giri, quindi la variazione dell'energia potenziale è

$$\Delta U = -2mgR\,(2\pi n)\sin\alpha$$

Per l'energia cinetica finale abbiamo quindi $K_f = -\Delta U$, dato che inizialmente $K = 0$. Ma

$$K_f = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} + 2\,(1 + \cos\alpha)\right] mR^2\omega_1^2$$

e quindi

$$\boxed{\omega_1 = -\sqrt{\frac{8\pi n\sin\alpha}{\frac{7}{2} + 2\cos\alpha}\frac{g}{R}}}$$

Dalla condizione di puro rotolamento segue che

$$\boxed{v_1 = -R\omega_1 = \sqrt{\frac{8\pi n\sin\alpha}{\frac{7}{2} + 2\cos\alpha}gR}}$$

6.9. 17 marzo 2017

Primo problema

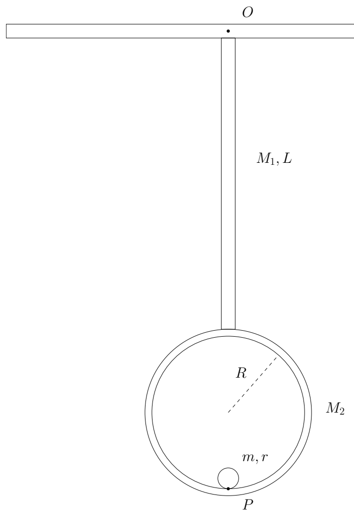


Figura 6.10.: L'anello sospeso dalla sbarra.

Un anello di massa M_2, raggio R e spessore trascurabile è sospeso tramite una sbarra di massa M_1, lunghezza L e larghezza trascurabile. All'interno dell'anello si trova un cilindro di massa m e raggio $r < R$, posto nel punto più basso. La sbarra e l'anello sono solidali, il cilindro è vincolato ad un moto di rotolamento puro rispetto all'anello.

1. Se la sbarra è fissata rigidamente al soffitto, calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni del cilindro nell'anello.

2. Il cilindro è ora fissato all'anello nel punto P. Calcolare, per il sistema formato da anello, sbarra e cilindro la posizione del centro di massa e il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il punto O e perpendicolare al piano della figura quando la sbarra sia perfettamente verticale e il cilindro nella posizione più bassa dell'anello.

3. Il sistema con il cilindro fissato all'anello nel punto P viene lasciato libero di oscillare attorno ad O. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni del sistema.

Secondo problema

Un punto materiale è libero di muoversi vincolato ad una superficie curva (un "imbuto") descritta in coordinate cilindriche dall'equazione $z = -k\rho^{-\alpha}$ con $\alpha > 0$, in presenza di un campo gravitazionale $-g\hat{z}$.

1. Scelte come coordinate ρ e ϕ scrivere l'energia cinetica e l'energia potenziale. Determinare il potenziale efficace U_{eff}, in modo da poter scrivere l'energia meccanica totale nella forma $E = \frac{1}{2}M(\rho)\dot{\rho}^2 + U_{\text{eff}}(\rho)$, dove M e U_{eff} sono opportune funzioni.

2. Trovare il periodo dell'orbita circolare in funzione del suo raggio.

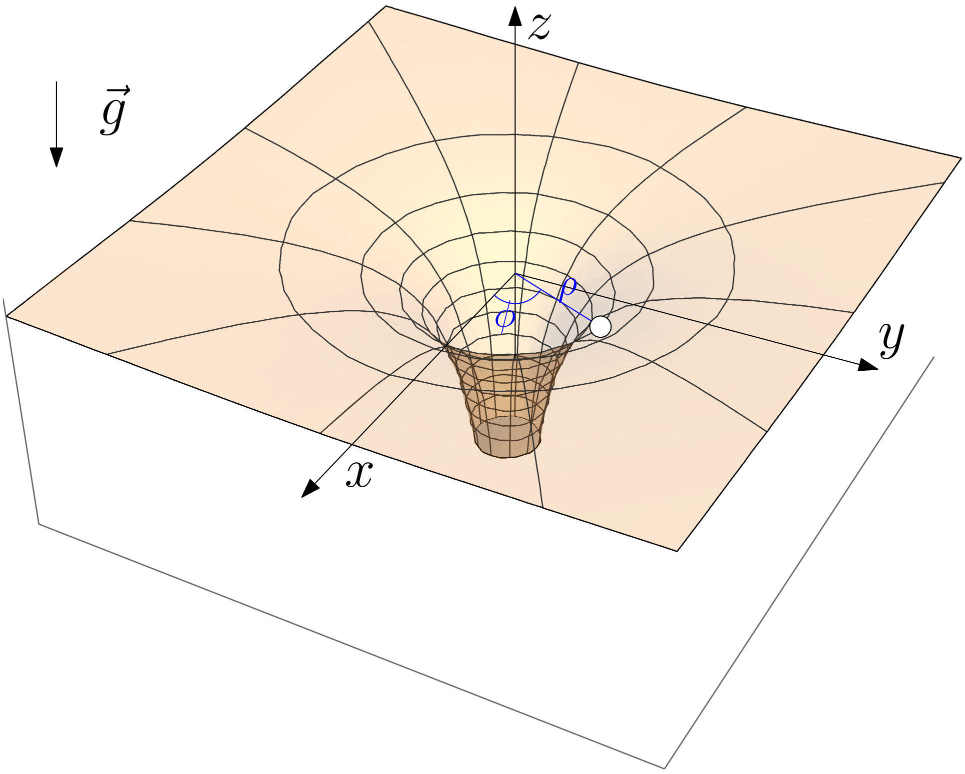


Figura 6.11.: Rappresentazione della superficie sulla quale avviene il moto.

3. Partendo da una condizione iniziale in cui $\dot{\phi} \neq 0$, dire per quali valori di α il punto materiale può cadere nel centro dell'imbuto, giustificando la risposta.

Soluzioni

Domanda 1.1

Utilizzando come coordinata l'angolo θ tra la verticale e il segmento che congiunge il centro dell'anello e il centro del cilindro possiamo trovare il legame tra $\dot{\theta}$ e la velocità angolare ω del cilindro calcolando in due modi diversi la velocità del suo centro di massa. Dato che il moto è circolare con raggio $R - r$ abbiamo

$$v_{cm} = (R - r)\dot{\theta}$$

ma d'altra parte dato che il punto di contatto tra cilindro e anello è in quiete

$$v_{cm} = -r\omega$$

da cui

$$\omega = \left(1 - \frac{R}{r}\right)\dot{\theta}$$

Possiamo adesso scrivere l'energia nella forma

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mr^2\right)\omega^2 - mg(R-r)\cos\theta$$

cioè, sostituendo ω e approssimando per piccole oscillazioni $\cos\theta = 1 - \theta^2/2$

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mr^2\right)\left(1 - \frac{R}{r}\right)^2\theta^2 + \frac{1}{2}mg(R-r)\theta^2$$

Questa è l'energia di un oscillatore armonico con

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg(R-r)}{\left(\frac{3}{2}mr^2\right)\left(r - \frac{R}{r}\right)^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{(R-r)}}$$

Domanda 1.2

La distanza del centro di massa del sistema da O è data da

$$d = \frac{M_1\frac{L}{2} + M_2(L+R) + m(L+2R-r)}{M_1 + M_2 + m}$$

e per il momento di inerzia

$$\begin{aligned} I = & \left[\frac{1}{12}M_1L^2 + M_1\left(\frac{L}{2}\right)^2\right] + \left[M_2R^2 + M_2(L+R)^2\right] \\ & + \left[\frac{1}{2}mr^2 + m(L+2R-r)^2\right] \end{aligned}$$

Domanda 1.3

Abbiamo un pendolo fisico, la cui energia vale

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 - Mgd\cos\phi$$

dove ϕ è l'angolo tra la verticale e la sbarra, d ed I i valori della distanza tra centro di massa e O e del momento di inerzia calcolati precedentemente e $M = M_1 + M_2 + m$ la massa totale. Per piccole oscillazioni a meno di una costante irrilevante

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}Mgd\phi^2$$

e quindi

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mgd}{I}}$$

Domanda 2.1

Per l'energia cinetica abbiamo in generale, in coordinate cilindriche,

$$K = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right)$$

Imponendo il vincolo di appartenenza del punto materiale alla superficie deve essere

$$z = -\frac{k}{\rho^\alpha}$$

e quindi

$$\dot{z} = \alpha\frac{k}{\rho^{\alpha+1}}\dot{\rho}$$

da cui

$$K = \frac{1}{2}m\left[\left(1 + \frac{\alpha^2 k^2}{\rho^{2\alpha+2}}\right)\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2\right]$$

Per il potenziale similmente

$$U = mgz = -\frac{mgk}{\rho^\alpha}$$

La componente z del momento angolare si conserva: infatti sia la forza peso che la reazione vincolare della superficie non hanno componenti $\hat{e}_\phi$, cioè $\vec{F} = A\hat{e}_z + B\hat{e}_\rho$ mentre $\vec{r} = z\hat{e}_z + \rho\hat{e}_\rho$, di conseguenza il momento

$$\vec{r}\wedge\vec{F} = (z\hat{e}_z + \rho\hat{e}_\rho)\wedge(A\hat{e}_z + B\hat{e}_\rho) = (Bz - A\rho)\,\hat{e}_\phi$$

non ha componenti verticali. Dato che

$$L_z = m\rho^2\dot{\phi}$$

possiamo scrivere

$$E = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{\alpha^2 k^2}{\rho^{2\alpha+2}}\right)\dot{\rho}^2 + \frac{L_z^2}{2m\rho^2} - \frac{mgk}{\rho^\alpha}$$

e quindi

$$M(\rho) = m\left(1 + \frac{\alpha^2 k^2}{\rho^{2\alpha+2}}\right)$$

$$U_{eff}(\rho) = \frac{L_z^2}{2m\rho^2} - \frac{mgk}{\rho^\alpha}$$

Domanda 2.2

L'orbita corrisponde al minimo del potenziale efficace. Quindi deve essere

$$\frac{dU_{eff}}{d\rho} = -\frac{L_z^2}{m\rho^3} + \frac{\alpha mgk}{\rho^{\alpha+1}} = 0$$

da cui

$$L_z^2 = \frac{\alpha m^2 gk}{\rho^{\alpha-2}}$$

ma

$$L_z^2 = m^2\rho^4\dot{\phi}^2 = 4\pi^2 m^2\rho^4\frac{1}{T^2}$$

e quindi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho^{\alpha+2}}{\alpha gk}}$$

Domanda 2.3

Dato che $\dot{\phi} \neq 0$ avremo $L_z \neq 0$. La caduta nel centro è possibile solo se il potenziale efficace non tende a $+\infty$ per $\rho \to 0$. Abbiamo

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{L_z^2}{2m\rho^2} - \frac{mgk}{\rho^\alpha} = +\infty$$

se $\alpha < 2$ oppure se $\alpha = 2$ e

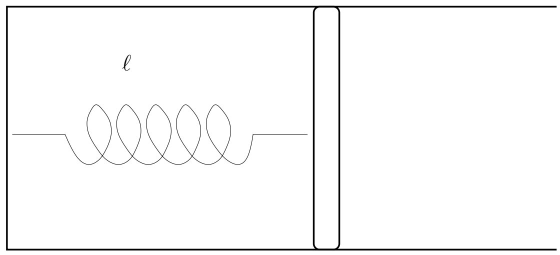
$$L_z^2 > 2m^2 gk$$

In tutti gli altri casi la caduta nel centro è possibile.

7. Quarta prova in itinere

7.1. 28 maggio 2008

Problema 1 (15 punti)



Nel cilindro di sezione S in figura sono contenute n moli di un gas perfetto monoatomico, e la molla che collega il setto mobile al fondo ha lunghezza a riposo nulla ed esercita una forza di richiamo di modulo

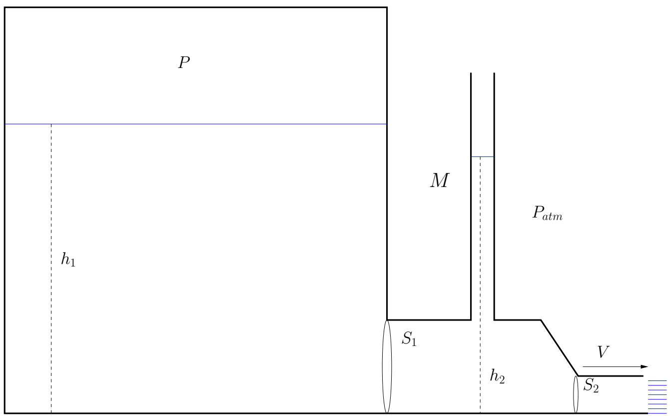
$$F = k\ell^{\alpha} \tag{7.1.1}$$

dove ℓ è l'allungamento. Inizialmente il sistema è all'equilibrio, ad una temperatura T_0, e all'esterno del cilindro c'è il vuoto.

1. Determinare la legge che lega la pressione del gas al suo volume.
2. Si fornisce al sistema una quantità di calore dQ. Determinare la capacità termica.
3. Calcolare il massimo lavoro che è possibile estrarre dal sistema avendo a disposizione un bagno termico di temperatura $T_B < T_0$.

Problema 2 (15 punti)

Un recipiente cilindrico di sezione S è riempito fino ad una altezza h_1 di acqua, per la parte rimanente di vapore saturo. Sul fondo è praticato un foro di sezione $S_1 \ll S$, collegato ad una conduttura che nel tratto finale riduce la sua sezione a $S_2 < S_1$. Fornendo calore al sistema si mantiene la pressione del vapore ad un valore P. Nella conduttura si innesta un cilindro verticale aperto M, come in figura. I diametri della conduttura sono tutti di dimensioni trascurabili rispetto ad h_1.



1. Che altezza h_2 raggiunge l'acqua nel cilindro M se l'apertura di sezione S_2 è mantenuta chiusa?
2. Si apre adesso la conduttura, e in breve tempo si raggiunge lo stato stazionario. Calcolare la nuova altezza h_2 del liquido in M e la velocità con la quale l'acqua esce dalla conduttura.
3. Detta V la velocità calcolata al punto precedente, dire quanto calore è necessario fornire al sistema per unità di tempo per mantenere le condizioni stazionarie. Indicare con λ il calore latente di evaporazione e con ρ_V la densità del vapore.

Soluzione primo problema

Domanda 1

La pressione del gas deve equilibrare la forza che la molla applica al pistone, quindi

$$P = \frac{F}{S} = \frac{k\ell^\alpha}{S} = \frac{k}{S^{1+\alpha}} V^\alpha \,. \tag{7.1.2}$$

Domanda 2

Abbiamo

$$\begin{aligned} dQ &= dU = nc_V dT + k\ell^\alpha d\ell & (7.1.3)\\ &= nc_V dT + \frac{k}{S^{1+\alpha}} V^\alpha dV & (7.1.4) \end{aligned}$$

d'altra parte

$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{k}{S^{1+\alpha}} V^\alpha \tag{7.1.5}$$

cioè

$$V = S\left(\frac{nRT}{k}\right)^{1/(1+\alpha)} \tag{7.1.6}$$

e

$$dV = \frac{nRS}{k(1+\alpha)}\left(\frac{nRT}{k}\right)^{-\alpha/(1+\alpha)} dT \,. \tag{7.1.7}$$

Sostituendo otteniamo

$$dQ = CdT = \left[nc_V + \frac{k}{S^{1+\alpha}} S^\alpha \left(\frac{nRT}{k}\right)^{\alpha/(1+\alpha)} \frac{nRS}{k(1+\alpha)}\left(\frac{nRT}{k}\right)^{-\alpha/(1+\alpha)}\right] dT \tag{7.1.8}$$

quindi

$$C = nc_V + n\frac{R}{(1+\alpha)} \,. \tag{7.1.9}$$

Domanda 3

Ponendo uguale a zero la variazione di entropia del sistema abbiamo

$$\Delta S = \frac{Q_2}{T_B} + nc_v \log \frac{T_B}{T_0} + nR \log \left(\frac{T_B}{T_0}\right)^{1/(1+\alpha)} = 0 \tag{7.1.10}$$

da cui

$$Q_2 = nT_B \left(c_v + \frac{R}{1+\alpha}\right) \log \frac{T_0}{T_B} . \tag{7.1.11}$$

D'altra parte

$$Q_1 = -\int_{T_0}^{T_B} C dT = n \left(c_V + \frac{R}{(1+\alpha)}\right) (T_0 - T_B) \tag{7.1.12}$$

e quindi

$$W = Q_1 - Q_2 = n \left(c_V + \frac{R}{(1+\alpha)}\right) \left[(T_0 - T_B) - T_B \log \frac{T_0}{T_B}\right] . \tag{7.1.13}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che la pressione sul fondo è la stessa ovunque deve essere

$$P + \rho g h_1 = P_{atm} + \rho g h_2 \tag{7.1.14}$$

e quindi

$$h_2 = h_1 + \frac{P - P_{atm}}{\rho g} . \tag{7.1.15}$$

Domanda 2

Detta V_1 la velocità nel tratto di sezione S_1 dal teorema di Bernoulli segue che

$$P + \rho g h_1 = P_{atm} + pa\rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho V^2 \tag{7.1.16}$$

e dalla conservazione della massa

$$S_1 V_1 = S_2 V . \tag{7.1.17}$$

Risolvendo abbiamo

$$V = \sqrt{\frac{2\left(P - P_{atm} + \rho g h_1\right)}{\rho}} \tag{7.1.18}$$

e

$$h_2 = \frac{\left(P - P_{atm} + \rho g h_1\right)\left(S_1^2 - S_2^2\right)}{\rho g S_1^2} . \tag{7.1.19}$$

Domanda 3

Dato che la sezione S è molto grande possiamo considerare h_1 costante. Man mano che il liquido defluisce è necessario rimpiazzarlo con nuovo vapore saturo, per mantenere costante la pressione P. La massa di vapore da creare per unità di tempo è

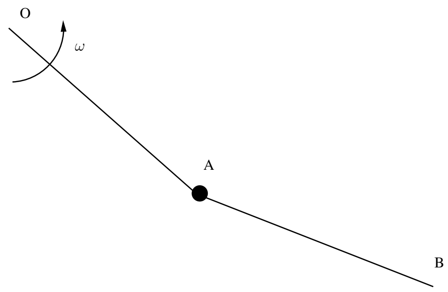
$$\rho_V V S_2 \tag{7.1.20}$$

che corrisponde alla massa di liquido da far evaporare. Quindi

$$\frac{dQ}{dt} = \lambda \rho_V V S_2 \,. \tag{7.1.21}$$

7.2. 29 maggio 2009

Problema 1 (15 punti)



La sbarra OA in figura, di lunghezza ℓ, viene mantenuta in rotazione attorno ad un suo estremo con velocità angolare constante ω. All'estremo opposto è incernierata una sbarra di AB identica lunghezza e massa m. Il moto avviene in un piano orizzontale senza attrito.

1. Si conserva il momento angolare totale del sistema rispetto al polo O? E rispetto al polo A?
2. Per quali condizioni iniziali il punto B¸ si muove di moto circolare uniforme (nel sistema inerziale)?
3. Se all'istante iniziale le due sbarre sono allineate, dire per quali velocità $v_B(t = 0)$ dell'estremo B questo riesce a compiere (nel sistema rotante con OA) un giro completo.

Problema 2 (15 punti)

Un corpo di capacità termica costante C_1 si trova inizialmente ad una temperatura $T_{1,0}$. In un recipiente separato si trova invece una massa m di ghiaccio ad una temperatura $T_{2,0}$.

1. Si pone il recipiente in contatto termico con il corpo. Per quale temperatura minima $T_{1,0}^{min}$ il ghiaccio si scioglie completamente?
2. Calcolare, per $T_{1,0} > T_{1,0}^{min}$, la temperatura finale delline sistema e la variazione di entropia dell'universo.
3. Se lo scambio di calore avviene per mezzo di una macchina termica reversibile calcolare nuovamente $T_{1,0}^{min}$.

Soluzione primo problema

Domanda 1

Se in O viene applicato al sistema un momento $M(t)$, questo svilupperà una potenza

$$W = M(t)\omega$$

di conseguenza il momento angolare rispetto ad O e l'energia varieranno nel tempo secondo le leggi

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= M\omega\\ \frac{dL_O}{dt} &= M\end{aligned}$$

Da queste equazioni segue che

$$\frac{d}{dt}\left(E - \omega L_O\right) = 0$$

cioè $E - \omega L_O$ è una costante del moto. Indicando con θ l'angolo tra le direzioni delle due aste ($\theta = 0$ corrisponde al caso in cui $\overline{AB}$ è il prolungamento di $\overline{OA}$) possiamo scrivere

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2\omega^2 + \frac{1}{2}\left(I + m\frac{\ell^2}{4}\right)\left(\dot\theta + \omega\right)^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\omega\left(\dot\theta + \omega\right)\cos\theta \tag{7.2.1}$$

$$L_O = m\ell^2\omega + \left(I + m\frac{\ell^2}{4}\right)\left(\dot\theta + \omega\right) + m\frac{\ell^2}{2}\left(\dot\theta + 2\omega\right)\cos\theta \tag{7.2.2}$$

da cui

$$E - \omega L_O + \frac{1}{2}\left(I + \frac{5}{4}m\ell^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(I + m\frac{\ell^2}{4}\right)\dot\theta^2 - \frac{1}{2}m\ell^2\omega^2\cos\theta \tag{7.2.3}$$

e derivando rispetto al tempo otteniamo una equazione del moto per θ

$$\left(I + m\frac{\ell^2}{4}\right)\ddot\theta + \frac{1}{2}m\ell^2\omega^2\sin\theta = 0$$

Dalla Equazione (7.2.3) è possibile determinare $\dot\theta$ in funzione di θ. Sostituendo nell'espressione di L_O (Equazione (7.2.2)) vediamo che per avere L_O costante deve essere θ costante. Inoltre in questo caso

$$\begin{aligned}\frac{2E}{m\ell^2\omega^2} &= \frac{4}{3} + \cos\theta\\ \frac{L_O}{m\omega\ell^2} &= \frac{4}{3} + \cos\theta\end{aligned}$$

e dall'equazione del moto segue che θ rimane costante solo se $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, e quindi le condizioni iniziali devono essere scelte in modo da avere

$$\frac{2E}{m\ell^2\omega^2} = \frac{4}{3} \pm 1$$
$$\frac{L_O}{m\omega\ell^2} = \frac{4}{3} \pm 1$$

In tutti gli altri casi L_O non è costante, ed al sistema è applicato un momento esterno non nullo $M(t)$.

Per quanto riguarda il momento angolare rispetto ad A possiamo ragionare come segue. Chiaramente non si hanno momenti applicati all'asta AB, però il polo è mobile e quindi

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = -m\vec{v}_A \wedge \vec{v}_{cm}$$

Il momento angolare si conserverà quindi solo se la velocità del polo sarà parallela a quella del centro di massa. Questo accadrà solo se l'angolo tra le due sbarre rimane costante: le condizioni perché questo avvenga sono già state discusse.

Domanda 2

Il moto di B sarà circolare uniforme, ancora una volta, se l'angolo tra le due aste rimarrà costante.

Domanda 3

Nel sistema rotante l'energia totale si conserva, e può essere scritta nella forma

$$E = \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\ell^2\left(\frac{5}{4} + \cos\theta\right)$$

dove abbiamo tenuto conto del potenziale centrifugo. Per compiere un giro completo dovrà essere

$$\frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\left(\frac{v_B}{\ell}\right)^2 - \frac{9}{8}m\omega^2\ell^2 > -\frac{1}{8}m\omega^2\ell^2$$

ossia

$$v_B > \omega\ell\sqrt{6}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

É necessario fornire al ghiaccio un calore totale

$$Q = \lambda m + c_g m\left(T_f - T_{2,0}\right)$$

per portarlo alla temperatura di fusione e a sciogliedo completamente (abbiamo indicato con c_g il calore specifico del ghiaccio, e con λ il suo calore latente di fusione). Questo deve provenire dal corpo, e quindi deve essere anche

$$-Q = C_1 \left(T_f - T_{1,min}\right)$$

Segue che

$$T_{1,min} = T_f + \frac{\lambda m + c_g m \left(T_f - T_{2,0}\right)}{C_1}$$

Domanda 2

La temperatura finale del sistema sarà adesso $T^* > T_f$. La variazione di entropia del ghiaccio sarà (c_a è il calore specifico dell'acqua)

$$\begin{aligned}
\Delta S_g &= \int_{T_{2,0}}^{T_f} \frac{m c_g dT}{T} + \int_0^{\lambda m} \frac{dQ}{T_f} + \int_{T_f}^{T^*} \frac{m c_a dT}{T} \\
&= m c_g \log \frac{T_f}{T_{2,0}} + m c_a \log \frac{T^*}{T_f} + \frac{\lambda m}{T_f}
\end{aligned}$$

e quella del corpo

$$\Delta S_c = \int_{T_{1,0}}^{T^*} \frac{C_1 dT}{T} = C_1 \log \frac{T^*}{T_{1,0}}$$

Per determinare la tempertura finale di deve eguagliare il calore assorbito dal ghiaccio

$$Q = \lambda m + c_g m \left(T_f - T_{2,0}\right) + c_a m \left(T^* - T_f\right)$$

a quello ceduto dal corpo

$$Q = C_1 \left(T_{1,0} - T^*\right)$$

ottenendo

$$T^* = \frac{C_1 T_{1,0} + c_g m T_{2,0} + m \left(c_a - c_g\right) T_f - \lambda m}{c_a m + C_1}$$

Sostituendo in

$$\Delta S = \Delta S_c + \Delta S_g$$

si ottiene il risultato cercato.

Domanda 3

La variazione di entropia del ghiaccio sarà

$$\Delta S_g = \frac{\lambda m}{T_f} + m c_g \log \frac{T_f}{T_{2,0}}$$

e quella del corpo

$$\Delta S_c = C_1 \log \frac{T_f}{T_{1,0}^{min}}$$

Se operiamo reversibilmente dovrà essere $\Delta S_g + \Delta S_c = 0$, quindi

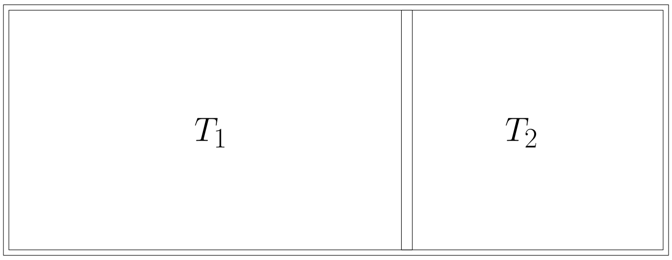
$$\frac{\lambda m}{T_f} + m c_g \log \frac{T_f}{T_{2,0}} + C_1 \log \frac{T_f}{T_{1,0}^{min}} = 0$$

da cui

$$T_{1,0}^{min} = T_f \left(\frac{T_f}{T_{2,0}} \right)^{\frac{m c_g}{C_1}} \exp \left(\frac{\lambda m}{C_1 T_f} \right)$$

7.3. 31 maggio 2010

Problema 1



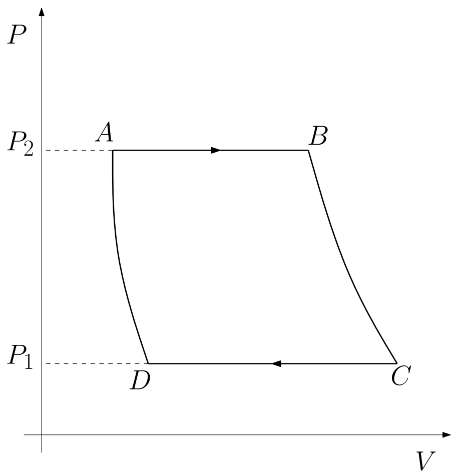
Il recipiente in figura ha un volume totale V, ed è impermeabile al calore. Viene diviso in due parti mediante un setto mobile, pure impermeabile al calore. In ogni scomparto si trova una mole dello stesso gas perfetto, ad una temperatura T_1 (a sinistra) e T_2 (a destra).

1. Determinare le pressioni e i volumi dei due scomparti.

2. Si permette il passaggio di calore tra i due scomparti, fino a quando viene raggiunto nuovamente l'equilibrio. Si determini la variazione di entropia del sistema.

3. Impedendo nuovamente il passaggio di calore, si sposta il pistone reversibilmente fino a ottenere i volumi iniziali. Determinare il lavoro fatto sul sistema.

Problema 2



Una mole di gas perfetto monoatomico viene utilizzata per una trasformazione ciclica reversibile come in figura. Inizialmente si fa espandere il gas ad una pressione costante P_2, in modo che il rapporto tra volume iniziale e finale sia $k < 1$. Segue un'ulteriore espansione adiabatica che porta la pressione a $P_1 < P_2$, una compressione a pressione P_1 costante ed una compressione adiabatica che riporta il sistema nello stato iniziale.

1. Rappresentare il ciclo nel piano $T-S$, determinando esplicitamente la dipendenza della temperatura dall'entropia per le trasformazioni a pressione costante.
2. Calcolare l'efficienza del ciclo in funzione dei volumi V_A, V_B, V_C e V_D o, facoltativamente, in funzione del solo rapporto P_1/P_2.
3. Come cambia l'efficienza se le trasformazioni adiabatiche avvengono in modo irreversibile, variando bruscamente la pressione esterna da P_1 a P_2 e viceversa (ad esempio appoggiando/togliendo una certa massa sul/dal pistone che chiude il contenitore del gas)?

Soluzione primo problema

Domanda 1

L'equilibrio meccanico richiede che i gas siano alla stessa pressione. Possiamo quindi scrivere

$$\frac{nRT_1}{V_1} = \frac{nRT_2}{V_2} \tag{7.3.1}$$

$$V = V_1 + V_2 \tag{7.3.2}$$

e risolvendo per i volumi otteniamo

$$V_1 = \frac{T_1}{T_1+T_2}V \tag{7.3.3}$$

$$V_2 = \frac{T_2}{T_1+T_2}V \tag{7.3.4}$$

e per la pressione

$$P = \frac{nRT_1}{V_1} = \frac{nR}{V}(T_1+T_2) \tag{7.3.5}$$

Domanda 2

La trasformazione è irreversibile. Non viene fatto lavoro sul sistema, e neppure viene scambiato calore. Dal primo principio segue quindi $\Delta U = 0$. Detta T_f la temperatura finale abbiamo quindi

$$nc_VT_1 + nc_VT_2 = 2nc_VT_f \tag{7.3.6}$$

e quindi

$$T_f = \frac{T_1+T_2}{2} \tag{7.3.7}$$

Segue che i volumi finali saranno entrambi $V/2$. Per la variazione di entropia abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\Delta S &= 2nc_V \ln T_f + 2nR\ln\frac{V}{2} - nc_V\ln T_1 - nc_V \ln T_2 - nR\ln V_1 - nR\ln V_2 && (7.3.8)\\
&= nc_V \ln\frac{T_f^2}{T_1T_2} + nR\ln\frac{V^2}{4V_1V_2} && (7.3.9)\\
&= nc_V \ln\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2} + nR\ln\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2} && (7.3.10)\\
&= 2nc_P\ln\left(\frac{T_1+T_2}{2\sqrt{T_1T_2}}\right) && (7.3.11)
\end{aligned}$$

Domanda 3

Dato che non viene fornito calore al sistema, il lavoro fatto sarà uguale alla variazione dell'energia interna:

$$L_{ext} = nc_V\left(T_1' + T_2' - 2T_f\right) \tag{7.3.12}$$

In ciascun scomparto avviene una trasformazione adiabatica, per la quale

$$TV^{\gamma-1} = \text{costante} \tag{7.3.13}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
T_1'V_1^{\gamma-1} &= T_f\left(\frac{V}{2}\right)^{\gamma-1} && (7.3.14)\\
T_2'V_2^{\gamma-1} &= T_f\left(\frac{V}{2}\right)^{\gamma-1} && (7.3.15)
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
L_{ext} &= nc_VT_f\left[\left(\frac{V}{2V_1}\right)^{\gamma-1} + \left(\frac{V}{2V_2}\right)^{\gamma-1} - 2\right] && (7.3.16)\\
&= nc_V\frac{T_1+T_2}{2}\left[\left(\frac{T_1+T_2}{2T_1}\right)^{\gamma-1} + \left(\frac{T_1+T_2}{2T_2}\right)^{\gamma-1} - 2\right] && (7.3.17)\\
&= nc_V\left[T_1\left(\frac{T_1+T_2}{2T_1}\right)^{\gamma} + T_2\left(\frac{T_1+T_2}{2T_2}\right)^{\gamma} - T_1 - T_2\right] && (7.3.18)
\end{aligned}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

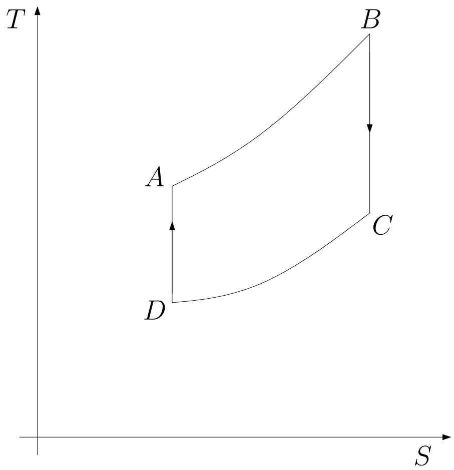
In una trasformazione a pressione costante

$$dS = c_P \frac{dT}{T} \tag{7.3.19}$$

e quindi la temperatura dipende esponenzialmente dall'entropia

$$S - S_0 = c_p \ln \frac{T}{T_0}, \quad T = T_0 e^{(S-S_0)/c_P} \tag{7.3.20}$$

Quindi i cicli si rappresentano come in figura



Domanda 2

Per il calcolo dell'efficienza possiamo basarci sulla rappresentazione nel piano $T - S$. Il calore assorbito sarà

$$\begin{aligned} Q_{ass} &= \int_{S_A}^{S_B} T dS = \int_{S_A}^{S_B} T_A e^{(S-S_A)/c_P} dS \\ &= c_P T_A \left(e^{\Delta S_{BA}/c_P} - 1 \right) \end{aligned} \tag{7.3.21}$$

e il lavoro

$$W = Q_{ass} - Q_{ced} = c_P \left(T_A - T_D \right) \left(e^{\Delta S_{CD}/c_P} - 1 \right) \tag{7.3.22}$$

da cui (tenendo conto che $\Delta S_{CD} = \Delta S_{BA}$)

$$\eta = \frac{W}{Q_{ass}} = \left(1 - \frac{T_D}{T_A} \right) \tag{7.3.23}$$

Dato che gli stati A e D sono connessi da un'adiabatica reversibile abbiamo

$$P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_A = P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_D \tag{7.3.24}$$

che permette di scrivere l'efficienza in funzione delle pressioni note

$$\eta = 1 - \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \tag{7.3.25}$$

dove $r = P_1/P_2$.

Domanda 3

In questo caso possiamo scrivere per il calore assorbito

$$Q_{ass} = c_P (T_B - T_A) = \frac{c_P}{R} P_2 (V_B - V_A) \tag{7.3.26}$$

e per il lavoro fatto sul sistema

$$\begin{aligned} -L_{ext} &= P_2 (V_B - V_A) + P_1 (V_C - V_B) + P_1 (V_D - V_C) + P_2 (V_A - V_D) \\ &= P_2 (V_B - V_D) + P_1 (V_D - V_B) \\ &= (P_2 - P_1)(V_B - V_D) \end{aligned} \tag{7.3.27}$$

Alternativamente potremmo scrivere anche il lavoro come differenza tra calore assorbito e calore ceduto, dato che l'energia interna non cambia alla fine del ciclo,

$$\begin{aligned} -L_{ext} &= Q_{ass} - Q_{ced} \\ &= c_P (T_B - T_A) + c_P (T_D - T_C) \\ &= \frac{c_P}{R} P_2 (V_B - V_A) + \frac{c_P}{R} P_1 (V_D - V_C) \end{aligned} \tag{7.3.28}$$

Questa espressione è identica alla precedente, infatti sulle due adiabatiche

$$P_1 (V_B - V_C) = c_V (T_C - T_B) = \frac{c_V}{R} (P_1 V_C - P_2 V_B) \tag{7.3.29}$$

$$P_2 (V_D - V_A) = c_V (T_A - T_D) = \frac{c_V}{R} (P_2 V_A - P_1 V_D) \tag{7.3.30}$$

da cui otteniamo

$$\frac{c_P}{R} V_C P_1 = V_B \left(P_1 + \frac{c_V}{R} P_2\right) \tag{7.3.31}$$

$$\frac{c_P}{R} V_A P_2 = V_D \left(P_2 + \frac{c_V}{R} P_1\right) \tag{7.3.32}$$

che sostituite nella (7.3.28) danno

$$\begin{aligned}-L_{ext} &= \frac{c_P}{R}P_2V_B - \frac{c_P}{R}P_2V_A + \frac{c_P}{R}P_1V_D - \frac{c_P}{R}P_1V_C \\ &= \frac{c_P}{R}P_2V_B - V_D\left(P_2 + \frac{c_V}{R}P_1\right) + \frac{c_P}{R}P_1V_D - V_B\left(P_1 + \frac{c_V}{R}P_2\right) \\ &= V_B\left(\frac{c_P}{R}P_2 - P_1 - \frac{c_V}{R}P_2\right) + V_D\left(\frac{c_P}{R}P_1 - P_2 - \frac{c_V}{R}P_1\right) \\ &= V_B\left(P_2 - P_1\right) + V_D\left(P_1 - P_2\right) \end{aligned} \tag{7.3.33}$$

L'efficienza è quindi

$$\eta_{irr} = \frac{R}{c_P}(1-r)\frac{V_B - V_D}{V_B - V_A} \tag{7.3.34}$$

oppure

$$\eta_{irr} = 1 - r\frac{(V_C - V_D)}{(V_B - V_A)} \tag{7.3.35}$$

Sostituendo V_C e V_D otteniamo

$$\begin{aligned}\eta_{irr} &= 1 - \frac{r}{(V_B - V_A)}\left[\frac{R}{c_P}V_B\left(1 + \frac{c_V}{R}\frac{P_2}{P_1}\right) - \frac{c_P}{R}\frac{V_AP_2}{\left(P_2 + \frac{c_V}{R}P_1\right)}\right] \\ &= 1 - \frac{r}{(1-k)}\left[\frac{R}{c_P}\left(1 + \frac{c_V}{rR}\right) - \frac{c_P}{R}\frac{k}{\left(1 + r\frac{c_V}{R}\right)}\right] \\ &= 1 - \frac{1}{(1-k)}\left[\frac{(\gamma-1)r+1}{\gamma} + \frac{k}{\gamma - 1 + r}\right]\end{aligned} \tag{7.3.36}$$

Notare che $\eta_{irr} < \eta$ se $r > 0$ e $k > 0$:

$$\eta_{irr} = 1 - \frac{1}{(1-k)}\left[\frac{(\gamma-1)r+1}{\gamma} + \frac{k}{\gamma-1+r}\right] < 1 - \left[\frac{(\gamma-1)r+1}{\gamma}\right] < 1 - r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \eta \tag{7.3.37}$$

7.4. 8 giugno 2011

Problema 1 (15 punti)

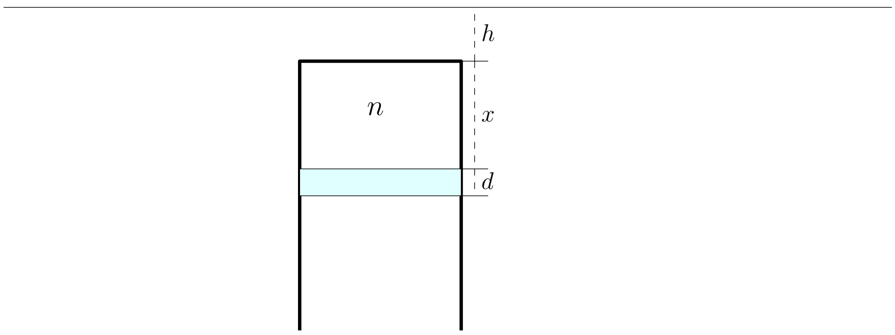
Una macchina termica è costituita da n moli di gas perfetto biatomico sottoposto al seguente ciclo di trasformazioni:

- $A \to B$ compressione isoterma reversibile;
- $B \to C$ espansione isobara reversibile;
- $C \to A$ trasformazione isocora reversibile.

Si sa che la temperatura lungo l'isoterma vale T_A e il rapporto tra il volume del gas in B e in A vale x (cioè $V_B/V_A = x$ con $x < 1$). Disegnare il ciclo di trasformazioni sul piano PV e determinare:

1. il lavoro totale fatto dal sistema nel ciclo;
2. il rendimento della macchina termica, ignorando la possibilità di restituire in modo reversibile parte del calore assorbito alle sorgenti;
3. la variazione di entropia in $A \to B$.

Problema 2 (15 punti)

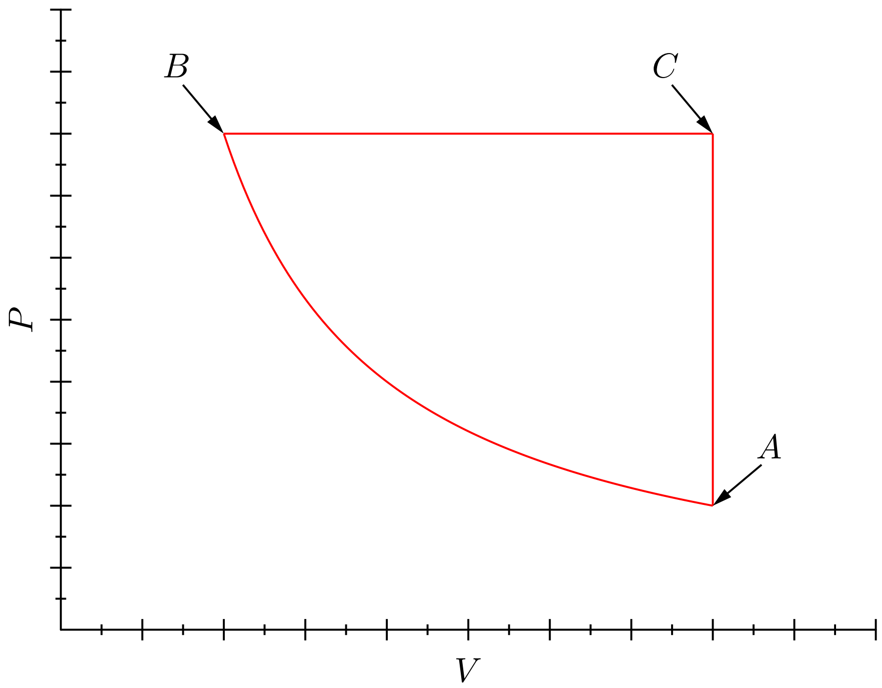


Il recipiente in figura è costituito da un cilindro di sezione S di massa e volume trascurabili, trasparente al calore, e da un pistone scorrevole di spessore d e densità ρ_p. Il cilindro contiene n moli di un gas perfetto. Il tutto è immerso in un liquido di densità ρ e temperatura T_0. Si può considerare la densità del gas trascurabile rispetto a quella del liquido, e $\rho_p > \rho$.

1. Inizialmente la parte superiore del recipiente si trova al pelo dell'acqua (cioè $h = 0$), Determinare il volume del gas, trascurando la pressione atmosferica.
2. Se $h = h^*$ il recipiente è in equilibrio. Calcolare h^*.
3. A partire dalla posizione di equilibrio si dà una leggera spinta verso l'alto al recipiente, e dopo un certo tempo si ha $h = 0$. Supponendo che il moto sia stato abbastanza lento da poter considerare istante per istante il gas all'equilibrio termodinamico, calcolare la sua variazione di entropia.

Soluzione primo problema

Domanda 1



Il ciclo è rappresentato in figura. Per il lavoro totale abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{AB} + \mathcal{L}_{BC} \\
&= \int_A^B P dV + P_B \left(V_A - V_B\right) \\
&= nRT_A \log \frac{V_B}{V_A} + nRT_A \left(\frac{V_A}{V_B} - 1\right) \\
&= nRT_A \left[\log x + \left(\frac{1-x}{x}\right)\right]
\end{aligned}$$

Domanda 2

Il rendimento vale

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_{BC}}$$

dove $\mathcal{L}$ è il lavoro calcolato in precedenza. Per Q_{BC} abbiamo

$$\begin{aligned}
Q_{BC} &= U_C - U_B + \mathcal{L}_{BC} \\
&= nc_v\left(T_C - T_A\right) + nRT_A\left(\frac{1-x}{x}\right) \\
&= nc_vT_A\left(\frac{T_C}{T_B} - 1\right) + nRT_A\left(\frac{1-x}{x}\right) \\
&= nc_vT_A\left(\frac{V_A}{V_B} - 1\right) + nRT_A\left(\frac{1-x}{x}\right) \\
&= nc_pT_A\left(\frac{1-x}{x}\right)
\end{aligned}$$

e quindi

$$\eta = \frac{R}{c_p}\left[1 + \frac{x}{1-x}\log x\right]$$

Domanda 3

Abbiamo

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{dQ}{T_A} = \frac{1}{T_A}\int_A^B PdV = nR\log\frac{V_B}{V_A} = nR\log x$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Dato che il pistone deve essere in equilibrio meccanico,

$$\rho g\left(x_0 + d\right) - \rho_p g d - P_0 = 0$$

dove x_0 è l'altezza della parte del cilindro occupata dal gas e $P_0 = nRT_0/(Sx_0)$ la sua pressione. Otteniamo un'equazione di secondo grado

$$x_0^2 + x_0 d\left(1 - \frac{\rho_p}{\rho}\right) - \frac{nRT_0}{\rho g S} = 0$$

da cui

$$\frac{x_0}{d} = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1\right)^2 + \frac{nRT_0}{\rho g S d^2}}$$

e quindi

$$V_0 = dS\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{\rho_p}{\rho}\right)^2 + \frac{nRT_0}{\rho g S d^2}}\right]$$

Domanda 2

Per l'equilibrio meccanico del pistone deve essere questa volta

$$\rho g \left(x_{h^*} + d + h^* \right) - \rho_p g d - \frac{nRT_0}{S x_{h^*}} = 0$$

e per il cilindro

$$\frac{nRT_0}{S x_{h^*}} - \rho g h^* = 0$$

Ricaviamo x_{h^*}

$$x_{h^*} = \frac{nRT_0}{S \rho g h^*}$$

e sostituendo nella prima relazione troviamo

$$h^* = \frac{nRT_0}{dS\rho g} \frac{1}{\left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right)}$$

che è positivo dato che $\rho_p > \rho$.

Domanda 3

Il volume occupato dal gas all'inizio sarà

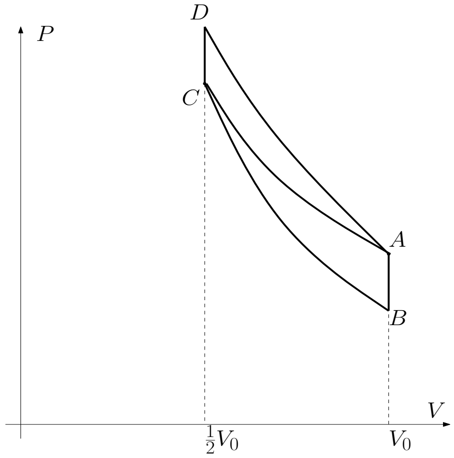
$$V_h = S x_{h^*} = dS \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right)$$

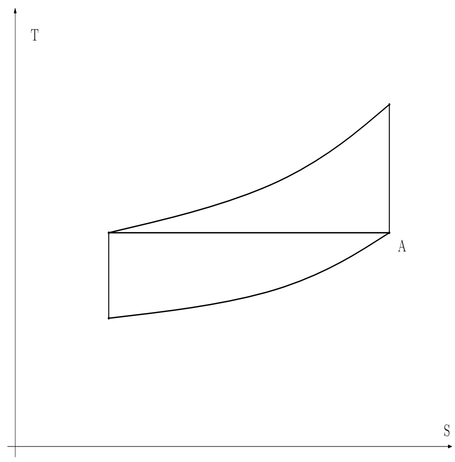
e all'arrivo alla superficie avremo nuovamente V_0. La variazione di entropia del gas sarà

$$\Delta S_g = nR \log \frac{V_0}{V_h} = nR \log \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{nRT_0}{\rho g S d^2} \left(\frac{\rho}{\rho_p - \rho} \right)^2} \right]$$

7.5. 28 maggio 2012

Problema 1 (15 punti)





Considerare le due diverse trasformazioni cicliche effettuate su una mole di gas perfetto monoatomico rappresentate nella figura a sinistra, $A \to B \to C \to A$ e $A \to C \to D \to A$.

Le trasformazioni $A \to B$ e $C \to D$ sono isocore che avvengono ai volumi V_0 e $V_0/2$ rispettivamente.

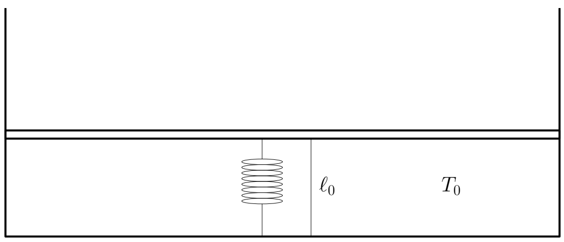
Le $B \to C$ e $D \to A$ sono adiabatiche e $C \to A$ è un'isoterma alla temperatura T_0.

1. Le stesse trasformazioni sono rappresentare nel piano $T - S$ nella figura a destra. Completate il diagramma indicando chiaramente la posizione degli stati B, C e D motivando la risposta. Inoltre determinate la forma analitica delle curve $C - D$ e $B - A$.

2. Calcolare i rendimenti dei due cicli.

3. Mostrare che per il rendimento η del ciclo $ABCDA$ vale $\eta = \eta_{ABCA} + \eta_{ACDA} - \eta_{ACDA}\eta_{ABCA}$. Si suggerisce di considerare i calori assorbiti e ceduti per ogni ciclo.

Problema 2 (15 punti)

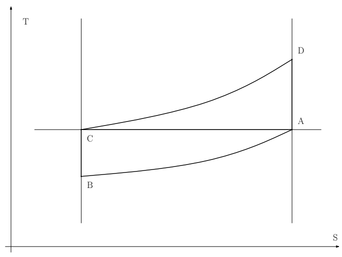


Un recipiente cilindrico è chiuso da un pistone scorrevole di sezione S, e contiene una mole di un gas perfetto inizialmente alla temperatura T_0. Recipiente e pistone sono impermeabili al calore. Il pistone è privo di massa ed è collegato al fondo del recipiente da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Il pistone è inizialmente bloccato in modo che la lunghezza della molla sia ℓ_0.

1. Si rimuove il blocco, lasciando il pistone libero di muoversi. Determinare la temperatura del gas quando si raggiunge nuovamente l'equilibrio termodinamico.
2. Calcolare la variazione di entropia del sistema, ΔS.
3. Trovare, se esiste, un valore di ℓ_0 per il quale ΔS si annulla e interpretare il risultato. Suggerimento: cercate il minimo di ΔS al variare di ℓ_0, e giustificate il risultato trovato a posteriori.

Soluzione primo problema

Domanda 1



Gli stati sono indicati in figura. Per costruire il diagramma si è usato il fatto che in una isocora ($C-D$ e $B-A$) la temperatura dipende esponenzialmente dall'entropia, infatti

$$dS = \frac{dQ}{T} = c_V \frac{dT}{T}$$

e quindi

$$T = K \exp\left(\frac{S}{c_V}\right)$$

Inoltre su un'isoterma l'entropia è una funzione crescente del volume, dato che

$$dS = \frac{PdV}{T} = nR\frac{dV}{V}$$

quindi A si trova a destra di C.

Domanda 2

L'efficienza per il ciclo $ACDA$ è data da

$$\eta_{ACDA} = \frac{Q_{CD} - Q_{iso}}{Q_{CD}} = 1 - \frac{Q_{iso}}{Q_{CD}}$$

dove Q_{iso} è il calore assorbito sull'isoterma CA e Q_{CD} quello assorbito sull'isocora CD. Quindi

$$\eta_{ACDA} = 1 - \frac{Q_{iso}}{Q_{CD}}$$

Invece per il ciclo $ABCA$ abbiamo

$$\eta_{ABCA} = \frac{Q_{iso} - Q_{BA}}{Q_{iso}} = 1 - \frac{Q_{BA}}{Q_{iso}}$$

dove Q_{BA} è il calore assorbito sull'isocora BA.

Abbiamo

$$\begin{aligned} Q_{iso} &= L_{iso} = RT_0 \log 2 \\ Q_{BA} &= c_V \left(T_0 - T_B\right) \\ Q_{CD} &= c_V \left(T_D - T_0\right) \end{aligned}$$

ma dato che B e C sono collegati da un'adiabatica

$$T_D \left(\frac{1}{2} V_0\right)^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1}$$

da cui

$$T_D = T_0 2^{\gamma-1}$$

Analogamente

$$T_B V_0^{\gamma-1} = T_0 \left(\frac{1}{2} V_0\right)^{\gamma-1}$$

e quindi

$$T_B = T_0 \frac{1}{2^{\gamma-1}}$$

Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned} \eta_{ACDA} &= 1 - \frac{R}{c_V} \frac{\log 2}{\left(2^{\gamma-1} - 1\right)} \\ &= 1 - \frac{\gamma - 1}{2^{\gamma-1} - 1} \log 2 \simeq 0.213 \\ \eta_{ABCA} &= 1 - \frac{c_V}{R} \frac{\left(2^{\gamma-1} - 1\right)}{2^{\gamma-1} \log 2} \\ &= 1 - \frac{1 - 2^{1-\gamma}}{\gamma - 1} \frac{1}{\log 2} \simeq 0.199 \end{aligned}$$

Domanda 3

Il rendimento del ciclo $ABCDA$ si scrive

$$\eta = 1 + \frac{Q_{AB}}{Q_{CD}}$$

ma dato che come visto in precedenza

$$Q_{iso}\left(\eta_{ABCA} - 1\right) = Q_{AB}$$

$$Q_{CD} = \frac{Q_{iso}}{1 - \eta_{ACDA}}$$

abbiamo

$$\eta = \eta_{ABCA} + \eta_{ACDA} - \eta_{ACDA}\eta_{ABCA}$$

Soluzione secondo problema

Domanda 1

Se la lunghezza della molla nello stato di equilibrio è ℓ_f, la sua energia potenziale sarà variata di

$$\Delta U_{molla} = \frac{k}{2}\left(\ell_f^2 - \ell_0^2\right)$$

e quella del gas di

$$\Delta U_{gas} = c_V\left(T_f - T_0\right)$$

Dato che non è stato ceduto calore al sistema e non è stato fatto lavoro su di esso $\Delta U_{molla} + \Delta U_{gas} = 0$, quindi

$$\frac{k}{2}\left(\ell_f^2 - \ell_0^2\right) + c_V\left(T_f - T_0\right) = 0$$

inoltre, imponendo l'equilibrio meccanico del pistone nella posizione finale, abbiamo

$$RT_f = P_f V_f = \left(\frac{k\ell_f}{S}\right)\left(S\ell_f\right) = k\ell_f^2$$

da cui

$$\frac{k}{2}\left(\frac{R}{k}T_f - \ell_0^2\right) + c_V\left(T_f - T_0\right) = 0$$

e quindi

$$T_f = \frac{c_V + \frac{k}{2T_0}\ell_0^2}{c_V + \frac{1}{2}R}T_0$$

Domanda 2

Confrontando le entropie del gas nei due stati abbiamo

$$\begin{aligned}
\Delta S &= c_V \log \frac{T_f}{T_0} + R \log \frac{V_f}{V_0} \\
&= c_V \log \frac{T_f}{T_0} + \frac{1}{2} R \log \frac{\ell_f^2}{\ell_0^2} \\
&= \left(c_V + \frac{1}{2} R\right) \log \frac{T_f}{T_0} + \frac{1}{2} R \log \frac{RT_0}{k\ell_0^2} \\
&= \left(c_V + \frac{1}{2} R\right) \log \frac{c_V + \frac{k}{2T_0}\ell_0^2}{c_V + \frac{1}{2}R} + \frac{1}{2} R \log \frac{nRT_0}{k\ell_0^2}
\end{aligned}$$

Domanda 3

Dato che deve essere $\Delta S \geq 0$ minimizziamo l'espressione determinata precedentemente rispetto a ℓ_0^2. Abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial \ell_0^2} \Delta S = \left(c_V + \frac{1}{2} R\right) \frac{\frac{k}{2T_0}}{c_V + \frac{k}{2T_0}\ell_0^2} - \frac{R}{2} \frac{1}{\ell_0^2}$$

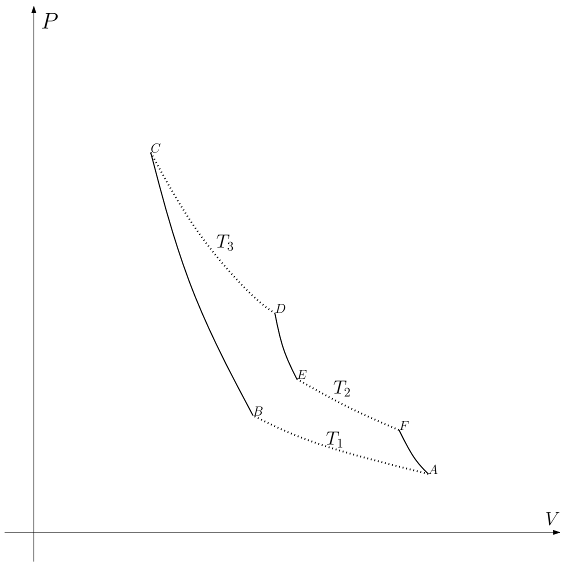
che si annulla per

$$k\ell_0^2 = RT_0$$

Sostituendo in ΔS troviamo che in questo caso $\Delta S = 0$. Il risultato poteva essere anticipato, osservando che per questo valore di ℓ_0 il sistema è in equilibrio meccanico anche inizialmente, per cui rimuovendo il blocco non si ha nessun cambiamento dello stato del gas.

7.6. 28 maggio 2013

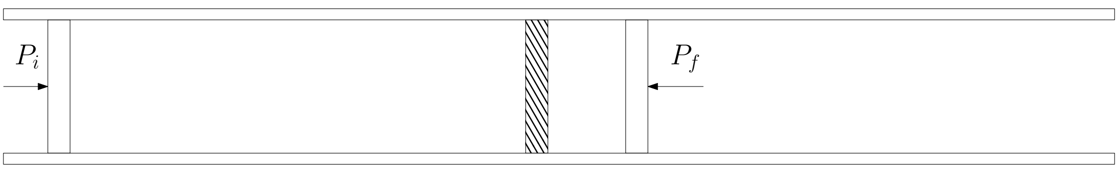
Problema 1 (15 punti)



Si esegue su una mole di un gas perfetto monoatomico la trasformazione ciclica reversibile rappresentata in figura nel piano $P-V$. Il ciclo è composto dalle tre trasformazioni adiabatiche BC, DE, FA (linea continua) e dalle tre isoterme AB, CD, EF (linea punteggiata). Si conoscono le tre temperature $T_1 < T_2 < T_3$ e si conoscono le entropie S_A e $S_B < S_A$ degli stati A e B

1. Rappresentare il ciclo nel piano $T-S$, per un valore generico dell'entropia dello S_D dello stato D nell'intervallo $S_B \leq S_D \leq S_A$
2. Per quale valore di S_D il rendimento del ciclo è massimo?
3. Calcolare il rendimento del ciclo in funzione delle tre temperature e della variabile $x = (S_D - S_B) / (S_A - S_B)$.

Problema 2 (15 punti)



Il cilindro in figura è diviso in due parti da un setto poroso. Il cilindro è poi chiuso ai due estremi da due pistoni mobili. Pistoni e cilindro sono impermeabili al calore. Il pistone di sinistra è sottoposto ad una pressione esterna costante P_i, quello di destra ad una pressione esterna anche essa costante $P_f < P_i$. Inizialmente una mole di un gas non ideale caratterizzato dalla equazione di stato

$$P = \frac{RT}{V}\left(1 + \frac{\beta}{V}\right)$$

con $\beta > 0$ e dalla energia interna

$$U = c_V T$$

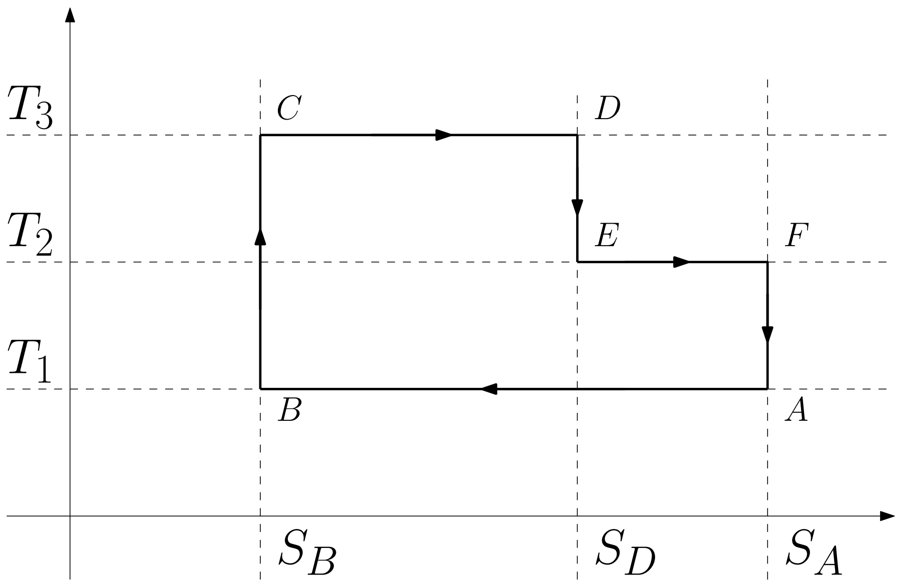
si trova interamente nello scomparto di sinistra. Il setto è sigillato, ed il gas è in equilibrio alla temperatura T_i.

1. Calcolare il volume iniziale del gas.
2. Determinare l'espressione generale dell'entalpia del gas considerato, ed esprimerla in funzione di P e T.
3. Si toglie il sigillo al setto, permettendo al gas si attraversarlo. Calcolare la sua temperatura nello stato finale di equilibrio, assumendo che β sia abbastanza piccolo da poter trascurare effetti $O\left(\beta^2\right)$. Può essere utile ricordare l'approssimazione valida per $x \ll 1$ $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + O(x^2)$.

Soluzione primo problema

Prima domanda

Nel piano $T - S$ le adiabatiche sono rette verticali, le isoterme rette orizzontali. La rappresentazione del ciclo è quindi la seguente



Seconda domanda

Il rendimento massimo si ottiene per $S_D = S_A$, in questo caso infatti ci riduciamo a un ciclo di Carnot tra le temperature estreme T_1 e T_3.

Terza domanda

Tenuto conto che il lavoro compiuto dal sistema è l'area all'interno del ciclo, e il calore assorbito quella sotto la spezzata CDE, possiamo scrivere l'efficienza nella forma

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{T_3\left(S_D-S_B\right)+T_2\left(S_A-S_D\right)-T_1\left(S_A-S_B\right)}{T_3\left(S_D-S_B\right)+T_2\left(S_A-S_D\right)}\\ &= 1-\frac{T_1\left(S_A-S_B\right)}{\left(T_3-T_2\right)S_D+T_2S_A-T_3S_B}\\ &= 1-\frac{T_1\left(S_A-S_B\right)}{T_3\left(S_D-S_B\right)+T_2\left(S_A-S_B+S_B-S_D\right)}\\ &= 1-\frac{T_1}{xT_3+\left(1-x\right)T_2}\end{aligned}$$

L'efficienza massima nell'intervallo considerato si ottiene per $x=1$, come nella prima domanda. Quella minima per $x=0$.

Soluzione secondo problema

Prima domanda

Dall'equazione di stato abbiamo

$$P_i=\frac{RT_i}{V_i}\left(1+\frac{\beta}{V_i}\right)$$

$$\frac{1}{V_i^2}+\frac{1}{\beta}\frac{1}{V_i}-\frac{P_i}{\beta RT_i}=0$$

e risolvendo per $\frac{1}{V_i}$ troviamo

$$\frac{1}{V_i}=-\frac{1}{2\beta}+\sqrt{\frac{1}{4\beta^2}+\frac{P_i}{\beta RT_i}}$$

Seconda domanda

Dalla definizione di entalpia abbiamo

$$\begin{aligned}H &= U+PV=c_VT+RT\left(1+\frac{\beta}{V}\right)\\ &= \left(c_V+\frac{R}{2}\right)T+RT\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\beta P}{RT}}\end{aligned}$$

Terza domanda

Dal primo principio abbiamo

$$U_f - U_i = P_i V_i - P_f V_f$$

e quindi $H_i = H_f$. Usando l'espressione determinata precedentemente otteniamo

$$\left(c_V + \frac{R}{2}\right) T_i + R T_i \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\beta P_i}{R T_i}} = \left(c_V + \frac{R}{2}\right) T_f + R T_f \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\beta P_f}{R T_f}}$$

che sarebbe possibile risolvere esplicitamente in T_f. Trascurando termini $O\left(\beta^2\right)$ si può approssimare l'espressione precedente nella forma

$$\left(c_v + R\right) T_i + \beta P_i = \left(c_v + R\right) T_f + \beta P_f$$

da cui

$$T_f = T_i + \frac{\beta}{c_v + R}\left(P_i - P_f\right)$$

e quindi la temperatura aumenta.

7.7. 9 Maggio 2014

Un recipiente di volume V_0, con pareti termicamente isolanti, è diviso in due parti A e B (siano indicati con V_A e V_B i rispettivi volumi) da un pistone perfettamente scorrevole e di capacità termica trascurabili, anch'esso adiabatico.

In A sono contenute n_A moli di un gas ideale biatomico alla temperatura iniziali T_{Ai}; in B sono contenute n_B moli dello stesso gas a temperatura iniziale T_B (sia $T_{Ai} > T_{Bi}$).

Inizialmente il sistema è in equilibrio termodinamico.

Successivamente nel pistone si verifica una perdita di isolamento termico e calore inizia a fluire da A a B, finché il sistema raggiunge di nuovo l'equilibrio termodinamico.

Calcolare:

1. I volumi iniziale V_{Ai} e V_{Bi};
2. La temperatura finale T_f;
3. I volumi finali V_{Af} e V_{Bf};
4. La variazione complessiva dell'entropia dell'universo;

Si supponga ora che la falla dell'isolamento termico sia molto piccola, per cui si può considerare che, istante per istante, durante la trasformazione sussista l'equilibrio meccanico e, per ciascuno scompartimento considerato separatamente dall'altro, l'equilibrio termico.

5. Calcolare le pressioni dei gas durante la trasformazione in funzione della temperatura T_B del secondo scomparto;
6. Determinare $c = dQ/dT_B$ dove Q è il calore assorbito dal secondo comparto in funzione di T_B;
7. (*facoltativo*) Quanto lavoro si potrebbe complessivamente estrarre dal sistema (con pistone isolante), supponendo di avere a disposizione macchine cicliche che possono essere messe in contatto termico con i comparti, senza ricorrere a sorgenti termiche esterne? (per semplicità supporre in questo caso $n_A = n_B$).

Soluzione

Prima domanda

Sappiamo che le pressioni dei due scomparti sono le stesse, e che il volume totale è V_0. Possiamo scrivere quindi le due equazioni

$$\frac{n_A R T_A}{V_A} = \frac{n_B R T_B}{V_B}$$
$$V_A + V_B = V_0$$

Risolvendo il sistema e ponendo i parametri al loro valore iniziale otteniamo

$$\begin{aligned} V_{Ai} &= \frac{n_A T_{Ai}}{n_A T_{Ai} + n_B T_{Bi}} V_0 \\ V_{Bi} &= \frac{n_B T_{Bi}}{n_A T_{Ai} + n_B T_{Bi}} V_0 \end{aligned}$$

Seconda domanda

Dato che il sistema complessivo è isolato, la sia energia si conserva. Quindi

$$n_A c_v T_{Ai} + n_B c_V T_{Bi} = n_A c_V T_f + n_B c_V T_f$$

da cui

$$T_f = \frac{n_A T_{Ai} + n_B T_{Bi}}{n_A + n_B}$$

Terza domanda

L'espressione per i volumi ottenuta nel primo esercizio è valida anche nello stato finale. Sostituendo le temperature finali abbiamo quindi

$$\begin{aligned} V_{Af} &= \frac{n_A}{n_A + n_B} V_0 \\ V_{Bf} &= \frac{n_B}{n_A + n_B} V_0 \end{aligned}$$

Quarta domanda

Si può direttamente valutare la variazione dell'entropia sommando i contributi dei due gas:

$$\Delta S = n_A c_v \log \frac{T_f}{T_{Ai}} + n_A R \log \frac{V_{Ai}}{V_{Af}} + n_B c_v \log \frac{T_f}{T_{Bi}} + n_B R \log \frac{V_{Bi}}{V_{Bf}}$$

e sostituendo i valori ottenuti precedentemente abbiamo

$$\begin{aligned} \Delta S &= n_A c_v \log \frac{n_A T_{Ai} + n_B T_{Bi}}{T_{Ai}\left(n_A + n_B\right)} + n_A R \log \frac{n_A T_{Ai} + n_B T_{Bi}}{\left(n_A + n_B\right) T_{Ai}} \\ &+ n_B c_v \log \frac{n_A T_{Ai} + n_B T_{Bi}}{T_{Bi}\left(n_A + n_B\right)} + n_B R \log \frac{n_A T_{Ai} + n_B T_{Bi}}{\left(n_A + n_B\right) T_{Bi}} \\ &= n_A c_P \log \frac{n_A T_{Ai} + n_B T_{Bi}}{T_{Ai}\left(n_A + n_B\right)} + n_B c_p \log \frac{n_A T_{Ai} + n_B T_{Bi}}{T_{Bi}\left(n_A + n_B\right)} \end{aligned}$$

Quinta domanda

Dato che le pressioni dei due scomparti sono sempre le stesse possiamo scrivere

$$PV_A = n_A R T_A$$
$$PV_B = n_B R T_B$$

Sommando membro a membro otteniamo

$$PV_0 = n_A R T_A + n_B R T_B = \frac{R}{c_v} U$$

dove U è l'energia interna. Dato che quest'ultima è costante, lo è anche la pressione, ed avremo

$$P = \frac{n_A R T_{Ai} + n_B R T_{Bi}}{V_0}$$

Sesta domanda

Dato che la pressione nel secondo scomparto è costante, dovrà essere

$$c = \frac{dQ}{dT_B} = n_B c_P$$

Settima domanda

Detti dQ_A e dQ_B i calori ceduti ai due scomparti in una trasformazione ciclica infinitesima avremo (poniamo $n = n_A = n_B$)

$$W = -Q_A - Q_B$$

D'altra parte

$$dQ_A + dQ_B = dU_A + dU_B$$

e quindi

$$Q_A + Q_B = \Delta U = n c_v \left(2T_f - T_{Ai} - T_{Bi}\right)$$

e quindi

$$W = n c_V \left(T_{Ai} + T_{Bi} - 2T_f\right)$$

Resta da calcolare la temperatura finale. La variazione di entropia del sistema sarà

$$\Delta S = n c_V \log \frac{T_f}{T_{Ai}} + nR \log \frac{V_{Af}}{V_{Ai}} + n c_V \log \frac{T_f}{T_{Bi}} + nR \log \frac{V_{Bf}}{V_{Bi}}$$

ossia

$$\frac{(T_{Ai} + T_{Bi})^2}{4 T_{Ai} T_{Bi}}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta S &= nc_V \log \frac{T_f^2}{T_{Ai}T_{Bi}} + nR \log \frac{V_{Af}V_{Bf}}{V_{Ai}V_{Bi}} \\
&= nc_V \log \frac{T_f^2}{T_{Ai}T_{Bi}} + nR \log \frac{(T_{Ai}+T_{Bi})^2}{4T_{Ai}T_{Bi}}
\end{aligned}
$$

Per estrarre la massima quantità di lavoro si deve cercare di rendere T_f più piccola possibile, e dall'equazione precedente si vede che questo significa prendere il minimo di ΔS, cioè $\Delta S = 0$. Segue che

$$
T_f = \sqrt{T_{Ai}T_{Bi}} \left(\frac{2\sqrt{T_{Ai}T_{Bi}}}{T_{Ai}+T_{Bi}} \right)^{\frac{R}{c_V}}
$$

e quindi

$$
W = 2nc_V \left[\frac{T_{Ai}+T_{Bi}}{2} - (T_{Ai}T_{Bi})^{\gamma/2} \left(\frac{2}{T_{Ai}+T_{Bi}} \right)^{\gamma-1} \right]
$$

7.8. 22 Maggio 2015

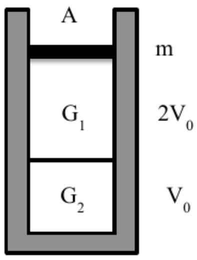


Figura 7.1.: Il sistema termodinamico considerato nel problema.

Un sistema termodinamico è costituito da n moli di gas ideale biatomico G_2 e n moli di gas ideale monoatomico G_1. I gas sono contenuti in un cilindro verticale con sezione di area A e sono separati da un setto mobile orizzontale di massa trascurabile (e area A), permeabile al calore. Un pistone di massa m chiude in alto il cilindro. G_1 occupa lo spazio tra il pistone e il setto, inizialmente di volume $2V_0$, mentre G_2 occupa lo spazio tra il setto e il fondo del cilindro, inizialmente di volume V_0. Un meccanismo permette di esercitare dall'esterno una forza verticale sul setto di separazione. L'atmosfera esterna, a temperatura T_{atm}, costituisce l'unica sorgente termica disponibile. Nel seguito si trascuri completamente la pressione atmosferica sul pistone. Sia il setto che il pistone possono scorrere senza attrito lungo il cilindro. Inizialmente il sistema è mantenuto in equilibrio termodinamico mediante una opportuna forza esterna applicata al setto.

Si supponga che il cilindro e il pistone siano isolanti termici ideali.

1. Determinare la forza esterna (vettore) applicata inizialmente al setto.
2. Improvvisamente si lascia andare il setto (forza nulla applicata dall'esterno). Determinare la temperatura finale del sistema quando si raggiunge il nuovo equilibrio termodinamico.
3. Calcolare la variazione di entropia dell'universo causata dalla trasformazione del punto precedente 2.
4. Determinare il lavoro massimo che potrebbe essere ottenuto, portando il sistema allo stesso stato finale del punto 2, con opportune macchine termiche cicliche che usino l'unica sorgente termica disponibile.
5. Descrivere schematicamente un apparato, e il suo funzionamento, necessario per ottenere il lavoro del punto precedente 4.
6. Si supponga ora che, al contrario, il cilindro sia permeabile al calore e che, anche in questo caso, il sistema sia inizialmente in equilibrio termodinamico. Determinare la variazione di entropia dell'universo quando si lascia improvvisamente libero il setto e si raggiunge il nuovo equilibrio.

Soluzione

Prima domanda

Dall'equilibrio meccanico del pistone nella direzione verticale segue che

$$P_1 A - mg = 0$$

e da quello del setto intermedio

$$-P_1 A + F_y + P_2 A = 0$$

dove F_y è la componente verticale della forza applicata. Dato che la temperatura dei due gas è la stessa, abbiamo inoltre

$$P_1 2V_0 = P_2 V_0$$

e quindi

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{mg}{A} \\ P_2 &= 2P_1 = \frac{2mg}{A} \end{aligned}$$

Infine

$$F_y = \frac{P_1 - P_2}{A} = -mg$$

Seconda domanda

Si conserva l'energia totale del sistema, data dalla somma dell'energia interna dei due gas e dell'energia potenziale gravitazionale del pistone. Allora

$$nc_{V1}T_0 + nc_{V2}T_0 + mg\frac{3V_0}{A} = nc_{V1}T_f + nc_{V2}T_f + mg\frac{V_1 + V_2}{A}$$

Dall'equazione di stato applicata a G_1 nello stato iniziale abbiamo

$$2V_0 P_1 = nRT_0$$

ossia

$$\frac{mgV_0}{A} = \frac{nRT_0}{2}$$

Nello stato finale la pressione dei due gas è la stessa, dato che sul setto intermedio non è applicata alcuna forza esterna, e vale mg/A. Quindi

$$V_1 \frac{mg}{A} = V_2 \frac{mg}{A} = nRT_f$$

Sostituendo nella conservazione dell'energia otteniamo

$$n\left(c_{V1}+c_{V2}+\frac{3}{2}R\right)T_0 = n\left(c_{V1}+c_{V2}+2R\right)T_f$$

e quindi

$$T_f = \frac{\frac{3}{2}R+\frac{5}{2}R+\frac{3}{2}R}{\frac{3}{2}R+\frac{5}{2}R+2R}T_0 = \frac{11}{12}T_0$$

Terza domanda

Abbiamo

$$\Delta S_{sys} = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

dove

$$\begin{aligned}
\Delta S_1 &= nc_{V1}\log\frac{T_f}{T_0} + nR\log\frac{V_1}{2V_0} \\
\Delta S_1 &= nc_{v2}\log\frac{T_f}{T_0} + nR\log\frac{V_2}{V_0}
\end{aligned}$$

Sommando i due termini otteniamo

$$\begin{aligned}
\Delta S_{sys} &= n\left(c_{V1}+c_{V2}\right)\log\frac{11}{12} + nR\log\frac{V_1V_2}{2V_0^2} \\
&= 4nR\log\frac{11}{12} + nR\log\frac{V_1V_2}{2V_0^2}
\end{aligned}$$

Dato che

$$V_1 = V_2 = \frac{A}{mg}nRT_f = \frac{11}{12}\frac{A}{mg}nRT_0 = \frac{11}{6}V_0$$

abbiamo infine

$$\Delta S_{sys} = nR\log\left[\frac{1}{2}\left(\frac{11}{6}\right)^2\left(\frac{11}{12}\right)^4\right] = 6nR\log\left(\frac{11}{12}\sqrt[6]{2}\right)$$

Quarta domanda

Indicando con Q_{sys} il calore assorbito dal sistema costituito dai due gas e dal pistone e con L_{sys} il lavoro fatto da esso abbiamo

$$Q_{sys} = \Delta U_{sys} + L_{sys}$$

Indichiamo con Q_{atm} il calore ceduto alla sorgente termica. Gli scambi di calore sono controllati da una macchina termica ciclica che produce un lavoro

$$W_m = -Q_{sys} - Q_{atm}$$

Il lavoro totale che si ottiene è dato da

$$W = W_m + L_{sys} = -Q_{atm} - \Delta U_{sys}$$

Detta ΔS la variazione totale di entropia dell'universo, abbiamo

$$\Delta S = \Delta S_{sys} + \frac{Q_{atm}}{T_{atm}}$$

cioè

$$Q_{atm} = T_{atm}\Delta S - T_{atm}\Delta S_{sys}$$

e sostituendo troviamo

$$W = -T_{atm}\Delta S + T_{atm}\Delta S_{sys} - \Delta U_{sys}$$

Il lavoro massimo si ottiene procedento in modo reversibile: in questo caso $\Delta S = 0$ e

$$W = T_{atm}\Delta S_{sys} - \Delta U_{sys}$$

La variazione di entropia è stata calcolata precedentemente, e come abbiamo visto $\Delta U_{sys} = 0$, quindi

$$W = T_{atm}\Delta S_{sys}$$

Quinta domanda

Dapprima si fa un'espansione di G_2 (e, simultaneamente e automaticamente, una compressione di G_1) riducendo lentamente il modulo della forza esterna sul setto fino a zero senza scambi termici con l'esterno, ottenendone un lavoro L_1. Poi si fa lavorare una macchina termica reversibile tra T_{atm} e i gas G_i (motore o frigorifero a seconda che la temperatura dei gas sia minore o, rispettivamente, maggiore di T_{atm}) finché l'energia restituita ai gas sotto forma di calore sia pari a L_1e la temperatura dei gasi sia pari a T. Poiché in questo caso la variazione di entropia dell'universo è nulla (reversibilità), complessivamente sarà stata estratta dall'atmosfera una quantità di calore $Q_{max} = T_{atm}\Delta S_{sys}$, tutta convertita in lavoro.

Sesta domanda

In questo caso $T_{atm} = T_0$ e lo stato finale di G_1 coincide con quello iniziale, con variazione di entropia nulla. Per G_2, invece, lo stato finale diventa uguale a quello di G_1, partendo da un volume metà, con variazione di entropia

$$\Delta S_2 = nR \log \frac{2V_0}{V_0} = nR \log 2$$

Infine l'atmosfera subisce una variazione di entropia determinata dal calore Q ceduto ai gas:

$$\Delta S_{atm} = -\frac{Q}{T_{atm}} = -\frac{Q}{T_0}$$

Il calore ceduto ai gas è esattamente pari al lavoro fatto sul pistone, dato che $\Delta U_{gas} = 0$, quindi

$$Q = mg\Delta z = mg\frac{V_0}{A}$$

In conclusione

$$\Delta S_{atm} = -\frac{Q}{T_0} = -mg\frac{V_0}{A}\frac{nRA}{2mgV_0} = -\frac{1}{2}nR$$

e

$$\Delta S = \Delta S_2 + \Delta S_{atm} = nR\left(\log 2 - \frac{1}{2}\right) > 0$$

7.9. 23 maggio 2016

Problema 1

Su n moli di un gas perfetto monoatomico viene eseguita la seguente trasformazione ciclica:

- Una compressione isoterma reversibile $A \to B$, alla temperatura T_1, fino al volume finale noto V^*.
- Una trasformazione isocora $B \to C$ ottenuta mettendo il gas in contatto con un bagno termico alla temperatura $T_2 > T_1$. Il calore viene fatto fluire lentamente in modo che istante per istante lo stato termodinamico del gas sia ben definito e si attende l'equilibrio.
- Una trasformazione adiabatica reversibile $C \to A$.

1. Determinare il volume V_A, in funzione delle quantità note T_1, T_2 e V^*.
2. Calcolare il rendimento del ciclo.
3. Calcolare la variazione dell'entropia dell'universo ΔS_u dopo un ciclo.

Problema 2

Un sistema termodinamico è costituito da due corpi con capacità termiche dipendenti linearmente dalla temperatura, e uguali rispettivamente a $C_1 = \beta T$ e $C_2 = 3\beta T$, dove β è una opportuna costante. Inizialmente il primo corpo si trova alla temperatura T_0, ed il secondo ad una temperatura doppia.

1. Se i due corpi vengono messi a contatto tra di loro, determinare la temperatura finale del sistema.
2. Determinare la massima temperatura che è possibile far raggiungere al secondo corpo operando sul sistema. Si possono utilizzare altri sistemi termodinamici durante la trasformazione, ma alla fine l'energia e l'entropia di questi deve essere invariata.
3. Seguendo le stesse regole, determinare la massima temperatura che è possibile far raggiungere al primo corpo.

Soluzione problema 1

Domanda 1

Dato che lo stato A è collegato allo stato B da una isoterma deve essere

$$P_A V_A = nRT_1$$

mentre per lo stato C avremo

$$P_C (V^*)^\gamma = P_A V_A^\gamma$$

e

$$P_C V^* = nRT_2$$

Utilizzando la prima e la terza equazione per eliminare le pressioni nella seconda troviamo

$$nRT_2 (V^*)^{\gamma-1} = nRT_1 V_A^{\gamma-1}$$

e quindi

$$\boxed{V_A = V^* \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$

Domanda 2

Il calore viene assorbito dal sistema nella trasformazione isocora. Il totale vale

$$Q_{ass} = nc_V (T_2 - T_1)$$

Il gas fa un lavoro positivo durante la trasformazione adiabatica uguale a

$$L_{ad} = -\Delta U = nc_V (T_2 - T_1)$$

e negativo durante l'isoterma, uguale a

$$L_{iso} = \int PdV = nRT_1 \log\left(\frac{V^*}{V_A}\right)$$

Abbiamo in tutto

$$\eta = \frac{L_{ad} + L_{iso}}{Q_{ass}} = 1 - \frac{RT_1 \log\left(\frac{V_A}{V^*}\right)}{c_V (T_2 - T_1)}$$

cioè

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2 - T_1} \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}$$

Domanda 3

Dato che dopo un ciclo l'entropia del gas non è cambiata, è sufficiente calcolare la variazione dell'entropia delle sorgenti. Durante l'isocora

$$\Delta S_{sorgenti,isocora} = -\frac{Q_{ass}}{T_2} = -nc_V \frac{T_2 - T_1}{T_2}$$

Durante l'isoterma

$$\Delta S_{sorgenti,isoterma} = -\Delta S_{gas,isoterma} = -nR\log\frac{V^*}{V_A} = nc_V\log\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Abbiamo quindi

$$\boxed{\Delta S_u = nc_V\left[\log\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{T_1}{T_2} - 1\right]}$$

Soluzione problema 2

Calcoliamo preliminarmente la forma dell'entropia e dell'energia interna dei corpi. Per il primo abbiamo

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{\beta T}{T}dT$$

da cui, a meno di una costante, abbiamo

$$S = \beta T$$

In modo analogo si ottiene $S = 3\beta T$ per il secondo corpo. Per quanto riguarda l'energia interna

$$dU = dQ = \beta T dT$$

e quindi, sempre a meno di una costante

$$U = \frac{1}{2}\beta T^2$$

Per il secondo corpo sarà $U = \frac{3}{2}\beta T^2$.

Domanda 1

Si conserva l'energia del sistema, che è data da

$$U = \frac{1}{2}\beta T_1^2 + \frac{3}{2}\beta T_2^2$$

Di conseguenza

$$\beta T_0^2 + 12\beta T_0^2 = 4\beta T_f^2$$

e

$$\boxed{T_f = \sqrt{\frac{13}{4}}T_0}$$

Domanda 2

Il secondo corpo è quello che si trova alla temperatura più alta inizialmente. Non è quindi possibile far salire ulteriormente la sua temperatura, e quindi

$$\boxed{T_{2,max} = 2T_0}$$

Domanda 3

Alla fine delle trasformazione l'energia del sistema non sarà cambiata, quindi

$$\frac{1}{2}\beta\left(T_1^2 - T_0^2\right) = \frac{3}{2}\beta\left(4T_0^2 - T_2^2\right)$$

cioè

$$\left(T_1 - T_0\right)\left(T_1 + T_0\right) = 3\left(2T_0 - T_2\right)\left(2T_0 + T_2\right)$$

Operando reversibilmente avremo inoltre $\Delta S = 0$, quindi

$$\beta\left(T_1 - T_0\right) = 3\beta\left(2T_0 - T_2\right)$$

Dividendo membro a membro le equazioni precedenti otteniamo infine

$$\begin{aligned}\left(T_1 - T_0\right) &= 3\left(2T_0 - T_2\right)\\ \left(T_1 + T_0\right) &= \left(2T_0 + T_2\right)\end{aligned}$$

Risolvendo abbiamo

$$\boxed{T_{1,max} = \frac{5}{2}T_0}$$

7.10. 26 maggio 2017

Problema

Un elastico di lunghezza ℓ può essere descritto per piccoli allungamenti dall'equazione di stato

$$\tau = \alpha T \left(\ell - \ell_0\right)$$

dove τ è la tensione, T la temperatura ℓ_0 la lunghezza a riposo e α una costante positiva dalle opportune dimensioni. L'energia interna è indipendente dalla lunghezza, e supporremo

$$U = \beta T$$

dove β è un'altra costante positiva.

1. L'elastico viene allungato quasistaticamente a temperatura costante, passando da $\ell = \ell_0$ a $\ell = 2\ell_0$. Calcolare il lavoro che è stato fatto su di esso.

2. Calcolare la relazione tra τ e ℓ che caratterizza una trasformazione adiabatica reversibile.

3. In una espansione adiabatica reversibile, per $\ell > \ell_0$, la temperatura aumenta o diminuisce?

4. Calcolare la capacità termica C_ℓ dell'elastico a ℓ fissata e quella C_τ a tensione costante.

5. Esprimere l'entropia dell'elastico in funzione di ℓ e U, a meno di una costante arbitraria. In un allungamento isotermo dell'elastico (sempre per $\ell > \ell_0$), che si può ottenere mantenendo l'elastico in equilibrio con l'ambiente, l'entropia aumenta o diminuisce?

6. L'elastico si trova inizialmente a una temperatura T_0 ed è appeso ad un estremo in assenza di tensione. Si appende adesso all'altro estremo una massa M e si attende che si ristabilisca l'equilibrio. Assumendo che la trasformazione sia adiabatica, calcolare la temperatura e la variazione della lunghezza.

Soluzioni

Domanda 1

Il lavoro fatto sull'elastico vale

$$W = \int \tau d\ell$$

di conseguenza abbiamo

$$\begin{aligned} W &= \alpha T \int_{\ell_0}^{2\ell_0} (\ell - \ell_0)\, d\ell \\ &= \frac{1}{2}\alpha T \ell_0^2 \end{aligned}$$

Domanda 2

Per il sistema considerato il primo principio si può scrivere nella forma

$$\delta Q = dU + \delta L = \beta dT - \tau d\ell$$

Per un'adiabatica reversibile $\delta Q = 0$, quindi

$$\beta dT = \alpha T (\ell - \ell_0)\, d\ell \tag{7.10.1}$$

che si integra direttamente scrivendo

$$\beta \frac{dT}{T} = \alpha (\ell - \ell_0)\, d\ell$$

e quindi

$$\log T = \frac{\alpha}{2\beta} (\ell - \ell_0)^2 + K$$

dove K è una costante di integrazione. Infine

$$T = \frac{\tau}{\alpha (\ell - \ell_0)} = K' e^{\frac{\alpha}{2\beta}(\ell-\ell_0)^2}$$

cioè

$$\tau = A (\ell - \ell_0)\, e^{\frac{\alpha}{2\beta}(\ell-\ell_0)^2}$$

Domanda 3

Possiamo utilizzare direttamente l'equazione (7.10.1). Dato che per $\ell > \ell_0$ il fattore di proporzionalità tra dT e $d\ell$ è positivo

$$dT = \frac{\alpha}{\beta} T (\ell - \ell_0)\, d\ell \tag{7.10.2}$$

la temperatura aumenterà al crescere di ℓ.

Domanda 4

Se ℓ è fissato

$$\delta Q = \beta dT$$

e quindi

$$C_\ell = \beta$$

Invece a tensione costante

$$\begin{aligned}
\delta Q &= \beta dT - \tau d\ell \\
d\tau &= \alpha\left(\ell - \ell_0\right) dT + \alpha T d\ell = 0
\end{aligned}$$

Dalla seconda equazione si ottiene

$$d\ell = -\frac{dT}{T}\left(\ell - \ell_0\right)$$

e sostituendo nella prima

$$\delta Q = \left[\beta + \alpha\left(\ell - \ell_0\right)^2\right] dT$$

In conclusione

$$C_\tau = \beta + \alpha\left(\ell - \ell_0\right)^2$$

Domanda 5

Abbiamo

$$dS = \beta\frac{dT}{T} - \alpha\left(\ell - \ell_0\right) d\ell$$

Integrando otteniamo

$$\begin{aligned}
S &= \beta \log\frac{T}{T_0} - \frac{\alpha}{2}\left(\ell - \ell_0\right)^2 \\
&= \beta \log\frac{U}{U_0} - \frac{\alpha}{2}\left(\ell - \ell_0\right)^2
\end{aligned}$$

dove T_0 o U_0 giocano il ruolo di una costante di integrazione. Vediamo anche che a temperatura costante

$$dS = -\alpha\left(\ell - \ell_0\right) d\ell$$

e quindi l'entropia dell'elastico diminuisce durante l'allungamento isotermo.

Domanda 6

Possiamo considerare l'energia totale del sistema composto dall'elastico e dalla massa. Dato che nello stato di equilibrio iniziale e finale l'energia cinetica è nulla, l'energia potenziale deve essere la stessa. Quindi

$$\beta T_0 = \beta T_f - Mg\left(\ell_f - \ell_0\right)$$

D'altra parte nello stato finale

$$\tau = \alpha T_f\left(\ell_f - \ell_0\right) = Mg$$

e sostituendo troviamo

$$\beta T_0 = \beta T_f - \frac{M^2 g^2}{\alpha T_f}$$

Risolvendo l'equazione abbiamo

$$T_f = \frac{1}{2}\left[T_0 + \sqrt{T_0^2 + \frac{4M^2g^2}{\alpha\beta}}\right]$$

e

$$\ell_f - \ell_0 = \frac{Mg}{\alpha T_f} = \frac{2Mg}{\alpha}\frac{1}{T_0 + \sqrt{T_0^2 + \frac{4M^2g^2}{\alpha\beta}}}$$

7.11. Dummy

Parte III.

Risposta multipla

8. Prove in itinere a risposta multipla

8.1. 23 ottobre 2013

Attenzione: in alcuni degli esercizi seguenti i dati o i risultati potrebbero essere forniti con una precisione eccessiva (in genere 3 cifre significative) rispetto a valori realistici. Ciò serve solo allo scopo di aumentare il livello di confidenza nella risposta che coincida numericamente con una di quelle proposte. Quando il testo propone delle risposte alternative tra le quali scegliere, un'eventuale risposta sbagliata comporta una penalizzazione sul voto finale; non rispondere affatto (cioè se non si pone nessuna crocetta) non comporta invece alcuna penalizzazione.

1. Un'automobile di massa 954kg percorre la prima metà di un rettilineo lungo 10.4km alla velocità di 81.1km/h e la seconda metà a una velocità pari a 1/4 della precedente. Determinare la velocità media in km/h.
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{14.4}$ C $\boxed{32.4}$ D $\boxed{50.4}$ E $\boxed{68.4}$ F $\boxed{86.4}$

2. Un punto materiale percorre 128m lungo un'orbita circolare a velocità di modulo costante pari a 19.7m/s, compiendo complessivamente 3 giri e mezzo. Determinare il modulo, in cm/s, della velocità media.
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{179}$ C $\boxed{359}$ D $\boxed{539}$ E $\boxed{719}$ F $\boxed{899}$

3. Da una grande altezza si lasciano cadere dei sassi, da fermi, a intervalli di tempo regolari pari a 3.65s. Si trascuri l'attrito dell'aria. Determinare dopo quanto tempo, in secondi e a partire dal primo lancio, la distanza tra i primi due sassi è doppia di quella tra il secondo e il terzo. (Valore standard dell'accelerazione di gravità: $g = 9.80665\text{m/s}^2$)
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{1.93}$ C $\boxed{3.73}$ D $\boxed{5.53}$ E $\boxed{7.33}$ F $\boxed{9.13}$

4. In un prefissato sistema di coordinate cartesiane, due particelle si muovono di moto rettilineo uniforme, partendo contemporaneamente dall'origine O. La velocità della prima particella, in m/s, è $\boldsymbol{v}_1 = -2\hat{\boldsymbol{\imath}} - 3\hat{\boldsymbol{\jmath}}$. La velocità della seconda particella, in m/s, è $\boldsymbol{v}_2 = 3\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 3\hat{\boldsymbol{k}}$. Determinare la distanza, in metri, tra le particelle dopo 35.1s dalla partenza.
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{246}$ C $\boxed{426}$ D $\boxed{606}$ E $\boxed{786}$ F $\boxed{966}$

5. Una ruota rotola senza scivolare su un piano orizzontale. La legge oraria di un punto della ruota (con distanza dall'asse minore del raggio della ruota), in un sistema di riferimento solidale con il piano orizzontale, è:
$$\begin{cases} x &= v\left(2t + \frac{1}{\omega}\cos\omega t\right) \\ y &= \frac{v}{\omega}\left(2 - \sin\omega t\right) \end{cases}$$
   dove $v = 3.11\text{m/s}$ e $\omega = 36.0\text{rad/s}$. Determinare il raggio della ruota, in centimetri.
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{17.3}$ C $\boxed{35.3}$ D $\boxed{53.3}$ E $\boxed{71.3}$ F $\boxed{89.3}$

6. In un prefissato sistema di coordinate cartesiane, un punto materiale di massa 62.7g percorre una traiettoria elicoidale di legge oraria:

$$\begin{cases} x &= b\cos\omega t \\ y &= b\sin\omega t \\ z &= vt \end{cases}$$

dove $b = 1.09$m, $\omega = 21.3$rad/s, $v = 15.5$m/s. Determinare il modulo della velocità del punto materiale, in m/s, all'istante $t = 69.7$s.
A $\boxed{0}$ B $\boxed{27.9}$ C $\boxed{45.9}$ D $\boxed{63.9}$ E $\boxed{81.9}$ F $\boxed{99.9}$

7. Nella situazione del problema (6), determinare il modulo della forza, in newton, agente sul punto materiale allo stesso istante t.
A $\boxed{0}$ B $\boxed{13.0}$ C $\boxed{31.0}$ D $\boxed{49.0}$ E $\boxed{67.0}$ F $\boxed{85.0}$

8. Nella situazione del problema (6), determinare il raggio di curvatura della traiettoria, in cm.
A $\boxed{0}$ B $\boxed{158}$ C $\boxed{338}$ D $\boxed{518}$ E $\boxed{698}$ F $\boxed{878}$

9. Un'asta rigida di lunghezza h = 78.0 cm cade scivolando su un piano orizzontale senza attrito sul quale un suo estremo è appoggiato (e rimane appoggiato durante tutto il moto). Il moto dell'asta si svolge tutto su un piano verticale. Si osserva che il centro G dell'asta percorre una traiettoria rettilinea verticale. A un certo istante di tempo $t_1 = 0.701$s il punto G si trova a una quota pari a $\frac{3}{10}h$ rispetto al suolo e ha una velocità di modulo 79.6cm/s. Allo stesso istante di tempo t_1, determinare il modulo della velocità, in cm/s, dell'estremo dell'asta appoggiato al suolo.
A $\boxed{0}$ B $\boxed{23.7}$ C $\boxed{41.7}$ D $\boxed{59.7}$ E $\boxed{77.7}$ F $\boxed{95.7}$

10. Un proiettile di cannone, sferico di raggio 12.2cm, viene sparato in pianura con un alzo tale da ottenere la massima gittata. Si trascuri la resistenza dell'aria. La massa del proiettile è 21.9kg, il valore standard dell'accelerazione di gravità è $g = 9.80665$m/s^2, la massima quota a cui arriva il proiettile è 542m. Determinare il rapporto tra il massimo e il minimo raggio di curvatura della traiettoria (estremi inclusi).
A $\boxed{0}$ B $\boxed{1.03}$ C $\boxed{2.83}$ D $\boxed{4.63}$ E $\boxed{6.43}$ F $\boxed{8.23}$

Soluzione

Domanda 1

La massa dell'automobile non ha alcun ruolo. La velocità media è data da

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

dove $\Delta s = 10.4\mathrm{km}$ è lo spazio totale percorso e Δt il tempo totale impiegato. Per quest'ultimo abbiamo

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{2}\frac{1}{v_1} + \frac{\Delta s}{2}\frac{4}{v_1}$$

con $v_1 = 81.1\mathrm{km/h}$. Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned}
\overline{v} &= \left(\frac{\Delta s}{2}\frac{1}{v_1} + \frac{\Delta s}{2}\frac{4}{v_1}\right)^{-1} \Delta s \\
&= \left(\frac{1}{2v_1} + \frac{2}{v_1}\right)^{-1} \\
&= \frac{2}{5} v_1 = 32.44\mathrm{km/h}
\end{aligned}$$

La risposta corretta è dunque la C.

Domanda 2

La velocità media è data da

$$|\overline{\boldsymbol{v}}| = \frac{|\Delta \boldsymbol{s}|}{\Delta t}$$

Se il punto materiale percorre tre giri e mezzo il tempo impiegato sarà

$$\Delta t = \frac{\ell}{v}$$

dove $\ell = 128\mathrm{m}$ e $v = 19.7\mathrm{ms}^{-1}$. Lo spostamento totale sarà uguale ad un diametro, ossia

$$|\Delta \boldsymbol{s}| = 2\frac{\ell}{\frac{7}{2}\times 2\pi} = \frac{2\ell}{7\pi}$$

Quindi

$$|\overline{\boldsymbol{v}}| = \frac{2\ell}{7\pi}\frac{v}{\ell} = 1.79\mathrm{ms}^{-1} = 179\mathrm{cms}^{-1}$$

La risposta corretta è quindi la B.

Domanda 3

Detto τ l'intervallo tra un lancio e il successivo, avremo le leggi orarie per i primi tre sassi

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{2} g t^2 \\
s_2 &= \frac{1}{2} g \left(t-\tau\right)^2 \\
s_3 &= \frac{1}{2} g \left(t-2\tau\right)^2
\end{aligned}$$

Dato che tutte le distanze sono proporzionali a g la risposta non dipende dall'accelerazione di gravità. Le distanze da confrontare saranno

$$\begin{aligned} d_{12} &= s_1 - s_2 = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}g\left(t-\tau\right)^2 = \frac{g}{2}\left(2\tau t - \tau^2\right) \\ d_{23} &= s_2 - s_3 = \frac{1}{2}g\left(t-\tau\right)^2 - \frac{1}{2}g\left(t-2\tau\right)^2 = \frac{g}{2}\left(2t\tau - 3\tau^2\right) \end{aligned}$$

La condizione richiesta si verificherà quando

$$d_{12} = 2d_{23}$$

cioè

$$t = \frac{5}{2}\tau = 9.13\text{s}$$

La risposta corretta è dunque la F.

Domanda 4

La posizione relativa delle particelle sarà

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s} &= \left(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1\right) t \\ &= \left(3\hat{\boldsymbol{j}} + 3\hat{\boldsymbol{k}} + 2\hat{\boldsymbol{i}} + 3\hat{\boldsymbol{j}}\right) t \\ &= \left(2\hat{\boldsymbol{i}} + 6\hat{\boldsymbol{j}} + 3\hat{\boldsymbol{k}}\right) t \end{aligned}$$

e quindi la distanza

$$d = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2}35.1\text{m} = 245.7\text{m}$$

La risposta corretta è quindi la B.

Domanda 5

Per un punto ad una distanza ρ dal centro della ruota la legge oraria è

$$\begin{cases} x &= x_0 + v_c t + \rho\cos\left(\Omega t + \phi\right) \\ y &= y_0 + \rho\sin\left(\Omega t + \phi\right) \end{cases}$$

e per la condizione di puro rotolamento deve essere $v_c = -\Omega R$, dove R è il raggio della ruota e Ω la sua velocità angolare. Confrontando con la legge specificata troviamo

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{v}{\omega} \\ v_c &= 2v \\ x_0 &= 0 \\ y_0 &= \frac{2v}{\omega} \\ \phi &= 0 \\ \Omega &= -\omega \end{aligned}$$

da cui

$$R = -\frac{v_c}{\Omega} = \frac{2v}{\omega} = \frac{2 \times 3.11}{36.0}\text{m} = 17.3\text{cm}$$

La risposta corretta è quindi la B.

Domanda 6

Derivando una volta le leggi orarie abbiamo

$$\begin{cases} \dot{x} &= -b\omega \sin \omega t \\ \dot{y} &= b\omega \cos \omega t \\ \dot{z} &= v \end{cases}$$

Per il modulo della velocità abbiamo quindi

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{b^2\omega^2 + v^2} = 27.9156\text{ms}^{-1}$$

Notare che il modulo della velocità è costante. La risposta corretta è quindi la B.

Domanda 7

Derivando un'altra volta rispetto al tempo le leggi orarie otteniamo l'accelerazione

$$\begin{cases} \ddot{x} &= -b\omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{y} &= -b\omega^2 \sin \omega t \\ \ddot{z} &= 0 \end{cases}$$

e quindi il modulo della forza

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{F}| &= m\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = mb\omega^2 \\ &= 62.7 \times 10^{-3} \times 1.09 \times (21.3)^2\,\text{N} = 31.0065\text{N} \end{aligned}$$

La risposta corretta è quindi la C.

Domanda 8

L'accelerazione è perpendicolare alla velocità, come si verifica direttamente:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} = \ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z} = 0$$

Di consequenza

$$|\boldsymbol{a}| = \frac{v^2}{\rho}$$

e quindi

$$\rho = \frac{(27.9)^2}{1.09 \times (21.3)^2}\text{m} = 157.58\text{cm}$$

La risposta corretta è quindi la B.

Domanda 9

etta y_G l'ordinata del punto G e x_E l'ascissa dell'estramo appoggiato al suolo, in un sistema di coordinate con $x_G = 0$ e $y_E = 0$ deve essere

$$x_E^2 + y_G^2 = \frac{h^2}{4}$$

e quindi derivando rispetto al tempo

$$x_E \dot{x}_E + y_G \dot{y}_G = 0$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \dot{x}_E &= -\frac{y_G}{x_E}\dot{y}_G \\ &= -\frac{y_G}{\sqrt{\frac{h^2}{4} - y_G^2}}\dot{y}_G \\ &= -\frac{\frac{3}{10}h}{\sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{9}{100}h^2}}\dot{y}_G \\ &= -\frac{3}{4}\dot{y}_G = 59.7\text{cms}^{-1} \end{aligned}$$

La risposta corretta è quindi la D.

Domanda 10

Le leggi orarie sono

$$
\begin{aligned}
x &= v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} t \\
y &= v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} t - \frac{1}{2} g t^2
\end{aligned}
$$

Dato che la traiettoria è una parabola il minimo raggio di curvatura si avrà al vertice, il massimo ad un estremo. Nel primo caso

$$\rho_{min} = \frac{v_x^2}{g}$$

e nel secondo

$$\rho_{max} = \frac{v_0^2}{g \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

quindi

$$\frac{\rho_{max}}{\rho_{min}} = \frac{v_0^2}{v_x^2 \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2.83$$

La risposta corretta è quindi la C.

8.2. 18 dicembre 2013

Attenzione: in alcuni degli esercizi seguenti i dati o i risultati potrebbero essere forniti con una precisione eccessiva (in genere 3 cifre significative) rispetto a valori realistici. Ciò serve solo allo scopo di aumentare il livello di confidenza nella risposta che coincida numericamente con una di quelle proposte. Quando il testo propone delle risposte alternative tra le quali scegliere, un'eventuale risposta sbagliata comporta una penalizzazione sul voto finale; non rispondere affatto (cioè se non si pone nessuna crocetta) non comporta invece alcuna penalizzazione. Per l'accelerazione di gravità, usare il valore standard: $g = 9.80665\text{m/s}^2$.

1. Un pendolo ideale è costituito da un corpo di massa 139g e da un filo inestensibile di lunghezza 171cm. Nel sistema di riferimento del laboratorio, che può essere considerato inerziale, il punto di sospensione viene mantenuto in oscillazione armonica (sinusoidale) lungo una direzione orizzontale, grazie all'applicazione di un'opportuna forza F. Nel sistema del laboratorio si scelgono delle coordinate cartesiane X, Y, Z, dove Z è l'asse verticale rivolto verso l'alto e X è un asse orizzontale nella direzione del moto del punto di sospensione. Le condizioni iniziali in cui viene posto il pendolo assicurano che il suo moto avvenga sempre sul piano X, Z, pertanto, nel seguito, non si farà riferimento all'asse Y . Nel sistema di coordinate citato, la legge oraria del punto di sospensione è: $X(t) = X_0 \cos(\omega t)$, dove $X_0 = 0.530\text{cm}$ e $\omega = 1.80\text{rad/s}$. L'attrito è trascurabile. Nel seguito ogni grandezza o relazione è intesa nel sistema di riferimento S non inerziale, solidale col punto di sospensione del pendolo e assi cartesiani x, z rispettivamente paralleli e concordi agli assi X, Z. Sia φ l'angolo, con segno, che forma la direzione del filo con la verticale; nel seguito si consideri sempre il caso delle piccole oscillazioni (le espressioni riguardanti le forze sviluppate al prim'ordine in φ: $\sin\varphi \simeq \varphi$, $\cos\varphi \simeq 1$, eccetera). Determinare il valore massimo, in mN, del modulo della forza apparente esercitata sul corpo (nel sistema S).
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{2.39}$ C $\boxed{4.19}$ D $\boxed{5.99}$ E $\boxed{7.79}$ F $\boxed{9.59}$

2. Nella situazione del problema precedente (1) determinare la tensione del filo in newton (nel sistema S).
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{1.36}$ C $\boxed{3.16}$ D $\boxed{4.96}$ E $\boxed{6.76}$ F $\boxed{8.56}$

3. Nella situazione dei problemi precedenti (1,2) e nel caso in cui la velocità iniziale del pendolo sia nulla (al tempo $t = 0$ e nel sistema S), determinare quale deve essere l'angolo iniziale $\varphi(t = 0)$, in mrad, affinché il moto del pendolo sia armonico semplice.
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{2.23}$ C $\boxed{4.03}$ D $\boxed{5.83}$ E $\boxed{7.63}$ F $\boxed{9.43}$

4. Nella situazione dei problemi (1,2) si considerino ora le condizioni iniziali (al tempo $t = 0$) di velocità nulla e angolo φ nullo. Determinare l'angolo φ, in mrad, al tempo $t = \frac{2\pi}{\omega}$.
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{2.37}$ C $\boxed{4.17}$ D $\boxed{5.97}$ E $\boxed{7.77}$ F $\boxed{9.57}$

5. Un bambino si trova su una giostra di raggio r, che ruota con velocità angolare costante ω. La madre del bambino, di massa m, è ferma, in piedi, sul terreno immediatamente all'esterno della giostra. I coefficienti, rispettivamente statico e dinamico, di attrito radente per le suole delle scarpe sul terreno sono μ_s e μ_d. Le domande seguenti riguardano le grandezze fisiche misurate nel sistema di riferimento S solidale alla giostra e dotato di un sistema di coordinate polari (r, φ). Dal suo punto di vista, il bambino "vede" la madre percorrere un'orbita circolare con velocità uniforme. Determinare la forza di attrito sulla madre.

   a) A: $-\mu_d mg\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$
   b) B: 0
   c) C: $-\mu_s mg\hat{\boldsymbol{e}}_r$
   d) D: $-\mu_d mg\hat{\boldsymbol{e}}_r$
   e) E: Nessuna delle altre risposte proposte è corretta
   f) F: $\mu_d mg\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

   A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐ F [2]

6. Nella situazione del problema precedente (5) determinare (nel sistema S) la componente radiale F_r della risultante di tutte le forze (incluse quelle apparenti) agenti sulla madre.

   a) A: $mr\omega^2$
   b) B: $3mr\omega^2$
   c) C: $-2mr\omega^2$
   d) D: Nessuna delle altre risposte proposte è corretta
   e) E: $-mr\omega^2$
   f) $2mr\omega^2$

   A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐ F ☐

7. Un punto materiale di massa 491g si muove in una dimensione nel campo di una forza conservativa con energia potenziale:

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}kx^2 & x > 0 \\ 4kx^2 & x < 0 \end{cases}$$

   dove $k = 5.91\text{N/m}$. Determinare il periodo, in secondi, dell'oscillazione intorno alla posizione di equilibrio.

   A [0] B [1.23] C [3.03] D [4.83] E [6.63] F [8.43]

8. Una particella di massa 7.02g è vincolata a muoversi lungo una retta orizzontale e viene lanciata con velocità iniziale di 7.33m/s dalla posizione $x = 0$. La particella è soggetta a una forza di richiamo $F_x = -kx^3$, con $k = 0.446\text{N/m}^3$. A quale

distanza dall'origine, in metri, riesce ad arrivare?
A $\boxed{0}$ B $\boxed{1.14}$ C $\boxed{2.94}$ D $\boxed{4.74}$ E $\boxed{6.54}$ F $\boxed{8.34}$

9. Una massa di 0.552kg è appesa verticalmente a una molla di costante elastica 5.62N/m al soffitto di un ascensore. Il sistema è inizialmente in quiete, ma al tempo $t = 0$ l'ascensore inizia ad accelerare verso l'alto con accelerazione costante di modulo 0.480m/s^2. Determinare l'ampiezza delle oscillazioni, in cm, intorno alla posizione di equilibrio, nel sistema di riferimento solidale con l'ascensore.
A $\boxed{0}$ B $\boxed{1.11}$ C $\boxed{2.91}$ D $\boxed{4.71}$ E $\boxed{6.51}$ F $\boxed{8.31}$

Soluzione

Domanda 1

La forza apparente applicata sula massa è data da

$$\vec{F} = -ma\hat{\boldsymbol{e}}_x$$

e

$$a = \ddot{X} = -X_0\omega^2 \cos\omega t$$

Il valore massimo del modulo della forza apparente sarà quindi

$$\begin{aligned}\left|\vec{F}\right|_{max} &= X_0\omega^2 m = 0.530\text{cm}\,(1.80\text{rad/s})^2\,139\text{g}\\ &= 0.530\times10^{-2}\,(1.80)^2\,139\times10^{-3}\text{N}\\ &= 2.39\times10^{-3}N\end{aligned}$$

La risposta corretta è quindi la (B).

Domanda 2

Dall'equazione del moto nella direzione del filo abbiamo

$$-m\frac{v^2}{\ell} = T - mg\cos\theta$$

Per piccole oscillazioni possiamo porre $\cos\theta \simeq 1$ e trascurare il contributo proporzionale alla velocità, quindi

$$\begin{aligned}T = mg &= 139\times10^{-3}\text{kg}\,9.80665\text{ms}^{-2}\\ &\simeq 1.36\text{N}\end{aligned}$$

La risposte corretta è quindi la (B).

Domanda 3

L'equazione del moto si scrive nella forma

$$m\ell^2\ddot{\varphi} + mg\ell\varphi = m\ell X_0\omega^2\cos\omega t$$

ossia

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = \frac{X_0\omega^2}{\ell}\cos\omega t$$

La soluzione generale è data dalla somma di una soluzione particolare e della soluzione generale dell'omogenea,

$$\varphi(t) = A\cos\Omega_p t + B\sin\Omega_p t + \frac{X_0\omega^2}{\ell}\frac{1}{\Omega_p^2 - \omega^2}\cos\omega t$$

con $\Omega_p^2 = g/\ell$. Dato che Ω_p e ω sono differenti, l'unico modo per ottenere una soluzione monocromatica è avere $A = B = 0$. In questo caso $\dot{\varphi}(0)$ è automaticament nullo, e deve essere

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \frac{X_0}{\ell}\frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_p^2} = \frac{0.53\times 10^{-2}\text{cm}}{171\times 10^{-2}\text{cm}}\frac{(1.80\text{rad/s})^2}{\frac{9.80665}{171\times 10^{-2}}(\text{rad/s})^2 - (1.80\text{rad/s})^2}\\ &= 4.025\times 10^{-3}\text{rad}\end{aligned}$$

La risposta corretta è quindi la (C).

Domanda 4

Imponiamo le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= A + \frac{X_0}{\ell}\frac{\omega^2}{\Omega_p^2 - \omega^2} = 0\\ \dot{\varphi}(0) &= B\Omega_p = 0\end{aligned}$$

e quindi

$$\varphi(t) = \frac{X_0}{\ell}\frac{\omega^2}{\Omega_p^2 - \omega^2}(\cos\omega t - \cos\Omega_p t)$$

Abbiamo infine

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) &= \frac{X_0}{\ell}\frac{\omega^2}{\Omega_p^2 - \omega^2}\left(1 - \cos\frac{2\pi\Omega_p}{\omega}\right)\\ &= 4.025\times 10^{-3}\text{rad}1.484\\ &= 5.97\text{rad}\end{aligned}$$

La risposta corretta è quindi la (D).

Domanda 5

La forza di attrito non dipende dal sistema di riferimento, quindi quella che agisce sulla madre è nulla. Di conseguenza la risposta corretta è la (B).

Domanda 6

Dato che nel sistema considerato la madre compie un moto circolare uniforme, abbiamo che la somma delle forze radiali ad essa applicata deve essere uguale alla sua massa per la sua accelerazione centripeta, quindi

$$F_r = -mr\omega^2$$

Notare che questa è la somma della forza centrifuga ($mr\omega^2$) e di quella di Coriolis ($-2mr\omega^2$).

La risposta corretta è dunque la (E).

Domanda 7

Per $x > 0$ si ha un moto armonico con $\omega_1 = \sqrt{k/m}$, per $x < 0$ un moto armonico con $\omega_2 = \sqrt{8k/2}$. Per il periodo di una oscillazione completa avremo

$$\begin{aligned} T &= \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} = \frac{\pi}{\omega_1} + \frac{\pi}{\omega_2} \\ &= \pi\sqrt{\frac{m}{k}}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{8}}\right) \\ &= 1.2256\text{s} \end{aligned}$$

La risposta corretta è quindi la (B).

Domanda 8

Dal teorema delle forze vive abbiamo

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_0^X \left(-kx^3\right) dx$$

dove X è la massima distanza dall'origine. Quindi

$$X = \left(\frac{2mv_0^2}{k}\right)^{1/4} \simeq 1.14\text{m}$$

la risposta corretta è quindi la (B).

Domanda 9

Nel sistema di riferimento dell'ascensore per $t < 0$ abbiamo

$$m\ddot{y} = -ky - mg$$

quindi il sistema è un oscillatore armonico con posizione di equilibrio

$$y_{0,-} = -\frac{mg}{k}$$

Per $t > 0$ occorre aggiungere la forza apparente dovuta all'accelerazione, e l'equazione del moto diviene

$$m\ddot{y} = -ky - m(g + a)$$

Abbiamo quindi ancora un oscillatore armonico, ma la posizione di equilibrio è diventata

$$y_{0,+} = -\frac{m(g + a)}{k}$$

La soluzione generale di questa equazione è

$$y = -\frac{m(g + a)}{k} + A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

con $\omega^2 = k/m$. Imponiamo le condizioni iniziali. A $t = 0$ la massa è ferma nella posizione di equilibrio precedente $y_{0,-}$, quindi

$$\begin{aligned} y(0) &= -\frac{m(g + a)}{k} + A = -\frac{mg}{k} \\ \dot{y}(0) &= B\omega = 0 \end{aligned}$$

Segue che

$$\begin{aligned} A &= \frac{ma}{k} \\ B &= 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$y = y = -\frac{m(g + a)}{k} + \frac{ma}{k}\cos\omega t$$

L'ampiezza delle oscillazioni è chiaramente data da

$$\frac{ma}{k} = \frac{0.552\mathrm{kg}0.480\mathrm{m/s}^2}{5.62\mathrm{N/m}} = 4.71459\mathrm{cm}$$

La risposta corretta è quindi la D.

8.3. 26 marzo 2014

Attenzione: in alcuni degli esercizi seguenti i dati o i risultati potrebbero essere forniti con una precisione eccessiva (in genere 3 cifre significative) rispetto a valori realistici. Ciò serve solo allo scopo di aumentare il livello di confidenza nella risposta che coincida numericamente con una di quelle proposte. Quando il testo propone delle risposte alternative tra le quali scegliere, un'eventuale risposta sbagliata comporta una penalizzazione sul voto finale; non rispondere affatto (cioè se non si pone nessuna crocetta) non comporta invece alcuna penalizzazione. Per l'accelerazione di gravità, usare il valore standard: $g = 9.80665$. *Per la pressione atmosferica:* $1\text{atm} = 101325\text{Pa}$*; per la costante dei gas ideali:* $R = 8.3145\text{Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$.

1. Un orologio con pendolo metallico anticipa di 10s ogni giorno, se la temperatura dell'ambiente in cui si trova è di 15°C; ritarda invece di 20s al giorno, se la temperatura è di 30°C. Determinare il ritardo giornaliero, in secondi, alla temperatura di 22.9°C.
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{2.20}$ C $\boxed{4.00}$ D $\boxed{5.80}$ E $\boxed{7.60}$ F $\boxed{9.40}$

2. Determinare il volume, in litri, occupato da 8.02g di ossigeno (peso molecolare 32g/mol) alla pressione di 1atm e alla temperatura di 274K.
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{2.04}$ C $\boxed{3.84}$ D $\boxed{5.64}$ E $\boxed{7.44}$ F $\boxed{9.24}$

3. Cinque moli di gas ideale, inizialmente in uno stato di volume 33.0l e pressione $P_i = 4.96$atm, fanno una trasformazione reversibile che le porta in uno stato di volume 9.89l e pressione $4P_i$. La trasformazione è descritta dall'equazione $P = aV + b$. Determinare il valore massimo della temperatura, in kelvin, durante la trasformazione.
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{110}$ C $\boxed{290}$ D $\boxed{470}$ E $\boxed{650}$ F $\boxed{830}$

4. 3.34mol di gas ideale monoatomico si espandono, in modo adiabatico e reversibile, fino a occupare un volume pari a 3.41 volte quello iniziale $V_i = 4.46$l. La temperatura iniziale vale 366K. Determinare il lavoro, in kJ, compiuto durante l'espansione.
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{1.32}$ C $\boxed{3.12}$ D $\boxed{4.92}$ E $\boxed{6.72}$ F $\boxed{8.52}$

5. Una mole di elio, gas monoatomico, inizialmente si trova nello stato A, alla temperatura di 343K, con un volume di 0.0193m^3. Il gas compie successivamente un'espansione isobara reversibile fino allo stato B e un'espansione adiabatica reversibile fino allo stato C, con un volume finale doppio di quello iniziale nello stato A. Infine il gas chiude il ciclo compiendo una compressione isoterma reversibile che lo riporta nello stato A. Determinare la temperatura, in kelvin, nello stato B.
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{273}$ C $\boxed{453}$ D $\boxed{633}$ E $\boxed{813}$ F $\boxed{993}$

6. Nella situazione del problema precedente (5), determinare il lavoro netto, in joule, complessivamente fatto dal gas percorrendo il ciclo.
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{121}$ C $\boxed{301}$ D $\boxed{481}$ E $\boxed{661}$ F $\boxed{841}$

7. Nella situazione del problema (5), determinare il rendimento del ciclo.
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{0.132}$ C $\boxed{0.312}$ D $\boxed{0.492}$ E $\boxed{0.672}$ F $\boxed{0.852}$

8. Un gas ideale biatomico compie una trasformazione reversibile nella quale la temperatura assoluta è costantemente proporzionale alla potenza $k = 0.356$ del volume: $T \propto V^k$. Determinare il corrispondente calore molare in $\mathrm{Jmol^{-1}K^{-1}}$.
   A $\boxed{0}$ B $\boxed{26.1}$ C $\boxed{44.1}$ D $\boxed{62.1}$ E $\boxed{80.1}$ F $\boxed{98.1}$

9. Un cilindro verticale con pareti non permeabili al calore, con base di area S, contiene una certa quantità di gas ideale monoatomico. Superiormente il cilindro è chiuso da un pistone, di massa m_1, anch'esso isolante e che può scorrere lungo il cilindro mantenendo una perfetta chiusura. Si supponga che l'esperimento si compia in assenza di pressione atmosferica e con gravità terrestre standard. Inizialmente, in condizioni di equilibrio termodinamico, il volume occupato dal gas è V_0. Successivamente si pone una massa m_2 sul pistone, facendone abbassare la bruscamente la quota, e si attende il raggiungimento del nuovo equilibrio termodinamico. Determinare il volume occupato dal gas al nuovo equilibrio.
   A: Nessuna delle altre risposte proposte è corretta
   B: $\frac{2m_1+2m_2}{5m_1+2m_2}V_0$
   C: $\frac{5m_1+2m_2}{5m_1+5m_2}V_0$
   D: $\frac{2m_1+5m_2}{5m_1+5m_2}V_0$
   E: $\frac{2m_1+2m_2}{5m_1+5m_2}V_0$
   F: $\frac{2m_1+2m_2}{2m_1+2m_2}V_0$
   A $\boxed{}$ B $\boxed{}$ C $\boxed{}$ D $\boxed{}$ E $\boxed{}$ F $\boxed{}$

10. Un infermiere sta preparando un paziente per una flebo. Dopo aver collegato la bottiglia di liquido, di densità $1.07\mathrm{g/cm^3}$, a un tubicino del diametro di e a un ago, infila quest'ultimo in una vena. Sapendo che la pressione del sangue è pari a $3.10 \times 10^3\mathrm{Pa}$, determinare l'altezza minima, in *cm* e rispetto all'ago, a cui deve essere posta la bottiglia affinchè il liquido entri in vena.
    A $\boxed{0}$ B $\boxed{11.5}$ C $\boxed{29.5}$ D $\boxed{47.5}$ E $\boxed{65.5}$ F $\boxed{83.5}$

Soluzione

Domanda 1

Dato che il periodo del pendolo è

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

avremo

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{2}\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{1}{2}\alpha\Delta T$$

dove α è il coefficiente di espansione termica, ΔT è la variazione di temperatura rispetto al valore per il quale si ha la lettura corretta, e ΔP la variazione del periodo corrispondente.

Il ritardo accumulato in un giorno sarà ($\tau = 24 \times 60 \times 60$s)

$$\Delta\tau = \tau\frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{2}\alpha\tau\Delta T$$

e quindi

$$\begin{aligned}\Delta\tau_1 = \frac{1}{2}\alpha\tau\left(15 - T_0\right) &= -10\text{s}\\ \Delta\tau_2 = \frac{1}{2}\alpha\tau\left(30 - T_0\right) &= 20\text{s}\end{aligned}$$

Noi dobbiamo determinare

$$\Delta\tau_3 = \frac{1}{2}\alpha\tau\left(22.9 - T_0\right)$$

Dalle due relazioni precedenti troviamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\alpha\tau &= 2\\ \frac{1}{2}\alpha\tau T_0 &= 40\end{aligned}$$

e sostituendo

$$\Delta\tau_3 = 2 \times 22.9 - 40 = 5.8\text{s}$$

La risposta corretta è quindi la D.

Domanda 2

Il numero di moli di ossigeno è

$$n = 8.02/32 = 0.250625$$

ed il volume occupato sarà

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{0.250625 \times 8.3145 \times 274}{101325} m^3 = 5.64\text{l}$$

La risposta corretta è quindi la D.

Domanda 3

Determiniamo a e b. Deve essere

$$\begin{aligned}P_i &= aV_i + b\\ 4P_i &= aV_f + b\end{aligned}$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{3P_i}{V_f - V_i} = \frac{3 \times 4.96 \times 101325}{(9.89 - 33.0)\,10^{-3}} = -6.50438 \times 10^7 \mathrm{Pa/m^3} \\
b &= 4.96 \times 101325 + 6.50438 \times 10^7 \times 33.0 \times 10^{-3} = 2.64902 \times 10^6 \mathrm{Pa}
\end{aligned}
$$

Per la temperatura abbiamo

$$T = \frac{PV}{nR} = \frac{1}{nR} V\,(aV + b)$$

che ha valore massimo per

$$V = -\frac{b}{2a} = 20.4\mathrm{l}$$

che è all'interno dell'intervallo considerato. La temperatura massima sarà dunque

$$T_{max} = \frac{-6.50438 \times 10^7 \times \left(20.4 \times 10^{-3}\right)^2 + 2.64902 \times 10^6 \times 20.4 \times 10^{-3}}{5 \times 8.3145} = 649\mathrm{K}$$

La risposta corretta è dunque la E.

Domanda 4

Dato che la trasformazione è adiabatica il lavoro fatto dal gas è uguale alla diminuzione della sua energia interna. Dunque

$$L = nc_V\,(T_i - T_f)$$

ma dato che $TV^{\gamma-1}$ è costante

$$T_f = T_i \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1} = T_i \left(\frac{1}{3.41}\right)^{\frac{2}{3}} = 161.552\mathrm{K}$$

Quindi

$$L = 3.34 \times \frac{3}{2} \times 8.3145 \times (366 - 161.552) = 8.52\mathrm{kJ}$$

e la risposta corretta è la F.

Domanda 5

La pressione in C è data da

$$P_C = \frac{nRT_A}{2V_A} = \frac{P_A}{2}$$

ed inoltre, dato che la trasformazione da B a C è adiabatica, avremo

$$P_C T_A^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P_A T_B^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

di conseguenza

$$T_B = T_A \left(\frac{P_C}{P_A}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_A \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{5}} = 452.591\mathrm{K}$$

La risposta corretta è la C.

Domanda 6

Abbiamo:

$$\begin{aligned} L_{AB} &= P_A (V_B - V_A) = R (T_B - T_A) \\ L_{BC} &= -c_V (T_A - T_B) \\ L_{CA} &= RT_A \log \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} L &= c_P (T_B - T_A) + RT_A \log \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{2} R (452.591 - 343) - 343 \times R \log 2 = 301.218\mathrm{J} \end{aligned}$$

La risposta corretta è la C.

Domanda 7

Il rendimento è il rapporto tra il lavoro (che abbiamo calcolato nell'esercizio precedente) e il calore assorbito. Il calore viene assorbito in questo caso sulla trasformazione isobara, e vale

$$Q = c_P (T_B - T_A)$$

quindi

$$\eta = \frac{c_P (T_B - T_A) - RT_A \log 2}{c_P (T_B - T_A)} = 0.13223$$

La risposta corretta è la B.

Domanda 8

Abbiamo

$$dQ = nc_V dT + PdV$$

D'altra parte

$$\frac{dT}{T} = k \frac{dV}{V}$$

e sostituendo troviamo

$$dQ = nc_V dT + n\frac{RT}{V}\frac{dT}{T}\frac{V}{k} = n\left(c_V + \frac{R}{k}\right) dT$$

Quindi il calore molare cercato è

$$\frac{1}{n}\frac{dQ}{dT} = c_V + \frac{R}{k} = \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{k}\right) R = 44.14 \mathrm{J\,mol^{-1}K^{-1}}$$

La risposta corretta è la C.

Domanda 9

Inizialmente $P_0 = m_1 g S^{-1}$. Dato che durante la trasformazione l'aumento di energia interna del è uguale al lavoro fatto su di esso avremo

$$\frac{(m_1 + m_2)\, g}{S} (V_0 - V_1) = n c_V (T_1 - T_0)$$

e usando l'equazione di stato

$$\frac{(m_1 + m_2)\, g}{S} (V_0 - V_1) = \frac{c_V}{R} (nRT_1 - nRT_0) = \frac{c_V}{R} \left(\frac{(m_1 + m_2)\, g}{S} V_1 - \frac{m_1 g}{S} V_0 \right)$$

Quindi

$$(m_1 + m_2)(V_0 - V_1) = \frac{3}{2} \left[(m_1 + m_2) V_1 - m_1 V_0 \right]$$

da cui

$$V_1 = \frac{2m_1 + 5m_2}{5m_1 + 5m_2} V_0$$

La risposta corretta è la D.

Domanda 10

La sovra-pressione deve essere uguale alla pressione della colonna di liquido, quindi

$$\rho g h = 3.10 \times 10^3 \mathrm{Pa}$$

Risolvendo otteniamo

$$h = \frac{3.10 \times 10^3}{1.07 \times 10^3 \times 9.80665} \mathrm{m} = 29.4 \mathrm{cm}$$

La risposta corretta è la C.

8.4. 5 novembre 2014

Negli esercizi seguenti le coordinate polari sferiche vengono indicate con i simboli r,θ,ϕ, dove r è la distanza dall'origine O, θ è l'angolo polare (colatitudine) e ϕ è l'azimut; le coordinate cilindriche vengono indicate con i simboli ρ,ϕ,z, dove ρ è la distanza dall'asse polare, ϕ è l'azimut e z è la quota; le coordinate cartesiane vengono indicate con i simboli x,y,z. Quando più tipi di coordinate sono usati nello stesso esercizio, salvo avviso contrario i diversi sistemi sono associati nel modo usuale: origini coincidenti, assi polari coincidenti tra loro e coincidenti con l'asse z, origine degli azimut coincidente con il semiasse $x > 0$, ecc.

1. Una particella elementare è dotata di una massa $m = 1.01 \times 10^{-31}$ kg e di una carica elettrica $q = 6.35 \times 10^{-10}$ u.e.s. Sapendo che 1 u.e.s. $= 1\ \mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{s}^{-1}$ e che la velocità della luce è $c = 299\,792$ km/s, stimare il suo raggio r, in cm, sulla base di pure considerazioni dimensionali (si usi una formula del tipo $r = m^{\alpha} q^{\beta} c^{\gamma}$, con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$).

A $\boxed{0}$ B $\boxed{2.64 \times 10^{-12}}$ C $\boxed{4.44 \times 10^{-12}}$ D $\boxed{6.24 \times 10^{-12}}$ E $\boxed{8.04 \times 10^{-12}}$ F $\boxed{9.84 \times 10^{-12}}$

2. Un'automobile percorre un tratto rettilineo di lunghezza 3.74 km, sia all'andata che al ritorno. All'andata mantiene una velocità di modulo costante pari a 58.2 km/h, mentre al ritorno mantiene una velocità di modulo costante pari a 92.7 km/h. Determinare il modulo della velocità (vettoriale) media, in dm/s.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{205}$ C $\boxed{385}$ D $\boxed{565}$ E $\boxed{745}$ F $\boxed{925}$

3. Nel caso del problema precedente (2), determinare la velocità scalare media (media del modulo della velocità), in m/s.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{19.9}$ C $\boxed{37.9}$ D $\boxed{55.9}$ E $\boxed{73.9}$ F $\boxed{91.9}$

4. Date le grandezze $F = 37.4$ N, $m = 30.0$ g, $a = 4.19$ m/s^2, $v = 46.2$ km/h e $h = 77.6$ cm, determinarne una corretta espressione adimensionale.

   a) A: $Fv^9 \log(v^2/(ah))/(m\,a^5h^4)$
   b) B: $Fv^2e^{(v/a\,h)}/(m\,a^2h)$
   c) C: $\pi F^{3/2}v^6/\sqrt{m^3a^9h^6}$
   d) D: Nessuna delle espressioni proposte è una corretta espressione adimensionale
   e) E: $F^2v^6/(m^2a^5h^2)$
   f) F: $2Fv^7/(m\,a^5h^3)$

A $\boxed{}$ B $\boxed{}$ C $\boxed{}$ D $\boxed{}$ E $\boxed{}$ F $\boxed{}$

5. Un cannone spara proiettili con velocità iniziale di modulo 15.7 m/s e alzo (angolo rispetto all'orizzontale) di 0.759 rad. Determinare di che fattore aumenta la gittata, se la velocità di espulsione del proiettile aumenta di un fattore 3.

6. Sul piano, si considerino i due punti A e B di coordinate polari rispettive: $\rho_A = 1.84$ m, $\phi_A = 2.81$ rad e $\rho_B = 3.80$ m, $\phi_B = 4.20$ rad. Un punto materiale P si muove da A a B, con velocità di modulo 4.42 m/s, seguendo due linee coordinate polari, una radiale e l'altra azimutale (in un ordine non predefinito). Determinare la lunghezza della traiettoria più breve, in metri.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{2.72}$ C $\boxed{4.52}$ D $\boxed{6.32}$ E $\boxed{8.12}$ F $\boxed{9.92}$

7. Un punto P, nella posizione di coordinate cartesiane ($x = \sqrt{3}$ m, $y = 1$ m, $z = 2.12$ m), ha una velocità $\mathbf{v} = v_\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho$, con $v_\rho = 4.78$ m/s, e un'accelerazione $\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{e}}_x + a_y \hat{\mathbf{e}}_y$, con $a_x = a_y = 6.01$ m/s^2. Determinare $\frac{dv_\rho}{dt}$ in m/s^2, nella posizione data.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{1.01}$ C $\boxed{2.81}$ D $\boxed{4.61}$ E $\boxed{6.41}$ F $\boxed{8.21}$

8. Nel caso del problema precedente (7), determinare il modulo dell'accelerazione centripeta (cioè normale alla traiettoria), in m/s^2.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{2.20}$ C $\boxed{4.00}$ D $\boxed{5.80}$ E $\boxed{7.60}$ F $\boxed{9.40}$

9. Uno studente vuole verificare la validità di una teoria in cui la seconda legge di Newton, nel caso di moti unidimensionali, sia sostituita da $f = m + a$, dove a è l'accelerazione definita nel modo tradizionale, mentre f e m rappresentano, rispettivamente, nuove definizioni di forza e di massa (con le dimensioni di un'accelerazione). Per effettuare una verifica sperimentale, lo studente prepara un meccanismo che può mettere in movimento piccoli oggetti mediante lo scatto di una molla. Lo studente fa anche l'ipotesi che la (nuova) forza, impressa dalla molla a un oggetto al momento dello scatto, dipenda solo dalla compressione della molla e non dal tipo di oggetto accelerato. Lo studente effettua dapprima due esperimenti, con la stessa compressione della molla, misurando l'accelerazione iniziale di due oggetti diversi detti A e B. Il modulo dell'accelerazione misurata di A vale 0.439 m/s^2, mentre quello dell'accelerazione misurata di B vale 2.94 m/s^2. In un terzo esperimento lo studente cambia la compressione della molla e misura il modulo della nuova accelerazione iniziale ottenuta per A: 2.39 m/s^2. Infine lo studente si accinge a compiere un quarto esperimento, con la molla compressa come nel terzo, ma misurando l'accelerazione iniziale ottenuta per B. Quale valore del modulo dell'accelerazione iniziale di B, in m/s^2, confermerebbe la teoria?

A $\boxed{0}$ B $\boxed{1.29}$ C $\boxed{3.09}$ D $\boxed{4.89}$ E $\boxed{6.69}$ F $\boxed{8.49}$

10. Lo studente del problema precedente (9) effettua infine il quarto esperimento. Quale risultato ottiene, nelle stesse unità? (Si continui a supporre che la forza dipenda solo dalla compressione della molla.)

A $\boxed{0}$ B $\boxed{16.0}$ C $\boxed{34.0}$ D $\boxed{52.0}$ E $\boxed{70.0}$ F $\boxed{88.0}$

Soluzione

Domanda 1

Gli esponenti della corretta formula da usare si ottengono imponendo che la quantità abbia le dimensioni di una lunghezza. Dato che

$$
\begin{aligned}
[m] &= M \\
[q] &= M^{1/2}L^{3/2}T^{-1} \\
[c] &= LT^{-1}
\end{aligned}
$$

abbiamo che

$$[m^\alpha q^\beta c^\gamma] = M^{\alpha+\frac{1}{2}\beta}L^{\frac{3}{2}\beta+\gamma}T^{-\beta-\gamma}$$

e quindi deve essere

$$
\begin{aligned}
\alpha + \frac{1}{2}\beta &= 0 \\
\frac{3}{2}\beta + \gamma &= 1 \\
\beta + \gamma &= 0
\end{aligned}
$$

Questo sistema ha per soluzione

$$
\begin{aligned}
\alpha &= -1 \\
\beta &= 2 \\
\gamma &= -2
\end{aligned}
$$

e quindi

$$r = \frac{q^2}{mc^2} = \frac{\left(6.35\times 10^{-10}\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{s}^{-1}\right)^2}{1.01\times 10^{-28}\mathrm{g}\,(299792\times 10^5\mathrm{cm}\,\mathrm{s}^{-1})^2} = 4.44\times 10^{-12}\mathrm{cm}$$

La risposta corretta è dunque la C.

Domanda 2

La definizione di velocità vettoriale media è

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$$

dove $\Delta\vec{s}$ è il vettore spostamento. Dato che nel nostro caso il punto di partenza e il punto di arrivo coincidono, $\Delta\vec{s} = 0$ e quindi $\vec{v}_m = 0$. La risposta corretta è dunque la A.

Domanda 3

La velocità scalare media è definita da

$$v_s = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

dove Δs è lo spazio percorso in totale. Indicando con ℓ la lunghezza del tratto rettilineo vale $\Delta s = 2\ell$. Inoltre

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{\ell}{v_1} + \frac{\ell}{v_2}$$

dove v_1 e v_2 sono le velocità all'andata e al ritorno. Quindi

$$v_s = \frac{2\ell}{\frac{\ell}{v_1} + \frac{\ell}{v_2}} = 2\frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 2\frac{58.2 \times 92.7}{58.2 + 92.7}\text{km/h} = 71.5062\text{km/h}$$

In $\mathrm{m\,s^{-1}}$ questo significa $v_s = 71.5062/3.6\text{ms}^{-1} = 19.8268\text{ms}^{-1}$. La risposta corretta è dunque la B.

Domanda 4

Abbiamo anzitutto

$$\begin{aligned}
[F] &= MLT^{-2} \\
[v] &= LT^{-1} \\
[a] &= LT^{-2} \\
[h] &= L
\end{aligned}$$

Possiamo anzitutto escludere la B, dato che l'argomento dell'esponenziale non è adimensionale

$$\left[\frac{v}{ah}\right] = \frac{LT^{-1}}{LT^{-2}L} = L^{-1}T$$

L'argomento del logaritmo nella espressione A è invece correttamente adimensionale:

$$\left[\frac{v^2}{ah}\right] = \frac{L^2T^{-2}}{LT^{-2}L}$$

ma il fattore rimanente non lo è

$$\left[\frac{Fv^9}{ma^5h^4}\right] = \frac{MLT^{-2} \times L^9T^{-9}}{M \times L^5T^{-10} \times L^4} = LT^{-1}$$

L'espressione C è invece adimensionale

$$\left[\frac{F^{3/2}v^6}{\sqrt{m^3a^9h^6}}\right] = \frac{M^{3/2}L^{3/2}T^{-3} \times L^6T^{-6}}{M^{3/2} \times L^{9/2}T^{-9} \times L^3} = M^0L^0T^0$$

ed è quindi la risposta corretta. Verifichiamo che la E e la F sono espressioni non adimensionali. Per risparmiare tempo, sfruttiamo il fatto che $[F] = [ma]$. Per la E abbiamo

$$\left[\frac{F^2 v^6}{m^2 a^5 h^2}\right] = \left[\frac{v^6}{a^3 h^2}\right] = \frac{L^6 T^{-6}}{L^3 T^{-6} L^2} = L$$

e per la F

$$\left[\frac{F v^7}{m a^5 h^3}\right] = \left[\frac{v^7}{a^4 h^3}\right] = \frac{L^7 T^{-7}}{L^4 T^{-8} L^3} = T$$

Domanda 5

La gittata dipende quadraticamente dalla velocità iniziale. Questo si può ricavare da semplici considerazioni dimensionali, dato che una grandezza fisica ℓ con le dimensioni di una lunghezza deve dipendere dai parametri rilevanti come

$$\ell = \frac{v_0^2}{g} F(\theta)$$

dove F è una funzione arbitraria, v_0 è la velocità iniziale e g l'accelerazione di gravità. Alternativamente si può ricordare o ricavare l'espressione esatta

$$\ell = \frac{2 v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g}$$

che chiaramente è della forma richiesta. Segue che se v_0 aumenta di un fattore 3, la gittata aumenterà di un fattore 9.

Domanda 6

Il tratto radiale deve essere necessariamente lungo $\ell_r = |\rho_A - \rho_B|$. Se si esegue prima il tratto azimutale, questo sarà lungo $\ell_a = \rho_A \Delta\phi$, con

$$\Delta\phi = \begin{cases} |\phi_A - \phi_B| & \text{se } |\phi_A - \phi_B| < \pi \\ \pi - |\phi_A - \phi_B| & \text{se } |\phi_A - \phi_B| < \pi \end{cases}$$

Se si esegue per secondo sarà invece $\ell_a = \rho_B \Delta\phi$. Per rendere minimo $\ell_a + \ell_b$ dobbiamo quindi scegliere il tratto azimutale più breve, e dato che nel nostro caso $\rho_B > \rho_A$ dovremo prima muoverci lungo la linea azimutale. Di conseguenza

$$\begin{aligned} \ell_r + \ell_a &= |\rho_A - \rho_B| + \rho_A \Delta\phi \\ &= 3.80 - 1.84 + 1.84\,(4.20 - 2.81)\,\mathrm{m} \\ &= 4.5176\mathrm{m} \end{aligned}$$

La risposta corretta è dunque la C.

Domanda 7

Dato che

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

e che

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_\rho \hat{e}_\rho\right) = \frac{dv_\rho}{dt}\hat{e}_\rho + v_\rho \frac{d\hat{e}_\rho}{dt}$$

abbiamo

$$a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y = \frac{dv_\rho}{dt}\hat{e}_\rho + v_\rho \frac{d\hat{e}_\rho}{dt}$$

Calcoliamo il prodotto scalare di ambo i membri con $\hat{e}_\rho$. Otteniamo

$$a_x \hat{e}_x \cdot \hat{e}_\rho + a_y \hat{e}_y \cdot \hat{e}_\rho = \frac{dv_\rho}{dt}\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\rho + v_\rho \frac{d\hat{e}_\rho}{dt} \cdot \hat{e}_\rho \tag{8.4.1}$$

Notiamo adesso che

$$\hat{e}_\rho = \frac{x\hat{e}_x + y\hat{e}_y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{e}_x + \frac{1}{2}\hat{e}_y$$

dove x e y sono le prime due coordinate cartesiane del punto P. Inoltre la derivata di un versore è perpendicolare la versore stesso, come si dimostra facilmente notando che

$$0 = \frac{d}{dt}(1) = \frac{d}{dt}\left(\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\rho\right) = 2\hat{e}_\rho \cdot \frac{d\hat{e}_\rho}{dt}$$

Dalla (8.4.1) segue allora che

$$\frac{dv_\rho}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}a_x + \frac{1}{2}a_y = 8.20981\mathrm{ms}^{-1}$$

La risposta corretta è quindi la F.

Domanda 8

Possiamo scomporre l'accelerazione in componente normale e tangente alla traiettoria

$$\vec{a} = a_\perp \hat{n} + a_\parallel \hat{\tau}$$

Ma nel nostro caso $\hat{\tau} = \hat{e}_\rho$, e quindi $a_\parallel$ è la quantità determinata precedentemente, $a_\parallel = \frac{dv_\rho}{dt}$. Calcolando il modulo quadro abbiamo dunque

$$|\vec{a}|^2 = a_\perp^2 + \left(\frac{dv_\rho}{dt}\right)^2$$

e quindi

$$a_\perp = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 - \left(\frac{dv_\rho}{dt}\right)^2} = 2.1998\mathrm{ms}^{-2}$$

La risposta corretta è quindi la B.

Domanda 9

Notiamo che eseguendo due esperimenti a forza fissata vale

$$a_1 - a_2 = m_2 - m_1$$

Dal risultato del primo e secondo esperimento possiamo quindi determinare la differenza tra le due "masse"

$$m_A - m_B = a_2 - a_1 = (2.94 - 0.439)\,\mathrm{ms}^{-2} = 2.501\mathrm{ms}^{-2}$$

Possiamo adesso predire la differenza di accelerazioni che avremo nel terzo e quarto esperimento

$$a_4 - a_3 = m_A - m_B$$

e dall'esito del terzo predire il risultato del quarto

$$a_4 = m_A - m_B + a_3 = (2.501 + 2.39)\,\mathrm{ms}^{-2} = 4.891\mathrm{ms}^{-2}$$

La risposta corretta è dunque la D.

Domanda 10

Utilizzando la corretta legge della dinamica abbiamo per due esperimenti a forza fissata

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{a_2}{a_1}$$

e dal risultato del primo e secondo esperimento possiamo determinare il rapporto delle masse

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{2.94}{0.439} = 6.69704$$

Possiamo adesso predire il rapporto delle accelerazioni che avremo nel terzo e quarto esperimento

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{m_A}{m_B}$$

e dall'esito del terzo predire il risultato del quarto

$$a_4 = \frac{m_A}{m_B} a_3 = 6.69704 \times 2.39\mathrm{ms}^{-2} = 16.0059\mathrm{ms}^{-2}$$

La risposta corretta è dunque la B.

8.5. 20 febbraio 2015

1. Un punto materiale di massa m si muove in una dimensione in un campo di forza conservativo con energia potenziale data da:

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}k_1(x+a)^2 & x < -a \\ 0 & -a < x < a \\ \frac{1}{2}k_2(x-a)^2 & x > a \end{cases}$$

dove x è l'ascissa del punto, mentre k_1, k_2 e a sono costanti positive note. Detta E l'energia meccanica totale del punto materiale, determinare il periodo T di oscillazione nel limite $E \to +\infty$.

a) $T = +\infty$

b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\sqrt{k_1 k_2}}}$

c) $T = \pi\left(\sqrt{\frac{m}{k_1}} + \sqrt{\frac{m}{k_2}}\right)$

d) Nessuna delle altre risposte proposte è corretta

e) $T = 0$

f) $T = 2\pi\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}}$

A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐ F ☐

2. Rispondere alla stessa domanda del problema precedente (1), nel limite $E \to 0$.

a) $T = +\infty$

b) $T = 2\pi\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}}$

c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\sqrt{k_1 k_2}}}$

d) $T = \pi\left(\sqrt{\frac{m}{k_1}} + \sqrt{\frac{m}{k_2}}\right)$

e) $T = 0$

f) Nessuna delle altre risposte proposte è corretta

A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐ F ☐

3. Un punto materiale di massa $m = 20.2$ g si muove in una dimensione in un campo di forza conservativo con energia potenziale data da

$$U(x) = ax^3 + bx^2 + c$$

dove x è l'ascissa del punto, $a = 0.760$ J/m^3, $b = 0.936$ J/m^2 e $c = 0.746$ J. Determinare la posizione di equilibrio stabile di ascissa minima x_{eq}.

a) Nessuna delle altre risposte proposte è corretta
b) $x_{eq} = -\frac{b}{a}$
c) $x_{eq} = c$
d) $x_{eq} = 0$
e) $x_{eq} = -\frac{2b}{3a}$
f) $x_{eq} = \frac{2b}{3a}$

A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐ F ☐

4. Nel caso del problema precedente (3), determinare la frequenza, in hertz, delle piccole oscillazioni intorno alla posizione $x = x_{eq}$.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{1.53}$ C $\boxed{3.33}$ D $\boxed{5.13}$ E $\boxed{6.93}$ F $\boxed{8.73}$

5. Sempre per il sistema descritto nel problema (3), se la particella si trova inizialmente nel punto di equilibrio stabile, determinare per quale valore minimo del modulo della velocità iniziale, in m/s, il moto non è periodico.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{2.76}$ C $\boxed{4.56}$ D $\boxed{6.36}$ E $\boxed{8.16}$ F $\boxed{9.96}$

6. Tarzan vuole lanciarsi attaccato a una liana di lunghezza $\ell = 6.37$ m, partendo da una posizione nella quale la liana è orizzontale, per eseguire una oscillazione completa (si trascurino gli attriti). Quale deve essere la minima tensione di rottura della liana, in newton, per permettere a Tarzan, che ha una massa di 67.2 kg, di tornare a destinazione senza incidenti?

A $\boxed{0}$ B $\boxed{1.98 \times 10^3}$ C $\boxed{3.78 \times 10^3}$ D $\boxed{5.58 \times 10^3}$ E $\boxed{7.38 \times 10^3}$ F $\boxed{9.18 \times 10^3}$

7. Come cambia la risposta al problema precedente (6) se sulla verticale del punto al quale la liana è fissata, al di sotto di esso di $\ell/3$, si trova un ramo orizzontale attorno al quale la liana si può avvolgere?

A $\boxed{0}$ B $\boxed{2.64 \times 10^3}$ C $\boxed{4.44 \times 10^3}$ D $\boxed{6.25 \times 10^3}$ E $\boxed{8.04 \times 10^3}$ F $\boxed{9.84 \times 10^3}$

8. Una massa $m_1 = 189$ g è collegata, tramite una molla di lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica 0.837 N/m, a un punto di sospensione che si trova sopra di essa. Una seconda molla, di lunghezza a riposo trascurabile e di costante elastica 0.462 N/m, è fissata a m_1 e, all'altra estremità più in basso, a una seconda massa m_2. È presente un debolissimo attrito che permette al sistema di arrivare a un regime stazionario, ma che può essere, per il resto, trascurato. Mediante una opportuna forza applicata in direzione verticale a m_2, si mantiene tale massa in moto armonico verticale secondo la legge $y_2 = A\cos(\omega t)$, dove y_2 è la quota della massa m_2 e $A = 10.0$ cm. Trovare per quale frequenza, in hertz, la massa m_1 oscilla a regime in opposizione di fase a y_2 e con uguale ampiezza di 10.0 cm.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{0.126}$ C $\boxed{0.306}$ D $\boxed{0.486}$ E $\boxed{0.666}$ F $\boxed{0.846}$

9. Nella situazione del problema precedente (8), per ottenere il risultato voluto è necessario applicare una forza con componente verticale, positiva se verso l'alto, della forma $F_y = F_A \cos(\omega t) + F_B \sin(\omega t) + F_C$, dove F_A, F_B e F_C sono costanti. Determinare $F_A + F_B$, in newton, nel caso $m_2 = 0$.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{0.0204}$ C $\boxed{0.0384}$ D $\boxed{0.0564}$ E $\boxed{0.0744}$ F $\boxed{0.0924}$

10. Rispondere alla domanda del problema precedente (9), nel caso $m_2 = m_1$.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{-0.0117}$ C $\boxed{-0.0297}$ D $\boxed{-0.0477}$ E $\boxed{-0.0657}$ F $\boxed{-0.0837}$

Soluzione

Domanda 1

La forza a cui è sottoposto il punto materiale si ottiene derivando il potenziale, e vale

$$F(x) = \begin{cases} -k_1 (x+a) & x < -a \\ 0 & -a < x < a \\ -k_2(x-a) & x > a \end{cases}$$

Quindi il punto materiale si muove a velocità costante per $-a < x < a$, compie mezzo periodo di oscillazione armonica attorno a $x = a$ per $x > a$ e mezzo periodo di oscillazione armonica per $x < -a$. La velocità costante nel tratto intermedio è legato all'energia dalla relazione

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

di conseguenza il tempo necessario per una oscillazione completa sarà

$$T = \pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} + \pi\sqrt{\frac{m}{k_2}} + 4a\sqrt{\frac{m}{2E}}$$

Abbiamo

$$\lim_{E\to\infty} \pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} + \pi\sqrt{\frac{m}{k_2}} + 4a\sqrt{\frac{m}{2E}} = \pi\left(\sqrt{\frac{m}{k_1}} + \sqrt{\frac{m}{k_2}}\right)$$

(il tempo speso nel tratto intermedio diviene trascurabile, dato che la velocità diviene molto grande). La risposta corretta è dunque la C.

Domanda 2

In questo caso

$$\lim_{E\to\infty} \pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} + \pi\sqrt{\frac{m}{k_2}} + 4a\sqrt{\frac{m}{2E}} = \pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} + \pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}$$

dato che il tempo speso nell'attraversare il tratto intermedio diviene molto grande (la velocità diviene sempre più piccola). La risposta corretta è quindi la A.

Domanda 3

Calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda del potenziale

$$\frac{dU}{dx} = 3ax^2 + 2bx$$
$$\frac{d^2U}{dx^2} = 6ax + 2b$$

Dalla derivata prima vediamo che il potenziale ha due punti stazionari, $x = 0$ e $x = -2b/(3a)$. Per $x = 0$ la derivata seconda vale

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0} = 2b > 0$$

e quindi il potenziale ha un minimo. Per $x = -2b/(3a)$ invece

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=-\frac{2}{3}\frac{b}{a}} = -2b$$

e quindi il potenziale ha un massimo. Di conseguenza abbiamo un'unica posizione di equilibrio stabile $x_{eq} = 0$, e la risposta corretta è la D.

Domanda 4

L'equazione del moto per il punto materiale è

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} = -3ax^2 - 2bx$$

Per piccole oscillazioni attorno a $x_{eq} = 0$ possiamo trascurare il termine proporzionale a x^2, ed otteniamo un oscillatore armonico

$$m\ddot{x} + 2bx = 0$$

con frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2b}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2 \times 0.936\mathrm{Jm}^{-2}}{0.0202\mathrm{kg}}} = 1.53214\mathrm{Hz}$$

La risposta corretta è quindi la B.

Domanda 5

Per non rimanere all'interno della buca di potenziale nella quale si trova il punto materiale deve riuscire a superare il massimo del potenziale in $x = -2b/(3a)$. Per tale valore

$$U\left(-\frac{2b}{3a}\right) = a\left(-\frac{2}{3}\frac{b}{a}\right)^3 + b\left(-\frac{2}{3}\frac{b}{a}\right)^2 + c$$
$$=$$

mentre nella posizione iniziale

$$U(0) = c$$

Dalla conservazione dell'energia vediamo che deve essere

$$\frac{1}{2}mv^2 + c > \frac{4}{27}\frac{b^3}{a^2} + c$$

e quindi

$$v > \sqrt{\frac{8}{27}\frac{b^3}{ma^2}} = \sqrt{\frac{8}{27}\frac{(0.936\text{Jm}^{-2})^3}{(0.0202\text{kg})\,(0.760\text{J}m^{-3})^2}} = 4.56339\text{ms}^{-1}$$

La risposta corretta è quindi la C.

Domanda 6

Indichiamo con θ l'angolo tra la liana e la direzione verticale. L'equazione cardinale per Tarzan nella direzione parallela alla liana vale

$$-m\frac{v^2}{\ell} = -T + mg$$

dove T è la tensione del filo. Di conseguenza

$$T = mg + m\frac{v^2}{\ell}$$

Dalla conservazione dell'energia abbiamo inoltre

$$\frac{1}{2}mv^2 - mg\ell\cos\theta = 0$$

da cui

$$\frac{v^2}{\ell} = 2g\cos\theta$$

e sostituendo nell'espressione per la tensione troviamo

$$T = mg + 2mg\cos\theta$$

Il valore massimo che la liana deve essere in grado si sostenere si ha per $\theta = 0$, e quindi $T_{max} = 3mg = 3 \times 67.2\text{kg} \times 9.8\text{ms}^{-2} = 1.98 \times 10^3\text{N}$. La risposta corretta è dunque la B.

Domanda 7

Quando la liana tocca il ramo la velocità di Tarzan non cambia (l'energia si conserva) ma cambia il raggio di curvatura della sua traiettoria. Quindi l'equazione per la tensione nella posizione verticale diviene

$$T = mg + \frac{3}{2}m\frac{v^2}{\ell} = 4mg = 2.64 \times 10^3\text{N}$$

La risposta corretta è dunque la B.

Domanda 8

L'equazione del moto per la massa m_1 è data da

$$m_1\ddot{y}_1 = -k_1\left(y_1 - y_0\right) - k_2\left(y_1 - y_2\right) - m_1 g$$

dove $y_2 = A\cos\omega t$. Abbiamo indicato con k_1 e k_2 le costanti elastiche rispettivamente della molla che collega m_1 al punto di sospensione ed all'altra massa, e con y_0 la quota del punto di sospensione.

Possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$m\frac{d^2}{dt^2}\left(y_1 - y_{1,eq}\right) + \left(k_1 + k_2\right)\left(y_1 - y_{1,eq}\right) = k_2 A\cos\omega t$$

Quindi la massa m_1 compie delle oscillazioni forzate attorno alla posizione di equilibrio

$$y_{1,eq} = -\frac{m_1 g - k_1 y_0}{k_1 + k_2}$$

La soluzione a regime sarà

$$\left(y_1 - y_{1,eq}\right) = \frac{k_2 A\cos\omega t}{-m_1\omega^2 + k_1 + k_2}$$

che sarà una oscillazione con la stessa ampiezza della forzante e in opposizione di fase se

$$\frac{k_2}{-m_1\omega^2 + k_1 + k_2} = -1$$

cioè quando (ricordando che $\omega = 2\pi f$)

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m_1}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0.837\text{Nm}^{-1} + 2 \times 0.462\text{Nm}^{-1}}{0.189\text{kg}}} \\ &= 0.485813\text{Hz} \end{aligned}$$

La risposta corretta è quindi la D.

Domanda 9

La forza da applicare all'estremo della molla di costante elastica k_2 deve essere proporzionale al suo allungamento, quindi

$$k_2\left(y_2-y_1\right)=F_A\cos\omega t+F_B\sin\omega t+F_C$$

La posizione di equillibrio si può riassorbire scegliendo opportunamente F_C, e per la parte oscillante abbiamo

$$2k_2A\cos\omega t=F_A\cos\omega t+F_B\sin\omega t+F_C$$

di conseguenza $F_B=0$ e $F_A=2k_2A=2\times 0.462\text{Nm}^{-1}\times 0.1\text{m}=0.0924\text{N}$. La risposta corretta è quindi la F.

Domanda 10

In questo caso deve valere

$$m_2\ddot{y}_2+k_2\left(y_2-y_1\right)=F_A\cos\omega t+F_B\sin\omega t+F_C$$

cioè, riassorbento nuovamente la posizione di equilibrio in F_C

$$-A\omega^2m_2\cos\omega t+2k_2A\cos\omega t=F_A\cos\omega t+F_B\sin\omega t$$

ossia $F_B=0$ e

$$F_A=\left(2k_2-m_2\omega^2\right)A$$

Sostituendo il valore di ω determinato nella risposta alla Domanda 8 troviamo $(m_1=m_2)$

$$\begin{aligned}F_A&=\left[2k_2-m_2\left(\frac{k_1+2k_2}{m_1}\right)\right]A\\&=-k_1A=-0.837\text{Nm}^{-1}\times 0.1\text{m}=-0.0837\text{N}\end{aligned}$$

La risposta corretta è quindi la F.

8.6. 8 maggio 2015

1. Si consideri una macchina termica reversibile che utilizza una mole di gas ideale monoatomico. Inizialmente il *sistema* termodinamico costituito dal gas si trova nello stato iniziale A, con volume $V_A = 20.0$ dm^3 e pressione $P_A = 10^5$ Pa. A partire dallo stato A il sistema effettua un riscaldamento isocoro che lo porta nello stato B, con pressione $P_B = 4P_A$. Successivamente il sistema effettua un'espansione fino al volume $V_C = 2V_A$, che lo porta nello stato C, con la stessa pressione iniziale P_A. Durante tutto il corso dell'espansione si fa in modo che le variazioni (negative) di pressione siano proporzionali alle variazioni di volume. Infine il sistema ritorna allo stato A mediante una compressione isobara. Per fissare i segni, si definiscano il calore Q e il lavoro L scambiati come, rispettivamente, il calore assorbito dal sistema e il lavoro fatto dal sistema. Determinare il lavoro L, in kJ, fatto in un ciclo.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{1.20}$ C $\boxed{3.00}$ D $\boxed{4.80}$ E $\boxed{6.60}$ F $\boxed{8.40}$

2. Nel caso del problema precedente 1., determinare la variazione di energia interna del sistema termodinamico, in kJ, durante la fase di espansione (da B a C).

A $\boxed{0}$ B $\boxed{-2.40}$ C $\boxed{-4.20}$ D $\boxed{-6.00}$ E $\boxed{-7.80}$ F $\boxed{-9.60}$

3. Nel caso del problema 1., determinare il calore scambiato Q, in kJ, durante la fase di compressione (da C a A).

A $\boxed{0}$ B $\boxed{-1.40}$ C $\boxed{-3.20}$ D $\boxed{-5.00}$ E $\boxed{-6.80}$ F $\boxed{-8.60}$

4. Nel caso del problema 1., determinare la differenza $Q - L$, in joule, tra calore e lavoro scambiati complessivamente durante un intero ciclo.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{222}$ C $\boxed{402}$ D $\boxed{582}$ E $\boxed{762}$ F $\boxed{942}$

5. Durante lo studio di un *ipotetico* gas si stabiliscono i seguenti fatti:

   a) L'equazione di stato è ben descritta dall'espressione $PV^2 = nRV_0T$, dove la costante $V_0 = 30.0$ dm^3 ha le dimensioni di un volume e gli altri simboli hanno il significato ovvio.

   b) Il calore molare a volume costante, misurato per $V = 45.8$ dm^3, dipende dalla temperatura secondo la legge $C_v = RT/T_0$, dove la costante $T_0 = 126$ K ha le dimensioni di una temperatura.

   c) L'espansione (adiabatica) nel vuoto avviene senza variazioni di temperatura.

   Determinare la temperatura finale, in kelvin, di una mole di gas dopo una trasformazione reversibile isocora a partire da uno stato iniziale A con $V = 45.8$ dm^3 e $T = 214$ K, nella quale viene ceduta al gas una quantità di calore di 17.3 kJ.

A $\boxed{0}$ B $\boxed{215}$ C $\boxed{395}$ D $\boxed{575}$ E $\boxed{755}$ F $\boxed{935}$

6. Per il gas del problema precedente 5., si desidera esprimere l'energia interna U mediante una opportuna funzione f. Quale delle seguenti espressioni è corretta?

   A: $U = f(PV^2)$

   B: $U = f(P^2V)$

   C: $U = f(V)$

   D: $U = f(PV)$

   E: Nessuna

   F: $U = f(P)$

A [| |] B [| |] C [| |] D [| |] E [| |] F [| |]

7. Per una mole di gas del problema 5., determinare il lavoro, in kJ, che esso compie in un'espansione isoterma reversibile che parta dallo stato iniziale A e si concluda con un volume triplo (stato B).

A [0] B [0.237] C [0.417] D [0.597] E [0.777] F [0.957]

8. Per una mole di gas del problema 5., determinare il lavoro, in kJ, che esso compie in un'espansione adiabatica reversibile che parta dallo stato iniziale A e si concluda con una temperatura dimezzata (stato D).

A [0] B [1.13] C [2.93] D [4.73] E [6.53] F [8.33]

9. Per il gas del problema 5., si desidera esprimere il rapporto $\gamma = C_p/C_v$, tra calore molare a pressione costante e calore molare a volume costante, mediante una opportuna funzione g. Quale delle seguenti espressioni è corretta?

   A: Nessuna

   B: $\gamma = g(VT)$

   C: $\gamma = g(P)$

   D: $\gamma = g(T)$

   E: $\gamma = g(PT)$

   F: $\gamma = g(V)$

A [| |] B [| |] C [| |] D [| |] E [| |] F [| |]

10. Per il gas del problema 5., determinare il rendimento del motore termico ottenuto con il seguente ciclo reversibile: la prima trasformazione coincide con quella da A a B del problema 7., la seconda trasformazione è un'espansione adiabatica reversibile da B a C che si arresta quando la temperatura coincide con quella dello stato D del problema 8., la terza trasformazione è una compressione isoterma da C a D e la quarta ed ultima trasformazione è una compressione adiabatica da D a A (trasformazione inversa di quella del problema 8.

A [0] B [0.140] C [0.320] D [0.500] E [0.680] F [0.860]

Soluzione

Domanda 1

Il grafico del ciclo nel piano (P, V) è un triangolo e il lavoro è dato dall'area del triangolo:

$$L_{\text{ciclo}} = \frac{1}{2}\left(P_B - P_A\right)\left(V_C - V_A\right) = \frac{3}{2} P_A V_A$$

Numericamente

$$L_{\text{ciclo}} = 1.5 \times 10^5 \times 20.0 \times 10^{-3}\text{J} = 3.0\text{kJ}$$

La risposta corretta è dunque la C.

Domanda 2

Dall'equazione di stato dei gas ideali, la temperatura iniziale vale

$$T_B = \frac{P_B V_B}{R} = 4\frac{P_A V_A}{R}$$

la temperatura finale vale

$$T_C = \frac{P_C V_C}{R} = 2\frac{P_A V_A}{R}$$

e, dall'espressione dell'energia per una mole di gas ideale monoatomico, si ricava la variazione di energia interna:

$$\Delta U_{BC} = \frac{3}{2} R\left(T_C - T_B\right) = -3 P_A V_A$$

Numericamente

$$\Delta U_{BC} = -2 L_{\text{ciclo}} = -6.0\text{kJ}$$

e la risposta corretta è dunque la D.

Domanda 3

La temperatura finale vale

$$T_A = \frac{P_A V_A}{R}$$

e, dall'espressione del calore molare a pressione costante per un gas ideale monoatomico, si ottiene:

$$Q = C_P\left(T_A - T_C\right) = -\frac{5}{2} P_A V_A$$

Numericamente

$$Q = -\frac{5}{3} L_{\text{ciclo}} = -5.0\text{kJ}$$

e la risposta corretta è dunque la D.

Domanda 4

Poiché il sistema termodinamico compie un ciclo, la sua variazione di energia interna ΔU è nulla. Dal primo principio segue:

$$Q - L = \Delta U = 0$$

La risposta corretta è dunque la A.

Domanda 5

Detti F lo stato finale e Q_{AF} il calore scambiato durante la trasformazione, dalla definizione di C_v si ha:

$$Q_{\mathrm{AF}} = \int_{T_A}^{T_F} C_v dT = \int_{T_A}^{T_F} \frac{RT}{T_0} dT = \frac{1}{2}\frac{R}{T_0}\left({T_F}^2 - {T_A}^2\right)$$

da cui:

$$T_F = \sqrt{\frac{2T_0 Q_{\mathrm{AF}}}{R} + {T_A}^2}$$

Numericamente $T_F \simeq 755$ quindi la risposta corretta è la E.

Domanda 6

Poiché l'energia interna scritta in funzione di T e V non varia col volume (proprietà c), si può scrivere $U = f(T)$ e, dall'equazione di stato, segue

$$U = f\left(PV^2\right)$$

cioè la risposta A.

Domanda 7

Dall'espressione del lavoro

$$L_{\mathrm{AB}} = \int_{V_A}^{V_B} P(V) dV$$

tenendo conto della forma dell'isoterma data dall'equazione di stato $P = RT_A/V^2$, si ha:

$$L_{\mathrm{AB}} = \int_{V_A}^{V_B} \frac{RV_0 T_A}{V^2} dV = -RV_0 T_A \left(\frac{1}{V_B} - \frac{1}{V_A}\right) = \frac{2}{3} R \frac{V_0}{V_A} T_A$$

Numericamente $L_{AB} \simeq 0.777\mathrm{kJ}$, quindi la risposta corretta è la E.

Domanda 8

Dal primo principio e dalla soluzione del problema (2), chiamando T (invece di T_F) la temperatura di un generico stato finale raggiunto dall'isocora, si ha:

$$\Delta \mathrm{U} = Q = \frac{1}{2}\frac{R}{T_0}\left(T^2 - {T_A}^2\right)$$

da cui è immediato ricavare una possibile espressione per la $f(T)$ del problema (6):

$$U = f(T) = \frac{1}{2}\frac{R}{T_0}T^2$$

Infine, per l'adiabatica in oggetto, si ha:

$$L_{\mathrm{AD}} = -\Delta \mathrm{U} = -\left(f\left(T_D\right) - f\left(T_A\right)\right) = \frac{3}{8}\frac{R{T_A}^2}{T_0}$$

Numericamente $L_{\mathrm{AD}} \simeq 1.133\mathrm{kJ}$ e quindi la risposta corretta è la B.

Domanda 9

Dalla definizione:

$$C_p = \left(\frac{\delta \mathrm{Q}}{dT}\right)_p = \left(\frac{\delta \mathrm{L} + dU}{dT}\right)_p = P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p$$

La prima derivata si ottiene dall'equazione di stato, la seconda, poiché $U = f(T)$, coincide con $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v = C_v$; pertanto:

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\frac{RV_0T}{P}} \\ \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p &= \frac{RV_0}{2VP} \\ C_p &= \frac{RV_0}{2V} + C_v \end{aligned}$$

Infine:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{RV_0}{2VC_v} = 1 + \frac{V_0T_0}{2VT} = g\left(V\,T\right)$$

cioè la risposta B.

Domanda 10

Si tratta semplicemente di un ciclo di Carnot condotto fra le temperature T_A e T_D, pertanto l'efficienza vale

$$\eta = 1 - \frac{T_D}{T_A} = \frac{1}{2}$$

cioè la risposta C.

8.7. 30 ottobre 2015

Negli esercizi seguenti le coordinate polari sferiche vengono indicate con i simboli r,θ,ϕ, dove r è la distanza dall'origine O, θ è l'angolo polare (colatitudine) e ϕ è l'azimut; le coordinate cilindriche vengono indicate con i simboli ρ,ϕ,z, dove ρ è la distanza dall'asse polare, ϕ è l'azimut e z è la quota; le coordinate cartesiane vengono indicate con i simboli x,y,z. Quando più tipi di coordinate sono usati nello stesso esercizio, salvo avviso contrario i diversi sistemi sono associati nel modo usuale: origini coincidenti, assi polari coincidenti tra loro e coincidenti con l'asse z, origine degli azimut coincidente con il semiasse $x > 0$, ecc.

Valore standard dell'accelerazione di gravità: $g = 9.80665$ m/s^2.

1. Dopo aver verificato che tutti gli atomi di idrogeno hanno lo stesso raggio, si vuole sviluppare una teoria che determini tale raggio r. I dati disponibili sono: la massa $m_p = 1.67 \cdot 10^{-24}$ g del protone, che occupa il centro dell'atomo, la massa $m_e = 9.11{\cdot}10^{-28}$ g dell'elettrone, che percorre rivoluzioni circolari intorno al protone, e il modulo $q = 4,80{\cdot}10^{-10}$ g$^{1/2}$cm$^{3/2}$s^{-1} delle cariche elettriche, opposte, di protone e elettrone. Con considerazioni dimensionali, quale formula si può ipotizzare per il raggio dell'atomo di idrogeno?
   A: $r = q^2/m_e$
   B: $r = m_p\, m_e/(m_p + m_e)/q^2$
   C: $r = q^2\,(m_p + m_e)/(m_p\, m_e)$
   D: $r = q^2/m_p$
   E: Nessuna delle altre risposte proposte è corretta
   F: Non esiste alcuna formula possibile dei dati disponibili
   A [| |] B [| |] C [| |] D [| |] E [| |] F [| |]

2. Un'automobile, dotata di ruote con raggio di 31.0 cm, percorre una semicirconferenza di raggio 9.60 km in 54.4 minuti. Determinare il modulo della velocità (vettoriale) media, in km/h.
   A [|0|] B [|21.2|] C [|39.2|] D [|57.2|] E [|75.2|] F [|93.2|]

3. Nel caso del problema precedente (2), determinare la velocità scalare media (media del modulo della velocità), in km/h.
   A [|0|] B [|15.3|] C [|33.3|] D [|51.3|] E [|69.3|] F [|87.3|]

4. Date le grandezze $F = 91.9$ kg m s^{-2}, $m = 22.3$ g, $a = 3.74$ m/s^2, $v = 30.0$ km/h, $x = 41.9$ cm, $t = 461$ s e $\omega = 77.6$ rad/s, determinarne una espressione dimensionalmente corretta per la variabile angolare α misurata in radianti.
   A: $\alpha = \omega\, t \log{(a/v^2)}$
   B: $\alpha = m\, \omega\, a \cos{(\omega\, x/v)}/F$
   C: $\alpha = F^2 x \log{(v^2/(a\, x))}/(m\, v^2 a)$
   D: $\alpha = F\, a\, x^2 e^{v^4/(a^2 x)}/(v^4 m)$
   E: $\alpha = m^2 a\, v^2 \sin{(\omega t)}/(F^2 x)$
   F: Nessuna delle espressioni proposte è dimensionalmente corretta
   A [| |] B [| |] C [| |] D [| |] E [| |] F [| |]

5. Una persona, viaggiando sulla superficie della Terra, si muove dapprima dal punto A (latitudine 36.0^o N, longitudine 15.0^o E) al punto B (latitudine 37.4^o N) lungo un meridiano e, successivamente, dal punto B al punto C (longitudine 13.8^o E) lungo un parallelo. Supponendo che la Terra sia sferica con raggio di 6370 km, determinare la lunghezza, in km, della traiettoria complessiva.
A $\boxed{|0|}$ B $\boxed{|262|}$ C $\boxed{|442|}$ D $\boxed{|622|}$ E $\boxed{|802|}$ F $\boxed{|982|}$

6. Un punto P, nella posizione di coordinate cilindriche (ρ = 1.93 m, ϕ = 5.74 rad, z = 3.50 m), ha una velocità $\mathbf{v} = v_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi$, con v_ϕ = 8.69 m/s, e un'accelerazione $\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{e}}_x + a_y \hat{\mathbf{e}}_y$, con $a_x = a_y$ = 6.03 m/s^2. Determinare $\frac{dv_\phi}{dt}$ in m/s^2, nella posizione data.
A $\boxed{|0|}$ B $\boxed{|1.08|}$ C $\boxed{|2.88|}$ D $\boxed{|4.68|}$ E $\boxed{|6.48|}$ F $\boxed{|8.28|}$

7. Un cannone spara un proiettile su un pianura da un'altezza di 394 m. Il tiro è orizzontale e la velocità del proiettile all'uscita dal cannone vale 453 m/s. Determinare la gittata (a che distanza orizzontale il proiettile cade sulla pianura) in chilometri.
A $\boxed{|0|}$ B $\boxed{|2.26|}$ C $\boxed{|4.06|}$ D $\boxed{|5.86|}$ E $\boxed{|7.66|}$ F $\boxed{|9.46|}$

8. Una particella parte dall'origine di un sistema cartesiano al tempo $t = 0$ e si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $v_x \hat{\mathbf{e}}_x + v_y \hat{\mathbf{e}}_y + v_z \hat{\mathbf{e}}_z$, con v_x = 2.85 m/s, v_y = 4.01 m/s e v_z = 3.23 m/s. Una seconda particella parte dalla stessa origine al tempo $t = 2$ s e si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $w_x \hat{\mathbf{e}}_x + w_y \hat{\mathbf{e}}_y + w_z \hat{\mathbf{e}}_z$, con w_x = 8.40 m/s, w_y = 4.91 m/s e w_z = 2.66 m/s. Determinare la distanza, in metri, tra le due particelle al tempo $t = 4$ s.
A $\boxed{|0|}$ B $\boxed{|11.2|}$ C $\boxed{|29.2|}$ D $\boxed{|47.2|}$ E $\boxed{|65.2|}$ F $\boxed{|83.2|}$

9. Un'imbarcazione attraversa un fiume con una traiettoria rettilinea perpendicolare alle rive del fiume. Il modulo della velocità con cui scorre l'acqua del fiume è 12.8 km/h. Il modulo della velocità (costante) con cui naviga la barca in uno specchio di acqua ferma è 15.5 km/h. La larghezza del fiume è 72.4 m. Determinare in quanto tempo, in secondi, la barca attraversa il fiume se si muove a velocità costante.
A $\boxed{|0|}$ B $\boxed{|11.8|}$ C $\boxed{|29.8|}$ D $\boxed{|47.8|}$ E $\boxed{|65.8|}$ F $\boxed{|83.8|}$

10. Mi trovo al finestrino di un treno che parte da fermo con un'accelerazione costante. Dopo un tempo 7.14 s dalla partenza, lascio cadere un oggetto fuori del finestrino, da un'altezza di 2 metri rispetto al suolo, proprio mentre mi trovo davanti a un osservatore fermo sulla strada in prossimità del binario. L'osservatore vede l'oggetto toccare terra 7.42 m più avanti rispetto alla sua posizione. Anch'io osservo l'oggetto che tocca terra, ma più indietro di una certa distanza x rispetto alla mia posizione. Determinare x in metri.
A $\boxed{|0|}$ B $\boxed{|0.152|}$ C $\boxed{|0.332|}$ D $\boxed{|0.512|}$ E $\boxed{|0.692|}$ F $\boxed{|0.872|}$

Soluzione

Domanda 1

Il raggio dell'idrogeno deve avere le dimensioni di una lunghezza. Tutte le espressioni proposte contengono un fattore proporzionale al quadrato di una carica, che ha dimensioni

$$\left[q^2\right] = ML^3T^{-1}$$

quindi è necessario moltiplicare per un fattore che abbia dimensionalità temporale e spaziale non nulla. Ma tutti i fattori proposti sono combinazioni di masse, e quindi nessuno può essere corretto.

Domanda 2

Domanda 3

Domanda 4

Domanda 5

Domanda 6

Domanda 7

Domanda 8

Domanda 9

Domanda 10

8.8. 5 maggio 2017

Informazioni preliminari.

1. Due corpi hanno capacità termiche della forma $C_1 = \alpha$ e $C_2 = \beta\Theta$ dove α e β sono costanti opportunamente dimensionate e Θ è la temperatura. Si mettono in contatto i due corpi che si trovano alle temperature iniziali Θ_1 e Θ_2 e si misura la temperatura di equilibrio, trovando Θ_f. Quale è il valore del rapporto β/α?
   A B C D E F

2. In un recipiente è posto un corpo di capacità termica C ad una temperatura Θ_i. Quanti grammi di acqua ad una temperatura Θ_0 si devono aggiungere per ottenere all'equilibrio una temperatura Θ_f?
   A B C D E F

3. In una trasformazione termodinamica quasistatica una mole di un gas perfetto raddoppia il suo volume. La pressione finale è uguale alla pressione iniziale P. Sapendo che la pressione massima raggiunta durante la trasformazione è il doppio di quella iniziale, quale delle seguenti affermazioni a proposito del lavoro totale compiuto dal gas durante la trasformazione è vera:
   A: È sicuramente negativo.
   B: È sicuramente positivo.
   C: Può essere arbitrariamente grande.
   D: Vale $P\Delta V$
   E: È sicuramente minore di $2P\Delta V$
   F: Vale $2P\Delta V$
   A B C D E F

4. Tre sbarre della stessa sezione $S =$ e lunghezza $\ell =$ sono saldate tra loro in modo da ottenerne una sola di lunghezza 3ℓ. Se le conducibilità termica dei materiali delle tre sbarre è σ_1, σ_2 e σ_3 la resistenza termica finale vale
   A B C D E F

5. Due corpi hanno capacità termiche $C_1 =$ e $C_2 =$. Si trovano *inizialmente* a una certa differenza di temperatura $\Delta\Theta_0$, e vengono posti in contatto termico mediante una opportuna sbarra di capacità termica trascurabile. Si osserva che la differenza di temperatura si riduce a e^{-1} volte il valore iniziale in un tempo τ. Si ripete l'esperimento sostituendo il primo corpo con uno di capacità termica C_1' e si verifica che il tempo τ si dimezza. Quanto vale C_1'?
   A B C D E F

6. La corda di una chitarra viene mantenuta ad una tensione τ e se sollecitata produce un suono ad una frequenza di $f = 442\text{Hz}$ (più armoniche). Per quale variazione $\Delta\tau$ della tensione il suono viene prodotto alla frequenza $f' = 440\text{Hz}$?
   A B C D E F

7. Ai due lati opposti di un recipiente molto grande contenente un liquido di densità ρ sono praticati due piccoli fori di sezione S, ad un livello rispettivamente h_1 (foro a sinistra) e h_2 (foro a destra) sotto la superficie libera. Il recipiente è appoggiato ad un piano orizzontale privo di attrito. Quale forza esterna orizzontale è necessario applicare al sistema per mantenerlo in quiete? Si consideri un sistema di riferimento con un asse orizzontale orientato da sinistra a destra.
A [| |] B [| |] C [| |] D [| |] E [| |] F [| |]

8. Un corpo di densità ρ è introdotto in un recipiente contenente un liquido di densità $\rho_L > \rho$. All'equilibrio il rapporto tra il volume al di sotto della superficie e quello totale vale
A [| |] B [| |] C [| |] D [| |] E [| |] F [| |]

9. Considerando n moli di un gas perfetto, per quale valore della costante a la quantità $VT^a\delta Q$ è un differenziale esatto?
A [| |] B [| |] C [| |] D [| |] E [| |] F [| |]

Soluzione

Domanda 1

Il sistema dei due corpi non scambia calore con l'esterno, quindi detti Q_1 e Q_2 i calori assorbiti da ciascuno deve essere $Q_1 + Q_2 = 0$. Dato che

$$Q_1 = \int_{\Theta_1}^{\Theta_f} \alpha d\Theta = \alpha\left(\Theta_f - \Theta_1\right)$$
$$Q_2 = \int_{\Theta_2}^{\Theta_f} \beta\Theta d\Theta = \frac{1}{2}\beta\left(\Theta_f^2 - \Theta_2^2\right)$$

troviamo

$$\alpha\left(\Theta_f - \Theta_1\right) + \frac{1}{2}\beta\left(\Theta_f^2 - \Theta_2^2\right) = 0$$

e quindi

$$\frac{\beta}{\alpha} = 2\alpha\frac{\Theta_1 - \Theta_f}{\Theta_f^2 - \Theta_2^2}$$

Domanda 2

La temperatura finale è data da

$$\Theta_f = \frac{C\Theta_i + mc_{H_2O}\Theta_0}{C + mc_{H_2O}}$$

dove c_{H_2O} è il calore specifico per unità di massa dell'acqua. Si ottiene quindi

$$m = \frac{C\left(\Theta_f - \Theta_i\right)}{c_{H_2O}\left(\Theta_0 - \Theta_f\right)}$$

Domanda 3

Il lavoro può essere arbitrariamente grande. Basta considerare una trasformazione che porta dallo stato iniziale a quello finale, seguito da un numero qualsiasi di cicli fatti in modo da rispettare i vincoli e con lavoro fatto dal gas positivo.

Domanda 4

Le tre resistenze sono in serie, quindi

$$\begin{aligned} R_T &= R_1 + R_2 + R_3 \\ &= \frac{\ell}{S}\left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_3}\right) \end{aligned}$$

Domanda 5

La differenza di temperatura tra i due corpi segue la legge

$$\Delta T(t) = \Delta T(0) e^{-\frac{t}{RC}}$$

dove R è la resistenza termica della sbarra e C la capacità termica ridotta del sistema

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Quindi

$$\tau = RC$$

Sostituendo il primo corpo abbiamo

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{RC'}{RC} = \frac{C_1' C_2}{C_1' + C_2} \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} = \frac{1}{2}$$

Di conseguenza

$$C_1' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + 2C_2}$$

Domanda 6

La frequenza di oscillazione dipende dalla radice quadrata della tensione. Quindu i

$$\frac{f'}{f} = \sqrt{\frac{\tau'}{\tau}}$$

da cui

$$\tau' - \tau = \tau\left[\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - 1\right]$$

Domanda 7

Applicando il teorema di Bernoulli si trova che la velocità di uscita dal foro è

$$v = \sqrt{2gh}$$

Consideriamo ad un certo istante il recipiente e il liquido in esso ancora contenuto. La variazione della quantità di moto orizzontale di questo sistema nel tempo Δt, se il recipiente rimane in quiete, è

$$\Delta P = -\left(\rho v_1 S\right)\Delta t\, v_1 + \left(\rho v_2 S\right)\Delta t\, v_2$$

quindi

$$\frac{dP}{dt} = \rho S\left(v_2^2 - v_1^2\right) = 2\rho g S\left(h_2 - h_1\right)$$

Questa è la forza applicata.

Domanda 8

All'equilibrio la spinta di Archimede deve equilibrare la forza peso, dunque

$$\rho V g = \rho_L V_i g$$

dove V è il volume totale e V_i quello immerso. Quindi

$$\frac{V_i}{V} = \frac{\rho}{\rho_L}$$

Domanda 9

Abbiamo

$$V T^a \delta Q = n V T^a c_V dT + n V T^a P dV$$

Se si tratta di un differenziale esatto, consideranto T e V come variabili indipendenti deve essere

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[n V T^a P\right] = \frac{\partial}{\partial V}\left[n c_V V T^a\right]$$

Cioè

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial T}\left[n V T^a \frac{nRT}{V}\right] &= \frac{\partial}{\partial V}\left[n c_V V T^a\right] \\
R\frac{\partial}{\partial T}\left[T^{a+1}\right] &= T^a c_V \frac{\partial}{\partial V}\left[V\right] \\
R\left(a+1\right) T^a &= T^a c_V
\end{aligned}$$

In conclusione

$$a = \frac{c_V}{R} - 1$$

8.9. Dummy