PROBLEMA 1.1

Periodo di un pendolo ⋆

Mediante considerazioni dimensionali determinare la dipendenza della frequenza di oscillazione f di un pendolo inizialmente in posizione verticale dai parametri rilevanti per il problema, ossia

- la lunghezza ℓ del pendolo
- la sua massa m
- l'accelerazione di gravità g
- la velocità iniziale v_0

Soluzione

I parametri in gioco sono la massa del pendolo m, la sua lunghezza ℓ, l'accelerazione di gravità g e la velocità iniziale v_0. Vogliamo con essi costruire una grandezza delle dimensioni di un tempo, cioè

$$[m^\alpha \ell^\beta g^\gamma v_0^\delta] = M^\alpha L^{\beta+\gamma+\delta} T^{-2\gamma-\delta} = T \tag{1.1.1}$$

Otteniamo il sistema

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta+\gamma+\delta &= 0 \\ -2\gamma-\delta &= 1 \end{aligned}$$

che può essere risolto nella forma

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= \frac{1-\delta}{2} \\ \gamma &= -\frac{1+\delta}{2} \end{aligned}$$

con δ arbitrario. Quindi qualsiasi combinazione del tipo

$$\ell^{\frac{1-\delta}{2}} g^{-\frac{1+\delta}{2}} v_0^\delta = \left(\frac{v_0^2}{\ell g}\right)^{\frac{\delta}{2}} \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

ha le dimensioni di un tempo. La soluzione per il periodo sarà quindi della forma

$$T = f\left(\frac{v_0^2}{\ell g}\right)\sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{1.1.2}$$

dove f è una funzione arbitraria del parametro adimensionale

$$\Pi_1 = \frac{v_0^2}{\ell g}$$

Questa funzione esprime una possibile dipendenza (che in effetti esiste) del periodo di oscillazione di un pendolo dalla sua ampiezza. Il principio di isocronia delle oscillazioni, valido approssimativamente per piccole ampiezze, ci dice che

$$\lim_{x \to 0} f(x) = C \tag{1.1.3}$$

dove C è una costante strettamente maggiore di zero. Risolvendo le equazioni del moto si troverebbe che la formula è corretta, e che $C = 2\pi$.