PROBLEMA 1.3

Pendolo sulla luna ⋆

Un pendolo di massa $m = 10^{-1}$kg e lunghezza $\ell = 1$m viene lanciato sulla terra ($g = 9.822\text{ms}^{-2}$) dalla posizione di equilibrio con una velocità iniziale $v_0 = 5\,\text{ms}^{-1}$. In queste condizioni il periodo di oscillazione è $T = 2.1$s. Sulla superficie della luna l'accelerazione gravitazionale vale 1.625ms^{-2}. Determinare sulla base di argomenti dimensionali come potrebbe essere costruito un nuovo pendolo e come dovrebbe essere lanciato (cioè quali valori dovrebbero avere ℓ, m, v_0) per ottenere lo stesso periodo di oscillazione.

Soluzione

Riprendendo l'analisi svolta nell'esercizio 1.1 sappiamo che vale

$$T = f\left(\frac{v_0^2}{\ell g}\right)\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Sulla luna vale $g' = \lambda g$, dove

$$\lambda = \frac{1.625}{9.822} \simeq 0.165$$

Dato che il periodo deve essere lo stesso, dovremo scegliere dei nuovi parametri ℓ', m' e v_0' in modo da avere

$$f\left(\frac{v_0^2}{\ell g}\right)\sqrt{\frac{\ell}{g}} = f\left(\frac{v_0'^2}{\ell' g'}\right)\sqrt{\frac{\ell'}{g'}}$$

Dato che non conosciamo la forma di $f(x)$, dobbiamo imporre separatamente le due condizioni

$$\begin{aligned}\frac{\ell}{g} &= \frac{\ell'}{g'}\\ \frac{v_0^2}{\ell g} &= \frac{v_0'^2}{\ell' g'}\end{aligned}$$

Come si vede la massa non gioca alcun ruolo. Invece dalla prima relazione segue che

$$\ell' = \frac{g'}{g}\ell = \lambda\ell$$

e sostituendo nella seconda abbiamo

$$v_0'^2 = \frac{\ell' g'}{\ell g}v_0^2 = \lambda^2 v_0^2$$

Di conseguenza possiamo scegliere la massa arbitrariamente, ma dobbiamo ridurre la lunghezza del pendolo e la velocità iniziale di un fattore λ (circa $1/6$). Notare che

$$\frac{v_0^2}{g\ell} \simeq 2.54$$

e quindi non ci aspettiamo di essere nel regime di piccole oscillazioni, nel quale potremmo trascurare la dipendenza del periodo dalla velocità iniziale.