PROBLEMA 2.1

Triplo prodotto vettoriale ⋆

Dimostrare l'identità

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \vec{c} \tag{2.1.1}$$

Soluzione

Supponiamo che i vettori $\vec{b}$ e $\vec{c}$ siano paralleli. Potremo allora porre $\vec{b} = \lambda\vec{c}$. Sostituendo otteniamo

$$\lambda\vec{a} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{c}) = \lambda\, (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{c} - \lambda\, (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{c} \tag{2.1.2}$$

che è banalmente verificata. Se invece $\vec{b}$ e $\vec{c}$ sono linearmente indipendenti potremo scrivere

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = A \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) + B\vec{b} + C\vec{c} \tag{2.1.3}$$

dove A deve essere uno scalare dipendente linearmente dal solo $\vec{a}$, B uno scalare dipendente linearmente da $\vec{b}$ e $\vec{c}$ e C uno scalare dipendente linearmente da $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Non è possibile costruire uno scalare dipendente linearmente dal solo $\vec{a}$. Invece possiamo prendere B proporzionale a $\vec{a} \cdot \vec{c}$ e C proporzionale a $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Quindi

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = k_1\, (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} + k_2 \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \vec{c} \tag{2.1.4}$$

dove k_1 e k_2 sono costanti numeriche. Prendendo $\vec{b} = \vec{c}$ troviamo

$$0 = k_1 \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \vec{b} + k_2 \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \vec{b} \tag{2.1.5}$$

e quindi $k_1 + k_2 = 0$. Infine prendendo $\vec{a} = \hat{z}$, $\vec{b} = \hat{y}$ e $\vec{c} = \hat{z}$ otteniamo

$$\hat{z} \wedge (\hat{y} \wedge \hat{z}) = k_1\, (\hat{z} \cdot \hat{z})\, \vec{y} - k_1\, (\hat{z} \cdot \hat{y})\, \hat{z} \tag{2.1.6}$$

cioè

$$\hat{z} \wedge \hat{x} = k_1 \vec{y} \tag{2.1.7}$$

da cui $k_1 = 1$.