

PROBLEMA 3.14

Il problema dello spazzaneve **

Questo problema o una sua variante è molto noto. Ad una certa ora del mattino inizia a nevicare, e a mezzogiorno uno spazzaneve parte per pulire le strade. La neve continua a cadere con intensità costante. Si sa che la velocità con cui procede lo spazzaneve è inversamente proporzionale all'altezza della neve.

Nelle prime due ore di lavoro lo spazzaneve riesce a pulire 4km di strada. Nelle due ore successive invece se ne liberano solo 2km. Si vuole sapere a che ora ha iniziato a nevicare.

Soluzione

Poniamo $t = 0$ a mezzogiorno. Detto $t_0 < 0$ l'istante nel quale inizia a nevicare, avremo che l'altezza della neve aumenterà secondo la legge

$$h \propto (t - t_0)$$

La velocità dello spazzaneve sarà data di conseguenza da

$$v = \frac{\mathcal{L}}{t - t_0}$$

dove \mathcal{L} è una costante non nota con le dimensioni di una lunghezza. Lo spazio percorso nelle prime due ore di lavoro sarà dunque

$$s_1 = \int_0^\tau \frac{\mathcal{L}}{t - t_0} dt = \mathcal{L} \log \frac{t_0 - \tau}{t_0}$$

dove $\tau = 2h$. Nelle due ore successive avremo invece

$$s_2 = \int_\tau^{2\tau} \frac{\mathcal{L}}{t - t_0} dt = \mathcal{L} \log \frac{t_0 - 2\tau}{t_0 - \tau}$$

A noi interessa determinare t_0 . Dividendo membro a membro le due relazioni precedenti troviamo

$$\frac{\log \frac{t_0 - \tau}{t_0}}{\log \frac{t_0 - 2\tau}{t_0 - \tau}} = \frac{s_1}{s_2}$$

e dato che $s_1/s_2 = 2$ troviamo

$$\log \frac{t_0 - \tau}{t_0} = 2 \log \frac{t_0 - 2\tau}{t_0 - \tau}$$

ossia

$$\frac{t_0 - \tau}{t_0} = \left(\frac{t_0 - 2\tau}{t_0 - \tau} \right)^2$$

Riordinando i termini abbiamo

$$(t_0 - \tau)^3 = t_0 (t_0 - 2\tau)^2$$

ossia, espandendo e semplificando,

$$t_0^2 \tau - t_0 \tau^2 - \tau^3 = 0$$

Le soluzioni di questa equazione sono

$$t_0 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \tau$$

e solo quella negativa è accettabile. Di conseguenza

$$t_0 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \tau \simeq -1\text{h } 14\text{min } 10\text{s}$$

quindi ha iniziato a nevicare alle $10_h : 45_{min} : 50_s$.