PROBLEMA 3.16

Salto in lungo ⋆⋆

Un saltatore in lungo arriva alla fine della rincorsa con una velocità orizzontale v_L. A questo punto salta in una direzione che, nel suo sistema di riferimento, forma un angolo α rispetto all'orizzontale. Sempre nel suo sistema di riferimento il modulo della velocità immediatamente successiva al salto è v_0.

Determinare l'angolo α che corrisponde alla massima lunghezza del salto e calcolare l'angolo α' corrispondente nel sistema solidale al suolo.

Soluzione

Mettendosi nel sistema di riferimento solidale al suolo avremo le due componenti della velocità iniziale della forma

$$\begin{aligned} v_{x0} &= v_L + v_0 \cos\alpha \\ v_{y0} &= v_0 \sin\alpha \end{aligned}$$

che sostituite nell'espressione della gittata

$$\ell = \frac{2v_{x0}v_{y0}}{g} = \frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha\left(\frac{v_L}{v_0}+\cos\alpha\right) \tag{3.16.1}$$

ci fornisce la quantità da rendere massima variando α. Derivando otteniamo l'equazione

$$2\cos^2\alpha + \frac{v_L}{v_0}\cos\alpha - 1 = 0$$

che ha per soluzione

$$\cos\alpha = -\frac{v_L}{4v_0} \pm \sqrt{\frac{1}{2}+\left(\frac{v_L}{4v_0}\right)^2}$$

Se consideriamo l'Equazione (3.16.1) vediamo che la soluzione accettabile deve essere positiva. Infatti, se per assurdo la gittata massima si avesse per un valore di $\alpha > \pi/2$, potremmo considerare $\beta = \pi - \alpha$: ma dato che $\sin\beta = \sin\alpha$ e $\cos\beta = -\cos\alpha$ troveremmo un valore della gittata più grande. Quindi

$$\cos\alpha = -\frac{v_L}{4v_0} + \sqrt{\frac{1}{2}+\left(\frac{v_L}{4v_0}\right)^2}$$

Notare che per $v_L \ll v_0$ abbiamo

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{v_L}{4v_0} + o\left(\frac{v_L}{v_0}\right)^2$$

e quindi un angolo leggermente minore a $\pi/4$, tendente a tale valore (che corrisponde all'angolo ottimale da fermo). Per $v_L \gg v_0$ abbiamo invece

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= -\frac{v_L}{4v_0} + \left(\frac{v_L}{4v_0}\right)\sqrt{1+\frac{1}{2}\left(\frac{4v_0}{v_L}\right)^2} \\
&= -\frac{v_L}{4v_0} + \left(\frac{v_L}{4v_0}\right)\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{4v_0}{v_L}\right)^2 + o\left(\frac{v_0}{v_L}\right)^4\right] \\
&= \left(\frac{v_0}{v_L}\right) + o\left(\frac{v_0}{v_L}\right)^3
\end{aligned}$$

e quindi un angolo che diventa molto piccolo.

La tangente dell'angolo nel sistema di riferimento solidale al suolo, infine, è data da

$$\tan\alpha' = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\sin\alpha}{\frac{v_L}{v_0} + \cos\alpha}$$

Per $v_L \ll v_0$ abbiamo $\alpha' \to \alpha$. Per $v_L \gg v_0$ abbiamo invece $\alpha' \to 0$.

