PROBLEMA 3.18

Moto circolare uniforme in coordinate polari “fuori centro” ⋆

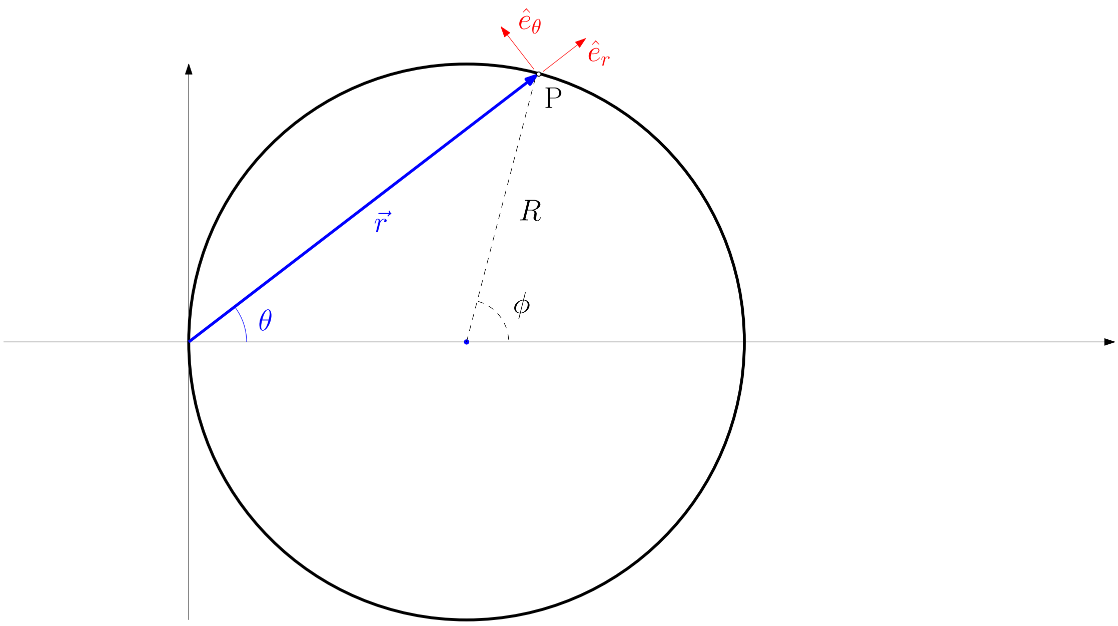

Figura 3.11.: Il sistema di coordinate scelto per studiare il moto circolare uniforme.

Si vuole studiare un moto circolare uniforme, che avviene su una circonferenza di raggio R con velocità v, utilizzando un sistema di coordinate polari con origine posto sulla circonferenza stessa, come in Figura 3.11.

- Determinare l’equazione della circonferenza nella forma $r = r(\theta)$, in un opportuno intervallo per θ.
- Scrivere la componente radiale (diretta come $\hat{e}_r$) della velocità, e quella diretta lungo $\hat{e}_\theta$.
- Determinare la relazione tra $\dot{\theta}$ e la velocità angolare del moto circolare.
- Scrivere le componenti dirette lungo $\hat{e}_r$ e lungo $\hat{e}_\theta$ dell’accelerazione.

Soluzione

Per trovare l’equazione della circonferenza, basta considerare che il triangolo isocele AOP (Figura 3.12) Deve essere

$$r = 2R\cos\theta$$

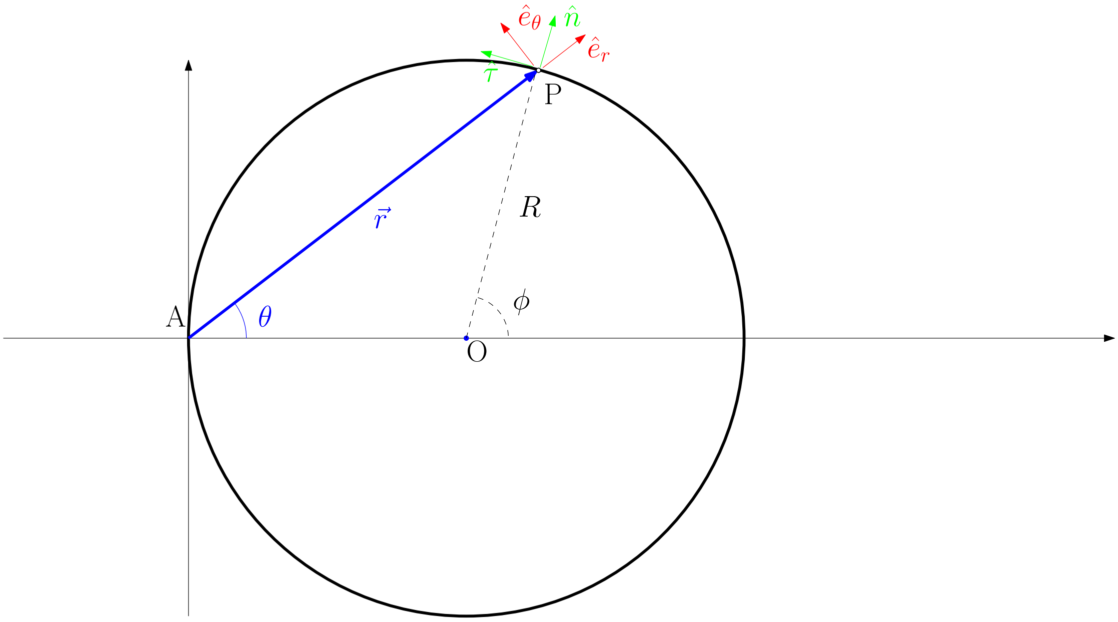

Figura 3.12.: Costruzioni geometriche usata per risolvere l'esercizio. L'angolo alla circonferenzaθ e l'angolo al centroϕ insistono sullo stesso arco, e quindi sono uno la metà dell'altro. Notare che i versori normali e tangenti $\hat{n}$ e $\hat{\tau}$ si ottengono ruotando i versori $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_\theta$ di un angolo θ.

e la circonferenza completa viene descritta ad esempio per θ nell'intervallo$-\pi/2 < \theta \leq \pi/2$. Il vettore posizione si scrive adesso nella forma usuale

$$\vec{r} = r\hat{e}_r$$

e derivando rispetto al tempo troviamo

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \\ &= -2R\dot{\theta}\sin\theta\hat{e}_r + 2R\dot{\theta}\cos\theta\hat{e}_\theta\end{aligned}$$

Per quanto riguarda la velocità angolare del moto circolare, abbiamo $\omega = \dot{\phi}$ e dato che $\phi = 2\theta$ sarà $\omega = 2\dot{\theta}$, quindi

$$\vec{v} = -R\omega\sin\theta\hat{e}_r + R\omega\cos\theta\hat{e}_\theta$$

Notare che si può anche scrivere

$$\begin{aligned}\vec{v} &= -R\omega\left[\sin\theta\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} - \cos\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}\right] \\ &= -R\omega\begin{pmatrix}2\sin\theta\cos\theta\\ \sin^2\theta-\cos^2\theta\end{pmatrix} \\ &= R\omega\begin{pmatrix}-\sin 2\theta\\ \cos 2\theta\end{pmatrix} = R\omega\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Il versore che compare è chiaramente quello tangente alla circonferenza,

$$\hat{\tau} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin\theta\cos\theta \\ \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Derivando ancora una volta troviamo l'accelerazione. Possiamo scrivere direttamente

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d}{dt} R\omega \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} \\ &= -R\omega\dot{\phi} \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \\ &= -R\omega^2 \hat{n} \end{aligned}$$

dove

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

è il versore normale alla traiettoria. Alternativamente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(-R\omega\sin\theta\hat{e}_r + R\omega\cos\theta\hat{e}_\theta\right) &= -R\omega\dot{\theta}\cos\theta\hat{e}_r - R\omega\dot{\theta}\sin\theta\hat{e}_\theta \\ &\quad - R\omega\dot{\theta}\sin\theta\hat{e}_\theta - R\omega\dot{\theta}\cos\theta\hat{e}_r \\ &= -R\omega^2\left(\cos\theta\hat{e}_r + \sin\theta\hat{e}_\theta\right) \end{aligned}$$

da cui segue anche che

$$\hat{n} = \cos\theta\hat{e}_r + \sin\theta\hat{e}_\theta$$

Da notare che i versori $\hat{n}$ e $\hat{\tau}$ si possono ottenere rispettivamente con una rotazione θ di $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_\theta$.