

PROBLEMA 3.1

Profondità di un pozzo **

Per determinare la profondità di un pozzo si lancia un sasso al suo interno, e si misura dopo quanto tempo si sente il suono dell'urto sul fondo. Detta $v_s = 340\text{m/s}$ la velocità del suono e $\tau = 2\text{s}$ il tempo misurato determinare tale profondità. Che errore si commette trascurando l'effetto della velocità finita del suono?

Soluzione

Il tempo τ è dato dalla somma del tempo di caduta τ_c per il sasso e del tempo impiegato dal suono τ_s per tornare all'osservatore. La caduta avviene, trascurando gli attriti, con moto uniformemente accelerato quindi

$$h = \frac{1}{2}g\tau_c^2$$

cioè

$$\tau_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Il suono si muove con velocità costante, quindi

$$\tau_s = \frac{h}{v_s}$$

Il tempo misurato sarà dunque

$$\tau = \tau_c + \tau_s = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v_s}$$

Questa è un'equazione di secondo grado nell'incognita \sqrt{h}

$$h + \sqrt{\frac{2v_s^2}{g}}\sqrt{h} - v_s\tau = 0$$

che ammette come unica soluzione accettabile (perché positiva)

$$\sqrt{h} = -\sqrt{\frac{v_s^2}{2g}} + \sqrt{\frac{v_s^2}{2g} + v_s\tau} = \frac{\tau\sqrt{g/2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{2g\tau}{v_s}}} \quad (3.1.1)$$

Sostituendo i valori numerici abbiamo

$$\begin{aligned} \tau\sqrt{g/2} &\simeq 4.43\text{ m}^{1/2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{2g\tau}{v_s}} &\simeq 1.03 \end{aligned}$$

e quindi $h = 18.5\text{ m}$. Trascurare la velocità finita del suono equivale a porre uguale a 1 il denominatore della Eq. (3.1.1), e quindi ad una correzione del 6%.