PROBLEMA 3.2

Lunghezza di una traiettoria ⋆⋆

Una particella si muove nel piano in un'orbita descritta da

$$\vec{R}(t) = a\hat{e}_x \cos\omega t + b\hat{e}_y \sin\omega t\,.$$

Mostrare che si tratta di un'orbita ellittica, calcolare il tempo necessario a percorrere un'orbita completa ed esprimere la lunghezza di quest'ultima come integrale definito (senza calcolarlo).

Soluzione

Possiamo riscrivere la legge oraria nella forma

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos\omega t \\ y(t) &= b\sin\omega t \end{aligned}$$

da cui segue

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

che rappresenta una ellisse avente gli assi coincidenti con quelli coordinati, di lunghezza $2a$ e $2b$. Il tempo necessario a percorrere una intera orbita è chiaramente il periodo di $\vec{R}(t)$, ossia

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Per quanto riguarda la lunghezza, possiamo calcolare la velocità:

$$\vec{V}(t) = -a\omega\sin\omega t\,\hat{e}_x + b\omega\cos\omega t\,\hat{e}_y$$

e integrare il suo modulo nel tempo per un periodo:

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^T |\vec{V}(t)|dt = \int_0^T \sqrt{a^2\omega^2\sin^2\omega t + b^2\omega^2\cos^2\omega t dt} \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u du} \end{aligned}$$

Questo integrale non si esprime in termini di funzioni elementari, a parte il caso banale $a = b$ (traiettoria circolare) nel quale si trova $\ell = 2\pi a$.