PROBLEMA 3.7

Raggiungere una boa ⋆⋆⋆

Un nuotatore vuole raggiungere una boa posta ad una distanza d dalla riva. Si mette a nuotare verso di essa riuscendo a mantenere una velocità costante in modulo v_N rispetto all'acqua. É però presente una corrente diretta parallelamente alla riva di modulo v_C. Discutere la traiettoria del nuotatore nei tre casi $v_C > v_N$, $v_C = v_N$ e $v_C < v_N$.

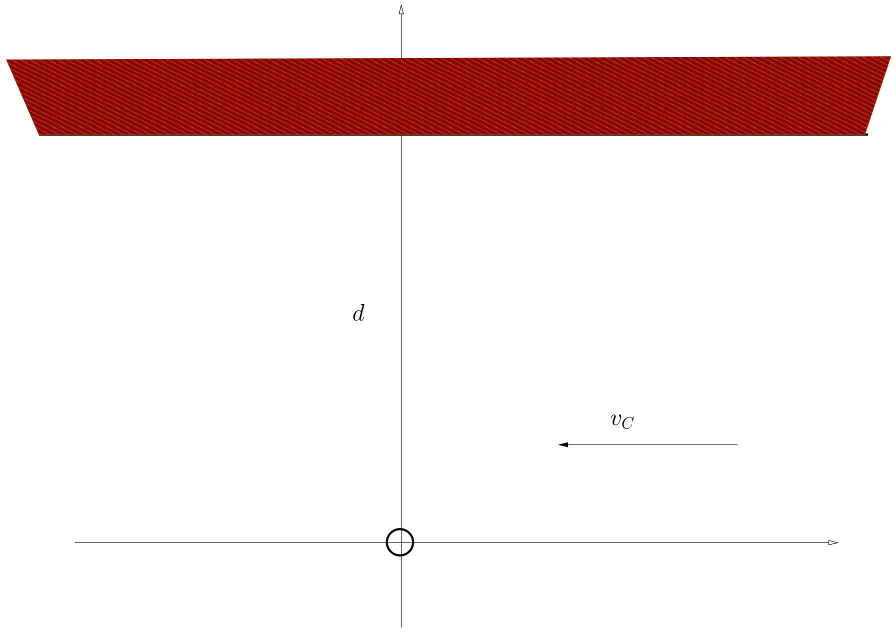

Figura 3.4.: Sistema di coordinate per il problema.

Soluzione

Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano con origine nella boa, come in Figura. Supponendo che il nuotatore parta dalla riva in un punto di coordinate $(0, d)$ possiamo scrivere la sua velocità nella forma

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -v_N \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} - v_C \hat{e}_x$$

ossia, componente per componente,

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -v_N \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - v_c \\
\frac{dy}{dt} &= -v_N \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned}$$

da cui otteniamo immediatamente una equazione per la traiettoria ($\beta = v_C/v_N$)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + \beta\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,.$$

Introduciamo la nuova variabile $u(x) = x(y)/y$ e usando l'identità

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\left(yu\right) = y\frac{du}{dy} + u$$

possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$y\frac{du}{dy} = \beta\sqrt{1+u^2}$$

che si integra immediatamente per separazione delle variabili:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \beta\int\frac{dy}{y}$$

da cui, ponendo $u = \sinh s$

$$s = \beta\log y + \beta\log C$$

dove C è una costante di intregrazione. Quindi

$$\frac{x}{y} = u = \sinh s = \sinh\left[\log\left(Cy\right)^{\beta}\right]$$

ossia

$$x = \frac{1}{2}\left[C^{\beta}y^{1+\beta} - C^{-\beta}y^{1-\beta}\right]$$

La costante di integrazione si determina imponendo le condizioni iniziali $x = 0$, $y = d$, e otteniamo

$$x = \frac{d}{2}\left[\left(\frac{y}{d}\right)^{\beta+1} - \left(\frac{d}{y}\right)^{\beta-1}\right]\,.$$

Studiamo adesso i tre diversi casi.

Per $v_C < v_N$ possiamo porre $\beta = 1-\epsilon$ con $0 < \epsilon < 1$. Abbiamo allora

$$x = \frac{d}{2}\left[\left(\frac{y}{d}\right)^{2-\epsilon} - \left(\frac{y}{d}\right)^{\epsilon}\right]$$

e quindi x tende a zero per $y \to 0$. Questo significa che il nuotatore raggiunge la boa.

Nel caso $v_c = v_N$ abbiamo $\beta = 1$ e quindi

$$x = \frac{d}{2}\left[\left(\frac{y}{d}\right)^{2} - 1\right]\,.$$

La traiettoria è quindi parabolica e il nuotatore non riesce a raggiungere la boa, ma arriva nel punto $(-d/2, 0)$ continuando a nuotare contro corrente senza muoversi.

Nel caso $v_c > v_N$ abbiamo $\beta = 1 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e quindi

$$x = \frac{d}{2}\left[\left(\frac{y}{d}\right)^{2+\varepsilon} - \left(\frac{d}{y}\right)^{\varepsilon}\right].$$

Segue che per $y \to 0$ la coordinata x assume valori arbitrariamente grandi in modulo e negativi. Questo significa che il nuotatore è trascinato dalla corrente.

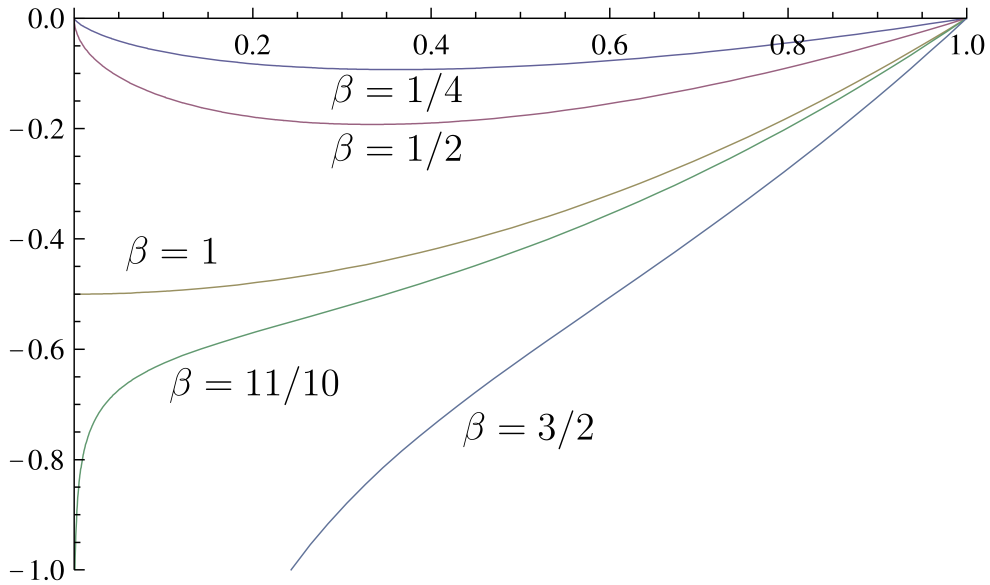

Figura 3.5.: Traiettorie per particolari valori di β. L'asse x del problema è verticale, $d = 1$.