PROBLEMA 3.8

Preda e predatore ⋆⋆

Un coniglio si muove arbitrariamente nel piano mantenendo il modulo della sua velocità v_c costante. Una volpe lo insegue muovendosi anche essa con velocità costante in modulo v_v, dirigendosi istante per istante nella direzione del coniglio.

Dimostrare che indipendentemente dalla traiettoria scelta dal coniglio esso verrà raggiunto in un tempo finito se $v_v > v_c$.

Soluzione

Sia $\vec{R}_c$ la posizione del coniglio e $\vec{R}_v$ quella della volpe. Il quadrato della loro distanza si può scrivere come

$$\ell^2 = \left|\vec{R}_c - \vec{R}_v\right|^2$$

e la sua derivata temporale come

$$\frac{d\ell^2}{dt} = 2\left(\vec{R}_c - \vec{R}_v\right) \cdot \left(\frac{d\vec{R}_c}{dt} - \frac{d\vec{R}_v}{dt}\right) .$$

Ma sappiamo che la velocità della volpe si scrive

$$\frac{d\vec{R}_v}{dt} = v_v \frac{\vec{R}_c - \vec{R}_v}{\left|\vec{R}_c - \vec{R}_v\right|}$$

e sostituendo otteniamo

$$\frac{d\ell^2}{dt} = 2\left(\vec{R}_c - \vec{R}_v\right) \cdot \frac{d\vec{R}_c}{dt} - 2v_v \left|\vec{R}_c - \vec{R}_v\right| .$$

Possiamo scrivere inoltre

$$\frac{d\ell^2}{dt} = 2v_c \left|\vec{R}_c - \vec{R}_v\right| \cos\phi - 2v_v \left|\vec{R}_c - \vec{R}_v\right|$$

dove ϕ è l'angolo tra la velocità del coniglio e il vettore $\left(\vec{R}_c - \vec{R}_v\right)$. In conclusione otteniamo

$$\frac{d\ell^2}{dt} = 2\left|\vec{R}_c - \vec{R}_v\right| \left(v_c \cos\phi - v_v\right) \leq 2\ell\left(v_c - v_v\right)$$

che si può anche scrivere nella forma

$$\frac{d\ell}{dt} \leq \left(v_c - v_v\right)$$

ossia

$$\ell \leq \ell_0 + (v_c - v_v)t .$$

Da questo segue che il coniglio verrà raggiunto ad un tempo

$$t \leq \frac{\ell_0}{v_v - v_c}\,.$$