PROBLEMA 4.1

Pila di mattoni

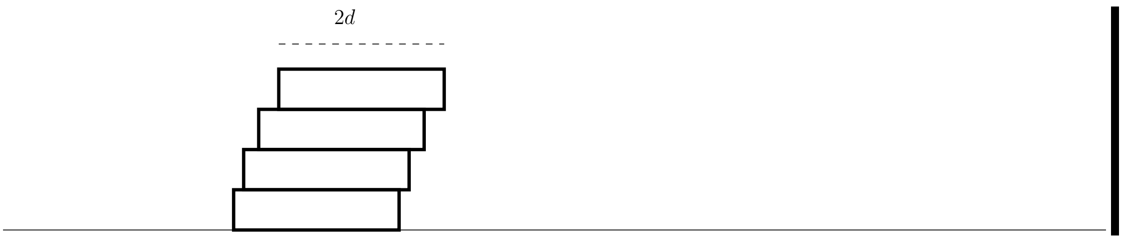

Figura 4.1.: La pila di mattoni, nel caso $N = 4$.

Si vogliono sovrapporre N mattoni di lunghezza $2d$ in modo da ottenere una pila in equilibrio come in Figura 4.1. Quale è la massima separazione orizzontale ottenibile tra il centro di massa del mattone più in basso e quello del mattone più in alto?

Soluzione

Indichiamo con x_k la posizione del centro di massa del blocco k-simo ($k = 0, \cdots N-1$ partendo dal basso) rispetto a una origine fissata. Definiamo inoltre q_k la posizione del centro di massa dell'insieme di tutti i blocchi a partire dal k-simo compreso. Avremo

$$q_k = \frac{1}{N-k} \sum_{i=k}^{N-1} x_k \,.$$

Per avere equilibrio tutti i q_k dovranno essere compresi tra gli estremi del blocco $k-1$-simo, cioè

$$x_{k-1} - d \leq q_k \leq x_{k-1} + d \quad \forall k \in \{2, \cdots N\} \,.$$

Possiamo inoltre porre senza perdere di generalità $x_0 = 0$. Dobbiamo quindi massimizzare x_{N-1} variando $x_1, \cdots x_{N-1}$ e tenendo conto dei vincoli precedenti. Dato che x_{N-1} è una funzione lineare dei parametri il suo valore massimo dovrà saturare tutte le disuguaglianze precedenti, e quindi dovrà essere

$$q_k = x_{k-1} + d \tag{4.1.1}$$

o più esplicitamente (ponendo senza perdere di generalità $x_0 = 0$)

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{N-1}\left(x_1+\cdots+x_{N-1}\right)=d \\
\frac{1}{N-2}\left(x_2+\cdots+x_{N-1}\right)=x_1+d \\
\cdots \\
\frac{1}{N-k}\left(x_k+\cdots+x_{N-1}\right)=x_{k-1}+d \\
\cdots \\
x_{N-1}=x_{N-2}+d
\end{gathered}
$$

ossia

$$
\begin{gathered}
\left(x_1+\cdots+x_{N-1}\right)=(N-1)\, d \\
\left(x_2+\cdots+x_{N-1}\right)=(N-2)\left(x_1+d\right) \\
\cdots \\
\left(x_k+\cdots+x_{N-1}\right)=(N-k)\left(x_{k-1}+d\right) \\
\cdots \\
x_{N-1}=x_{N-2}+d
\end{gathered}
$$

Sottraendo membro a membro da ciascuna equazione quella successiva abbiamo

$$
\begin{gathered}
x_1=\frac{d}{N-1} \\
x_2=\frac{d}{N-2}+x_1 \\
\cdots \\
x_k=\frac{d}{N-k}+x_{k-1} \\
\cdots \\
x_{N-1}=x_{N-2}+d
\end{gathered}
$$

Otteniamo in conclusione

$$
x_{N-1}=d \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} \tag{4.1.2}
$$

Notare che questa serie diverge per $N \to \infty$, quindi con un numero sufficiente di blocchi è possibile avanzare in orizzontale quanto si vuole. Il numero di blocchi richiesti cresce però esponenzialmente con la distanza desiderata, infatti

$$
\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}=\log N+\gamma+\epsilon_N \tag{4.1.3}
$$

dove γ è la costante di Eulero-Mascheroni ($\gamma = 0.57721\cdots$) e ϵ_N un termine che tende a zero con N.