PROBLEMA 4.2

Equilibrio ed energia potenziale ⋆⋆

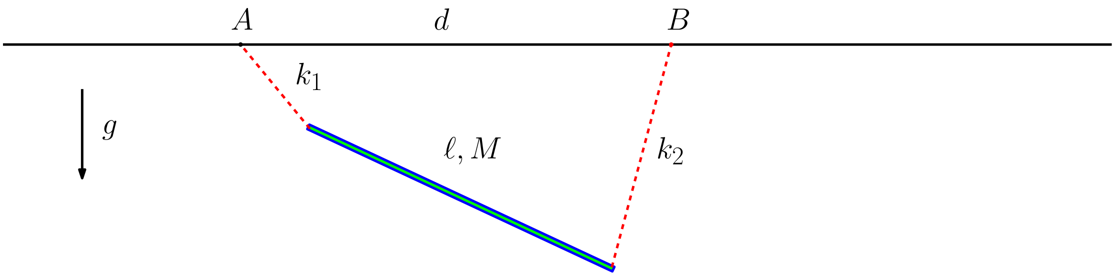

Figura 4.2.: La sbarra sospesa.

Una sbarra di lunghezza ℓ e massa M è sospesa al soffitto tramite due molle di lunghezza a riposo nulla e costanti elastiche k_1, k_2. Ciascuna molla è collegata ad un estremo della sbarra, e la distanza tra i punti A, B a cui sono fissate al soffitto vale d (vedere Figura 4.2). Determinare l'angolo che la sbarra forma con la direzione orizzontale nella posizione di equilibrio e la posizione del centro di massa

- minimizzando l'energia potenziale
- risolvendo le equazioni di equilibrio

Soluzione

Utilizziamo come coordinate l'ascissa e l'ordinata x, y del centro di massa della sbarra e l'angolo che la sbarra forma con la direzione orizzontale. Ponendo un sistema di riferimento con origine nel punto medio tra A e B scriviamo l'energia potenziale come

$$\begin{aligned}U = {} & Mgy + \frac{k_1}{2}\left[\left(x - \frac{\ell}{2}\cos\theta + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\ell}{2}\sin\theta\right)^2\right] \\ & + \frac{k_2}{2}\left[\left(x + \frac{\ell}{2}\cos\theta - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\ell}{2}\sin\theta\right)^2\right]\end{aligned}$$

Determiniamo il minimo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial y} &= Mg + k_1\left(y - \frac{\ell}{2}\sin\theta\right) + k_2\left(y + \frac{\ell}{2}\sin\theta\right) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= k_1\left(x - \frac{\ell}{2}\cos\theta + \frac{d}{2}\right) + k_2\left(x + \frac{\ell}{2}\cos\theta - \frac{d}{2}\right) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} &= k_1\frac{\ell}{2}\left[\left(x - \frac{\ell}{2}\cos\theta + \frac{d}{2}\right)\sin\theta - \left(y - \frac{\ell}{2}\sin\theta\right)\cos\theta\right] \\ &\quad + k_2\frac{\ell}{2}\left[-\left(x + \frac{\ell}{2}\cos\theta - \frac{d}{2}\right)\sin\theta + \left(y + \frac{\ell}{2}\sin\theta\right)\cos\theta\right] = 0\end{aligned}$$

Dalle prime due equazioni otteniamo

$$\begin{aligned} y &= \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\frac{\ell}{2}\sin\theta - \frac{Mg}{k_1 + k_2} \\ x &= \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\frac{\ell}{2}\cos\theta - \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\frac{d}{2} \end{aligned}$$

Notare che se $k_1 = k_2$ si ha $y = -\frac{Mg}{2k_1}$ e $x = 0$. Sostituendo nella terza equazione troviamo l'angolo

$$\tan\theta = \frac{Mg}{4d}\frac{k_2 - k_1}{k_1 k_2}$$

che possiamo utilizzare per calcolare x e y. Possiamo ad esempio riscrivere le relazioni precedenti nella forma

$$\begin{aligned} y &= \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\frac{\ell}{2}\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} - \frac{Mg}{k_1 + k_2} \\ x &= \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\frac{\ell}{2}\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} - \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\frac{d}{2} \end{aligned}$$

e sostituire.

Proviamo a scrivere invece le condizioni di equilibrio. Il diagramma delle forze che agiscono sulla sbarra è in Figura 4.3

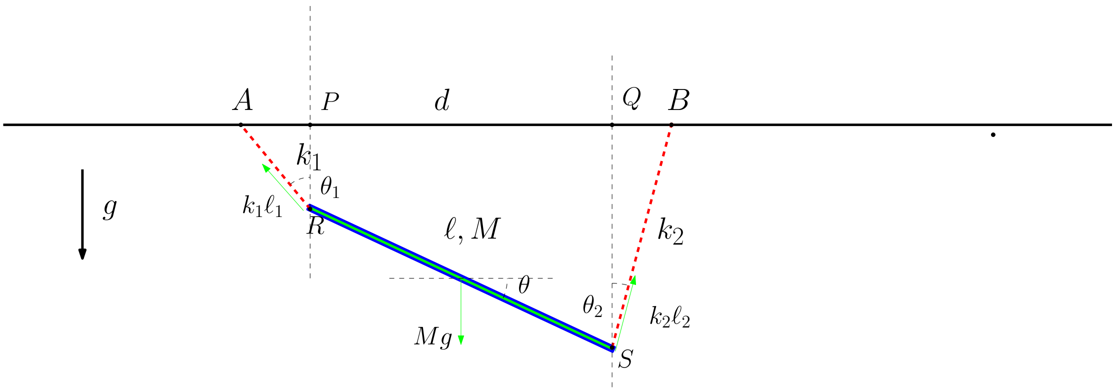

Figura 4.3.: Diagramma delle forze applicate alla sbarra. Tutti gli angoli sono presi positivi nel verso antiorario.

Scriviamo la somma di tutte le forze orizzontali.

$$F_x = k_2(x_B - x_S) + k_1(x_A - x_R)$$

Ma se teniamo conto che

$$\begin{aligned} x_B - x_S &= \frac{d}{2} - x - \frac{\ell}{2}\cos\theta \\ x_A - x_R &= -\frac{d}{2} - x + \frac{\ell}{2}\cos\theta \end{aligned}$$

vediamo che

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

Analogamente per la somma di tutte le forze orizzontali abbiamo

$$F_y = k_2 (y_B - y_S) + k_1 (y_A - y_R) - Mg$$

e dato che

$$\begin{aligned} y_B - y_S &= y + \frac{\ell}{2}\sin\theta \\ y_A - y_R &= y - \frac{\ell}{2}\sin\theta \end{aligned}$$

vediamo che

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

Infine scriviamo la somma dei momenti scegliendo come polo il centro di massa. Abbiamo

$$\begin{aligned} M = &-k_2 (x_B - x_S)\frac{\ell}{2}\sin\theta + k_1 (x_A - x_R)\frac{\ell}{2}\sin\theta \\ &+ k_2 (y_B - y_S)\frac{\ell}{2}\cos\theta - k_1 (y_A - y_R)\frac{\ell}{2}\cos\theta \end{aligned}$$

e vediamo che

$$M = -\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

Le condizioni di equilibrio si riducono quindi alle condizioni per il minimo del potenziale determinate precedentemente.