PROBLEMA 4.4

Catenaria ⋆⋆

Un filo inestensibile, perfettamente flessibile, di lunghezza ℓ e densità lineare di massa λ è appeso ai suoi estremi a due punti separati orizzontalmente da una distanza $2a < \ell$. Se è presente un campo gravitazionale costante, determinare la forma che assume il filo in condizioni di equilibrio.

Soluzione

Consideriamo un tratto di filo di lunghezza $d\ell$. All'equilibrio la somma delle forze che agisce su di esso deve essere nullo, cioè

$$T(\ell + d\ell)\hat{\tau}\,(\ell + d\ell) - T\,(\ell)\,\hat{\tau}\,(\ell) - \lambda g d\ell \hat{y} = 0$$

dove T è la tensione e $\hat{\tau}$ il versore tangente. Passando al limite $d\ell \to 0$ possiamo riscrivere questa equazione nella forma

$$\frac{d}{d\ell}\,(T\hat{\tau}) = \lambda g \hat{y}$$

Cercheremo la soluzione nella forma $y(x)$. Per prima cosa vediamo che possiamo scrivere

$$\frac{d}{d\ell} = \frac{dx}{d\ell}\frac{d}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\frac{d}{dx}$$

e

$$\hat{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\begin{pmatrix}1\\ \frac{dy}{dx}\end{pmatrix}$$

Sostituendo nell'equazione determinata precedente otteniamo

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{T}{\sqrt{1+w^2}}\begin{pmatrix}1\\ w\end{pmatrix}\right] = \lambda g\sqrt{1+w^2}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

dove abbiamo posto $w = \frac{dy}{dx}$. La prima componente di questa equazione da

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{T}{\sqrt{1+w^2}}\right] = 0$$

che si può integrare direttamente in termini di una costante arbitraria k

$$T = k\sqrt{1+w^2}$$

Espandendo la derivata otteniamo invece

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{T}{\sqrt{1+w^2}}\right]\begin{pmatrix}1\\ w\end{pmatrix} + \frac{T}{\sqrt{1+w^2}}\begin{pmatrix}0\\ \frac{dw}{dx}\end{pmatrix} = \lambda g\sqrt{1+w^2}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

ma il primo termine è nullo, come si è appena visto, e sostituendo l'espressione per la tensione troviamo infine

$$k\begin{pmatrix}0\\ \frac{dw}{dx}\end{pmatrix} = \lambda g\sqrt{1+w^2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Possiamo integrare la seconda componente per separazione delle variabili. L'integrale necessario

$$\int_{w(0)}^{w(x)}\frac{dw}{\sqrt{1+w^2}} = \frac{\lambda g}{k}x$$

si calcola introducendo la variabile$w = \sinh\xi$. Dato che $1+\sinh^2\xi = \cosh^2\xi$ e $dw = \cosh\xi\, d\xi$ otteniamo

$$\int_{\sinh^{-1}w(0)}^{\sinh^{-1}w(x)} d\xi = \frac{\lambda g}{k}x$$

e quindi

$$w(x) = \frac{dy}{dx} = \sinh\left[A+\frac{\lambda g}{k}x\right]$$

dove $A = \sinh^{-1}w(0)$. Resta da integrare ancora una volta l'espressione precedente,

$$y = \frac{k}{\lambda g}\cosh\left[A+\frac{\lambda g}{k}x\right]+B$$

Calcoliamo adesso le costanti arbitrarie imponendole condizioni al contorno. Scegliamo un sistema di riferimento nel quale i punti di sospensione si trovano in

$$S_1 = \begin{pmatrix}-a\\h\end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix}a\\h\end{pmatrix}$$

Deve quindi essere

$$\begin{aligned} h &= \frac{k}{\lambda g}\cosh\left[A+\frac{\lambda g a}{k}\right]+B \\ h &= \frac{k}{\lambda g}\cosh\left[A-\frac{\lambda g a}{k}\right]+B \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro troviamo che deve essere

$$\cosh\left[A-\frac{\lambda g a}{k}\right] = \cosh\left[A+\frac{\lambda g a}{k}\right]$$

che implica $A = 0$. Inoltre

$$B = h - \frac{k}{\lambda g}\cosh\left[\frac{\lambda g a}{k}\right]$$

La costante k è ancora indeterminata. Per trovarla imponiamo che la lunghezza del filo sia ℓ. Ma questa è data da

$$
\begin{aligned}
\ell &= \int_{-a}^{a} \sqrt{1+w^2}dx \\
&= \int_{-a}^{a} \cosh\left[\frac{\lambda g}{k}x\right] dx \\
&= 2\beta \sinh\left(\frac{a}{\beta}\right)
\end{aligned}
$$

dove si è posto per semplicità $\beta = k/(\lambda g)$. L'equazione

$$\sinh\left(\frac{a}{\beta}\right) = \frac{\ell}{2a}\frac{a}{\beta} \tag{4.4.1}$$

ammette soluzioni per β se e solo se $\ell > 2a$. Questo si può capire ad esempio dallo studio grafico riportato in Figura .

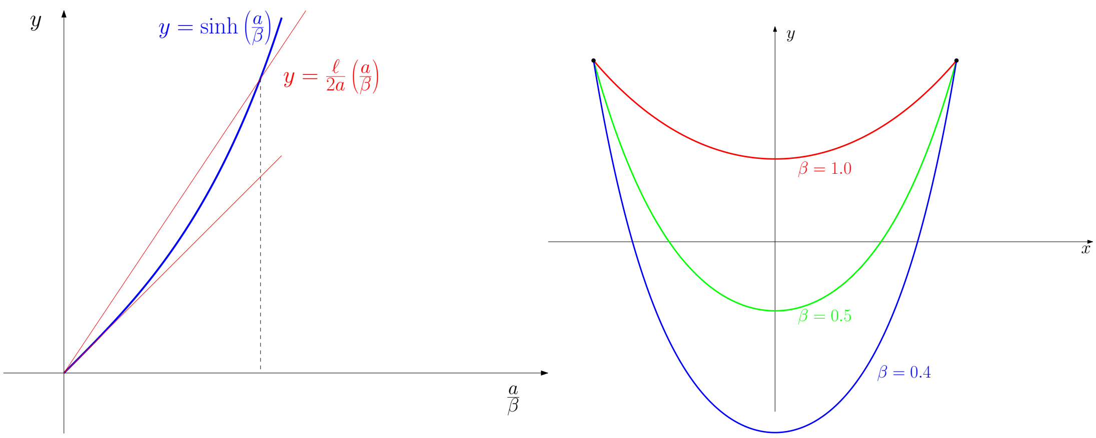

Figura 4.8.: A sinistra, la soluzione grafica dell'Equazione (4.4.1). La retta (in rosso) ha un coefficiente angolare dato dal rapporto $\ell/(2a)$. Si hanno soluzioni non nulle (per a/β) solo se $\ell/(2a) > 1$. Le due rette disegnate corrispondono a $\ell/(2a) = 1$ e $\ell/(2a) = 3/2$. A destra, esempi di profili per diversi valori di β, prendendo $h = a = 1$. Risolvendo numericamente l'Equazione (4.4.1) si trova che i valori scelti corrispondono a $\ell \simeq 2.3504$ (rosso, $\beta = 1.0$), $\ell \simeq 3.62686$ (verde, $\beta = 0.5$) e $\ell \simeq 4.84016$ (blu, $\beta = 0.4$).

In conclusione la forma del filo sarà

$$\frac{y}{h} = 1 + \frac{\beta}{h}\left[\cosh\left(\frac{x}{\beta}\right) - \cosh\left(\frac{a}{\beta}\right)\right]$$

una curva detta *catenaria*. Al variare di β cambia la lunghezza del filo, come abbiamo visto. Dato che la dipendenza da λ e g è stata riassorbita in β, la forma del filo non dipenderà dalla sua massa e dall'accelerazione di gravità.

Notiamo infine che la tensione del filo è legata alla sua lunghezza. Anzitutto abbiamo

$$\begin{aligned} T(x) &= \beta\lambda g\sqrt{1+w^2} \\ &= \beta\lambda g \cosh\left(\frac{x}{\beta}\right) \end{aligned}$$

In particolare la tensione agli estremi vale

$$\begin{aligned} T(a) = T(-a) &= \beta\lambda g \cosh\left(\frac{a}{\beta}\right) \\ &= \sqrt{\beta^2\lambda^2 g^2 + \left(\frac{\ell\lambda g}{2}\right)^2} \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

Questa formula si può interpretare facilmente, osservando che il seno dell'angolo che il filo forma con la direzione orizzontale è dato da

$$\begin{aligned} \sin\theta(x) &= \frac{\tan\theta(x)}{\sqrt{1+\tan^2\theta(x)}} \\ &= \frac{w}{\sqrt{1+w^2}} \\ &= \tanh\left(\frac{x}{\beta}\right) \\ &= \frac{\frac{\ell}{2\beta}}{\sqrt{1+\left(\frac{\ell}{2\beta}\right)^2}} \end{aligned}$$

ma all'equilibrio la componente verticale delle due tensioni agli estremi deve essere uguale alla forza peso totale del filo, quindi

$$2T(a)\sin\theta(a) = \lambda\ell g$$

che coincide con la (4.4.2).

Possiamo considerare due limiti. Se $\ell \gg 2a$ ci aspettiamo che la pendenza del filo agli estremi sia praticamente verticale, e quindi dovremmo avere

$$T(a) \simeq \frac{1}{2}\lambda\ell g$$

cioè le due tensioni agli estremi devono compensare la forza peso totale del filo. In effetti le $\ell \gg 2a$ l'equazione (4.4.1) ammette soluzione per valori $\beta \ll a$, e in tale situazione si può sostituire il seno iperbolico con un esponenziale[1], quindi approssimativamente

$$e^{a/\beta} \simeq \frac{\ell}{a}\frac{a}{\beta}$$

[1] Se $x \gg 1$ vale $\cosh x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} \simeq \frac{1}{2}e^x$ e $\sinh x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} \simeq \frac{1}{2}e^x$.

Approssimando anche il coseno iperbolico con un esponenziale otteniamo

$$T(a) = T(-a) \simeq \frac{1}{2} e^{a/\beta} \beta \lambda g = \frac{1}{2} \lambda \ell g$$

Nel limite opposto, $\frac{\ell}{2a} = 1 + \varepsilon$ con $\varepsilon \ll 1$ ci aspettiamo invece che la pendenza del filo ai punti di sospensione sia praticamente orizzontale. In questa situazione solo una componente molto piccola della forza legata alla tensione è diretta verticalmente, e può compensare la forza peso. Ci aspettiamo quindi che quando $\varepsilon \to 0$ valga $T \to \infty$. In effetti in questo limite possiamo usare l'approssimazione $\sinh x \simeq x + \frac{x^3}{6}$ e riscrivere l'Equazione (4.4.1) nella forma

$$\frac{a}{\beta} + \frac{1}{6} \left(\frac{a}{\beta} \right)^3 = \frac{\ell}{2a} \frac{a}{\beta} \tag{4.4.3}$$

da cui

$$\frac{a}{\beta} = \sqrt{6 \left(\frac{\ell}{2a} - 1 \right)} \tag{4.4.4}$$

L'angolo del filo rispetto all'orizzontale diviene quindi

$$\sin \theta(a) \simeq \theta(a) \simeq \frac{\ell}{2a} \sqrt{6 \left(\frac{\ell}{2a} - 1 \right)}$$

e la tensione

$$T(a) \simeq \beta \lambda g \simeq \frac{\lambda g a}{\sqrt{6 \left(\frac{\ell}{2a} - 1 \right)}}$$