PROBLEMA 5.100

Il problema di Keplero ⋆⋆

Discutere le traiettorie di due masse puntiformi m_1 e m_2 che si muovono nello spazio sotto l'azione della sola forza di attrazione gravitazionale di Newton,

$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)$$

dove $\vec{F}_{12}$ è la forza che il corpo 1 (che si trova nella posizione $\vec{r}_1$) esercita sul corpo 2 (che si trova nella posizione $\vec{r}_2$).

Soluzione

Iniziamo scrivendo le equazioni del moto per le due masse puntiformi. Dato che l'unica forza è quella gravitazionale abbiamo

$$\begin{aligned} m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} &= -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \\ m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} &= G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \end{aligned}$$

Servono quindi 6 coordinate (ad esempio le 3 coordinate cartesiane delle due masse) per descrivere una configurazione del sistema. Dato che le forze che si esercitano sulle due masse sono uguali e opposte abbiamo la conservazione della quantità di moto totale. Questo si verifica direttamente sommando membro a membro le due equazioni precedenti, e ottenendo

$$\frac{d}{dt}\left[m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt}\right] = 0$$

che ci dice effettivamente che la quantità di moto totale

$$\vec{P} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt}$$

è costante. Alternativamente possiamo dire che l'accelerazione del centro di massa è zero,

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{d^2\vec{r}_{CM}}{dt^2} = 0$$

Quindi il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme, e possiamo scegliere un sistema di riferimento nel quale esso si trova in quiete nell'origine. Abbiamo quindi determinato il moto di 3 dei 6 gradi di libertà del sistema.

Un'altra variabile conveniente per descrivere il sistema è la posizione della massa m_1 relativa alla massa m_2,

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Osserviamo che conoscendo $\vec{r}$ e $\vec{r}_{CM}$ possiamo ricavare $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ dalle formule

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{r}_{CM} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_{CM} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}\end{aligned}$$

che si verificano imediatamente. Sarà quindi sufficiente trovare $\vec{r}$: per farlo moltiplichiamo per m_2: per farlo moltiplichiamo per oto precedenti e per m_1 la seconda, e sottraiamo membro a membro. Abbiamo

$$m_1 m_2 \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = -(m_1+m_2)G\frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)$$

ossia

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$$

dove $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ è la massa ridotta del sistema. Queste sono tre equazioni del moto (non indipendenti tra loro) che permettono in linea di principio di calcolare la posizione relativa in funzione del tempo, per date condizioni iniziali. Formalmente sono equazioni per una massa puntiforme fittizia μ che si muove sotto l'azione di una forza centrale. Da questo segue che avremo una costante del moto, il momento angolare

$$\vec{L} = \mu\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

Inoltre la forza centrale è anche conservativa. Questo si verifica immediatamente notando che la possiamo ottenere a partire dal potenziale

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

Verifichiamo questa affermazione: deve essere

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}G\frac{m_1 m_2}{r} = Gm_1 m_2\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = Gm_1 m_2\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial r}{\partial x}$$

ma

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}2x = \frac{x}{r}$$

e quindi

$$F_x = -Gm_1 m_2\frac{x}{r^3}$$

che è effettivamente la componente x dell'attrazione gravitazionale. Calcoli assolutamente analoghi permettono di verificare che il potenziale da anche la corretta componente y e z.

La conservazione del momento angolare ha come conseguenza che il moto della particella fittizia avviene in un piano, più precisamente nel piano ortogonale a $\vec{L}$. Per verificarlo calcoliamo il prodotto scalare tra $\vec{r}$ e $\vec{L}$, che è nullo

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \mu \vec{r} \cdot \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = 0$$

dato che il prodotto vettoriale tra $\vec{r}$ e $\vec{v}$ è sicuramente perpendicolare a $\vec{r}$.

Scegliamo adesso coordinate polari nel piano in cui avviene l'orbita. Potremo scrivere la componente perpendicolare al piano del momento angolare come

$$L = \mu r^2 \dot{\theta}$$

e l'energia come

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2 \dot{\theta}^2 - G\frac{m_1 m_2}{r}$$

Entrambe queste quantità si conservano, in particolare possiamo usare la prima per determinare la velocità angolare in funzione della distanza dal centro,

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \tag{5.100.1}$$

che sostituita nell'energia permette di ottenere

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

Espressa in questo modo, questa formalmente è l'energia di una particella di massa μ che si muove in una dimensione sotto l'azione di un potenziale "efficace"

$$U_{eff} = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

Notiamo che l'energia cinetica dovuta al moto radiale è

$$\frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 = E - U_{eff}(r)$$

e dato che deve essere non negativa, per un fissato valore di E il moto sarà possibile solo per i valori di r tali che

$$U_{eff}(r) < E$$

Possiamo sfruttare questo fatto per una prima discussione qualitativa delle orbite.

Per piccoli valori di r il termine proporzionale a r^{-2} del potenziale efficace (il cosiddetto potenziale centrifugo) è dominante, e quindi

$$\lim_{r \to 0} U_{eff}(r) = +\infty$$

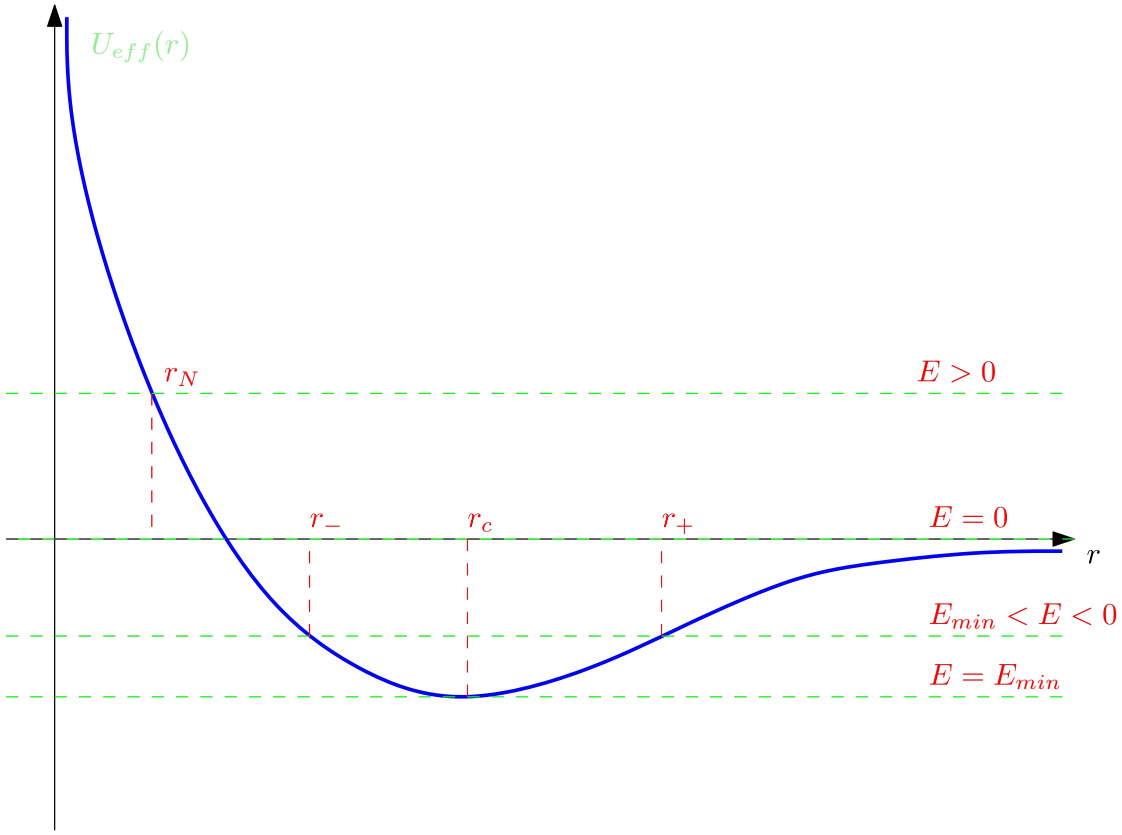

Figura 5.86.: Caratteristiche qualitative delle orbite per il problema di Keplero. Il grafico azzurro rappresenta il potenziale efficace, per un fissato valore di L. Le rette verdi tratteggiate rappresentano possibili valori dell'energia E.

Invece a grandi valori di r il termine gravitazionale domina,

$$\lim_{r\to+\infty} U_{eff}(r) = 0^-$$

Inoltre il potenziale efficace ha un minimo. Determiniamo la sua posizione: la derivata

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = -\frac{L^2}{\mu r^3} + \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

si annulla in

$$r_c = \frac{L^2}{\mu G m_1 m_2}$$

e il potenziale efficace assume in r_c il valore

$$U_{eff}(r_c) = -\frac{\mu G^2 m_1^2 m_2^2}{2L^2}$$

Il tutto è rappresentato schematicamente in Figura 5.86. Al variare di E abbiamo diversi intervalli permessi per r, in particolare

- Se $E < U_{eff}(r_c)$ non esistono r tali da avere una energia cinetica radiale positiva. Quindi questi valori dell'energia non sono permessi.

- Se $E = U_{eff}(r_c)$, l'energia cinetica radiale è nulla per $r = r_c$. Altri valori di r non sono permessi, quindi durante il moto r si mantiene costante. Si tratta quindi di un'orbita circolare (di raggio r_c). Dato che il raggio non varia, neppure $\dot{\theta}$ lo farà a causa della relazione (5.100.1). Abbiamo quindi un moto circolare uniforme. Questo caso particolare si poteva ricavare più semplicemente dall'equazione del moto radiale
$$-\mu r\dot{\theta}^2 = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$
sostituendo $\dot{\theta}$ in termini del momento angolare e risolvendo per r.

- Se $U_{eff}(r_c) < E < 0$ esiste un intervallo $r_- < r < r_+$ in cui il moto è permesso. Il moto radiale sarà quindi una oscillazione tra questi due estremi, mentre θ crescerà o diminuirà in accordo con la legge (5.100.1). Da notare che il segno della velocità angolare è determinato dal segno di L, e non può cambiare. Di conseguenza la particella orbiterà girando attorno all'origine senza cambiare mai segno.

- Se $E = 0$ l'intervallo permesso è $r \geq r_p$, dove r_p è il valore a cui il potenziale effettivo si annulla
$$r_p = \frac{L^2}{2\mu G m_1 m_2}$$
Quindi la particella si avvicinerà al centro fino ad una distanza r_p, e sfuggirà quindi all'infinito. Da notare che la velocità radiale tenderà a zero quando $r \to \infty$.

- Infine se $E > 0$ avremo ancora una distanza minima r_N determinata da
$$E = U_{eff}(r_N)$$
e ancora una volta la particella si avvicinerà al centro fino ad una distanza r_N per poi sfuggire all'infinito. Questa volta perà la velocità radiale rimarrà positiva per $r \to \infty$.

Passiamo adesso ad uno studio più dettagliato della forma delle orbite.

Calcolo delle orbite

Abbiamo già potuto notare che il segno di $\dot{\theta}$ non può cambiare. Di conseguenza θ sarà una funzione monotona (crescente o decrescente) del tempo, e potremo utilizzarla al posto di quest'ultimo per parametrizzare l'orbita. Riprendiamo quindi l'energia e scriviamola nella forma
$$E = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

Sostituendo nuovamente $\dot{\theta}$ otteniamo infine

$$E = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{dr}{d\theta} \frac{L}{\mu r^2} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{Gm_1 m_2}{r}$$

Conviene a questo punto introdurre la nuova variabile $u = 1/r$. La sua derivata rispetto all'angolo è legata a quella di r dalla relazione

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta}$$

e sostituendo nell'energia troviamo

$$E = \frac{L^2}{2\mu} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu} u^2 - Gm_1 m_2 u$$

Dato che l'energia si conserva dovrà essere $dE/d\theta = 0$, e quindi

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{L^2}{\mu} \frac{du}{d\theta} \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{L^2}{\mu} \frac{du}{d\theta} u - Gm_1 m_2 \frac{du}{d\theta} = 0$$

e quindi dovrà essere, scartando $du/d\theta = 0$,

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu G m_1 m_2}{L^2}$$

Questa equazione determina la traiettoria, ed è formalmente identica a quella cheun oscillatore armonico sottoposto a una forza costante (con θ che gioca il ruolo del tempo). La soluzione generale può essere scritta nella forma

$$u = A \cos(\theta + \phi) + \frac{\mu G m_1 m_2}{L^2}$$

dove le costanti A e ϕ dipendono dalle condizioni iniziali. In particolare sostituendo nell'energia possiamo determinare A in funzione delle costanti del moto. Abbiamo

$$\frac{2\mu E}{L^2} = \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 - \frac{2\mu G m_1 m_2}{L^2} u$$

e quindi

$$A^2 = \frac{2\mu E}{L^2} + \left(\frac{\mu G m_1 m_2}{L^2} \right)^2$$

Ricordando la definizione di u possiamo anche scrivere

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta + \phi)} \tag{5.100.2}$$

dove

$$\begin{aligned} p &= \frac{L^2}{\mu G m_1 m_2} \\ e &= \pm\frac{L^2}{\mu G m_1 m_2}\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2}+\left(\frac{\mu G m_1 m_2}{L^2}\right)^2} \end{aligned}$$

Variando ϕ otteniamo orbite della stessa forma, ma ruotate di tale angolo. Senza perdere generalità possiamo quindi limitarci a $\phi = 0$. Inoltre anche un cambiamento di segno di e sarà equivalente ad una rotazione di π dell'orbita, e potremo limitarci a considerare il caso $e \geq 0$ corrisponde a minima energia accettabile, corrispondente all'orbita circolare, corrisponde a $e = 0$: in tutti gli altri casi l'espressione sotto radice è positiva).

Possiamo adesso discutere la forma delle orbite. Scrivendo l'Equazione (5.100.2) nella forma

$$r = p - er\cos\theta$$

ed elevando al quadrato otteniamo

$$\left(1-e^2\right)x^2 - 2pex + y^2 = p^2$$

che è l'equazione di una conica. Notiamo anzitutto che il parametro p determina le dimensioni dell'orbita, e non la sua forma. Per quanto riguarda e abbiamo diversi casi possibili

Se $e = 0$ il raggio è costante, $r = p$. Siamo nel caso dell'orbita circolare visto precedentemente.

1. Se al variare di θ il denominatore della (5.100.2) non si annulla mai, e resta finito. Abbiamo a che fare con un'orbita limitata, che in effetti è un'ellisse. L'ellisse ha un fuoco sul centro di forza. Inoltre possiamo scrivere

$$r_+ = \frac{p}{1-e}, \quad r_- = \frac{p}{1+e}$$

che permettono di ottenere il raggio di massimo e minimo avvicinamento al centro in termini delle costanti del moto (o viceversa).

2. Se $e = 1$ il denominatore della (5.100.2) si annulla per , e quindi $r \to \infty$ per questi valori. L'orbita non è dunque limitata, ed in effetti si tratta di una parabola. Anche in questo caso il centro di forza è nel fuoco.

Infine se $e > 1$ il denominatore si annulla per due angoli $\pm\theta^*$ minori in modulo di π. di un'iperbole (con il centro di forza su un fuoco)erifica che si tratta di un'iperbole (con il centro di forza su un fuoco). In questo caso e nel precedente la posizione di massimo avvicinamento si può ottenere da

$$r_N = \frac{p}{1+e}$$

fig:KeplerOrbitsi orbite possibili sono rappresentati schematicamente in Figura (5.87).

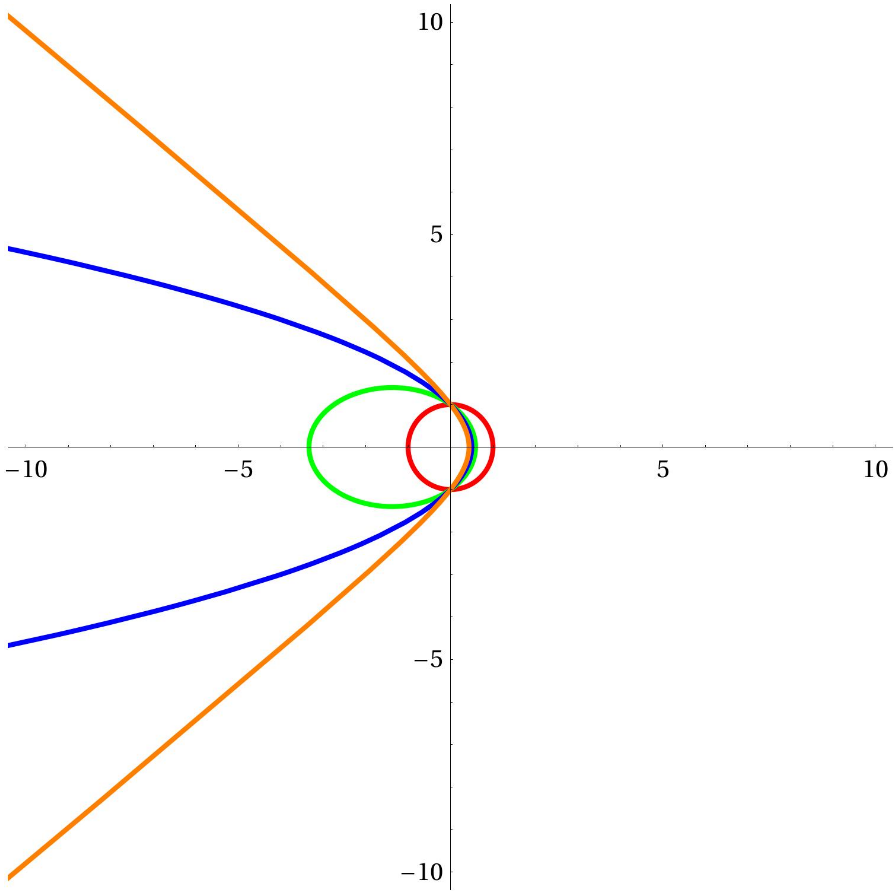

Figura 5.87.: Alcune possibili orbite. Abbiamo sempre $p = 1$, mentre rispettivamente $e = 0$ (orbita rossa, circonferenza), $e = 0.7$ (orbita verde, ellisse), $e = 1$ (orbita blu, parabola) ed $e = 1.3$ (orbita arancio, iperbole). Il centro delle forze è nell'origine.

Altri aspetti del problema saranno studiati in un esercizio successivo.