PROBLEMA 5.101

Oscillatore forzato e transiente ⋆⋆

Un oscillatore armonico smorzato (massa m e costante elastica k) è inizialmente fermo. A partire dall'istante $t = 0$ subisce una forza

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \qquad (t > 0)$$

e si vuole calcolare la sua risposta. Discutere il risultato in funzione dei parametri del problema.

Soluzione

L'equazione del moto per $t > 0$ si può scrivere nella forma

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

e sappiamo che la sua soluzione generale è data dalla somma di una soluzione particolare e della soluzione generale dell'equazione omogenea. La soluzione generale cercata è un'oscillazione libera

$$x_{om}(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t$$

con $\omega_0^2 = k/m$. Determiniamo adesso una soluzione particolare: sappiamo che per $\omega \neq \omega_0$ possiamo cercarla nella forma

$$x_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

e sostituendo nell'equazione del moto troviamo

$$\left(-\omega^2 A \cos \omega t - \omega^2 B \sin \omega t\right) + \omega_0^2 \left(A \cos \omega t + B \sin \omega t\right) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

da cui

$$\begin{aligned} \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) A &= \frac{F_0}{m} \\ \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) B &= 0 \end{aligned}$$

Risolvendo otteniamo ($\omega_0^2 = k/m$)

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \frac{F_0}{m} \\ B &= 0 \end{aligned}$$

Quindi la soluzione generale sarà

$$x(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Imponiamo adesso le condizioni al contorno a $t = 0$:

$$\begin{aligned} x(0) &= a + \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \frac{F_0}{m} = 0 \\ \dot{x}(0) &= b\omega_0 = 0 \end{aligned}$$

da cui

$$x(t) = \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \frac{F_0}{m} \left(\cos \omega t - \cos \omega_0 t\right)$$

Cerchiamo adesso di ottenere la soluzione nel caso $\omega = \omega_0$ come limite della precedente. Abbiamo

$$x(t) = \lim_{\omega \to \omega_0} \frac{F_0}{m} \left(\frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

Applicando il teorema di de l'Hôpital

$$x(t) = \lim_{\omega \to \omega_0} \frac{F_0}{m} \left(\frac{-t \sin \omega t}{-2\omega} \right) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t$$