PROBLEMA 5.103

Oscillatore bidimensionale forzato ⋆⋆

Una massa m è collegata ad una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo trascurabile, ed è libera di muoversi in un piano. Su di essa agisce una forza di attrito viscoso $\vec{F} = -\gamma\vec{v}$. L'altro estremo della molla viene spostato secondo la legge

$$
\begin{aligned}
x_0(t) &= a\cos\omega t \\
y_0(t) &= b\sin\omega t
\end{aligned}
$$

cioè su una ellisse di semiassi a e allineati agli assi coordinati. Determinare la traiettoria della massa a regime.

Soluzione

Scriviamo le equazioni del moto nella forma

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx &= ka\cos\omega t \\
m\ddot{y} + \gamma\dot{y} + ky &= kb\sin\omega t
\end{aligned}
$$

e introduciamo la variabile complessa

$$z = \frac{x}{a} + i\frac{y}{b}$$

che dovrà soddisfare l'equazione

$$m\ddot{z} + \gamma\dot{z} + kz = ke^{i\omega t}$$

A regime la soluzione è data da

$$z = \frac{k}{-m\omega^2 + i\omega\gamma + k}e^{i\omega t}$$

Quindi nel piano di coordinate $a^{-1}x$, $b^{-1}y$ la traiettoria è una circonferenza di raggio

$$R = \left|\frac{k}{-m\omega^2 + i\omega\gamma + k}\right| = \frac{k}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}$$

e nel piano di coordinate x, y troviamo un'ellisse di semiassi aR e bR.