PROBLEMA 5.104

Caduta su una scodella ⋆⋆

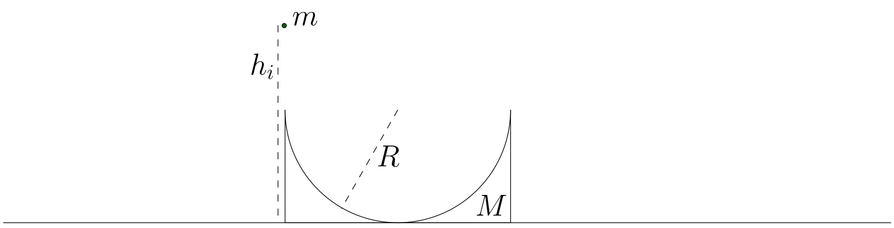

Figura 5.88.: La scodella semisferica del problema.

Una scodella semisferica di massa M è appoggiata su un piano orizzontale privo di attrito. Un punto materiale di massa m viene lasciato cadere da una altezza $h_i > R$, in modo da arrivare sul bordo sinistro della scodella. Da questo momento esso rimane vincolato ad essa, fino ad arrivare eventualmente al bordo opposto e lasciarla.

1. Calcolare lo spostamento orizzontale della scodella al momento del distacco, e l'altezza finale a cui arriva il punto materiale.

2. Calcolare la velocità del punto materiale al suo passaggio nel punto più basso della scodella.

3. Applicando una forza orizzontale alla scodella la si mantiene ferma. Quale è il valore massimo della forza da applicare?

Soluzione[3]

Domanda 1 Indichiamo con X_i la posizione orizzontale iniziale del centro di massa della sola scodella. Per il centro di massa del sistema avremo

$$X_{cm,i} = \frac{MX_i + m\left(X_i - R\right)}{M+m} \tag{5.104.1}$$

Al momento del distacco avremo

$$X_{cm,f} = \frac{M\left(X_i + d\right) + m\left(X_i + d + R\right)}{M+m} \tag{5.104.2}$$

dove d è lo spostamento cercato. Ma dato che la componente orizzontale della quantità di moto del sistema si conserva ed è inizialmente nulla sarà $X_{cm,i} = X_{cm,f}$, quindi

$$\frac{MX_i + m\left(X_i - R\right)}{M+m} = \frac{M\left(X_i + d\right) + m\left(X_i + d + R\right)}{M+m} \tag{5.104.3}$$

[3] Scritto del 9 marzo 2011

e risolvendo troviamo

$$d = -\frac{2mR}{m+M} \tag{5.104.4}$$

Indichiamo con v_x, v_y le componenti della velocità della particella, con V la velocità della scodella.

Al distacco la componente orizzontale della velocità della particella relativa alla scodella è nulla. Ma dato che la quantità di moto orizzontale si conserva ed è inizialmente nulla abbiamo

$$0 = mv_x + MV = m\left(v_x - V\right) + \left(M+m\right)V = (m+M)V \tag{5.104.5}$$

Quindi $V = 0$, ma anche $v_x = -\frac{M}{m}V = 0$. In conclusioni al momento del distacco la scodella è ferma e la particella si muove verticalmente. Dalla conservazione dell'energia segue che l'altezza finale sarà uguale a quella iniziale.

Domanda 2 Usando la conservazione dell'energia possiamo scrivere

$$mgh_i = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \tag{5.104.6}$$

dove abbiamo indicato con v, V le velocità della particella e della scodella (entrambe orizzontali quando la prima si trova nel punto più basso). Inoltre dalla conservazione della quantità di moto orizzontale abbiamo

$$0 = mv + MV \tag{5.104.7}$$

e quindi

$$V = -\frac{m}{M}v \tag{5.104.8}$$

Sostituendo otteniamo

$$mgh_i = \frac{1}{2}m\left(1+\frac{m}{M}\right)v^2$$

e quindi

$$v = \sqrt{2gh_i\left(\frac{M}{m+M}\right)} \tag{5.104.9}$$

Domanda 3 Dato che la forza da applicare è l'unica che agisce

$$F = \left(M+m\right)\frac{ma_x}{m+M} = ma_x \tag{5.104.10}$$

dove a_x è l'accelerazione orizzontale della particella. D'altra parte

$$ma_x = -N\sin\theta \tag{5.104.11}$$

dove N è la reazione vincolare della scodella. Se scriviamo l'equazione del moto per la particella nella direzione radiale abbiamo invece

$$m\frac{v^2}{R} = -mg\cos\theta + N \tag{5.104.12}$$

Inoltre dalla conservazione dell'energia

$$mgh_i = mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2 \tag{5.104.13}$$

Sostituendo nellala velocità in funzione della posizione. Sostituendo nella (5.104.11) otteniamo

$$N = 2mg\left(\frac{h_i}{R} - 1 + \cos\theta\right) + mg\cos\theta \tag{5.104.14}$$

e quindi

$$F = -mg\left[2\left(\frac{h_i}{R}-1\right) + 3\cos\theta\right]\sin\theta \tag{5.104.15}$$

Cerchiamo il minimo:

$$\frac{dF}{d\theta} = -mg\left[2\left(\frac{h_i}{R}-1\right) + 3\cos\theta\right]\cos\theta + 3mg\sin^2\theta = 0 \tag{5.104.16}$$

cioè

$$\cos^2\theta + 2\gamma\cos\theta - \frac{1}{2} = 0 \tag{5.104.17}$$

dove abbiamo posto per semplicità

$$\gamma = \frac{1}{6}\left(\frac{h_i}{R} - 1\right) \tag{5.104.18}$$

Risolvendo troviamo

$$\cos\theta = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + \frac{1}{2}} \tag{5.104.19}$$

Scartando la soluzione negativa (non corrisponde ad una posizione sulla scodella) e sostituendo abbiamo

$$F = \pm 3mg\left(3\gamma + \sqrt{\gamma^2+\frac{1}{2}}\right)\sqrt{\frac{1}{2} - 2\gamma^2 + 2\gamma\sqrt{\gamma^2+\frac{1}{2}}} \tag{5.104.20}$$