PROBLEMA 5.105

Problema di Keplero: costanti del moto ⋆⋆⋆

Nel problema di Keplero si conserva il momento angolare $\vec{L}$ e l'energia E. Dato che le orbite limitate sono ellissi con il fuoco nel centro di forza, se consideriamo un versore $\hat{n}$ diretto dal centro di forza al punto di massimo avvicinamento vediamo che si tratta di una costante del moto. Calcolare esplicitamente questa costante in funzione del vettore posizione $\vec{R}$ e della quantità di moto $\vec{P}$ della particella orbitante. Quante "nuove" costanti del moto abbiamo ottenuto oltre alle quattro (E, L_x, L_y e L_z) già note precedentemente? "Nuove" significa non esprimibili come funzioni delle altre.

Soluzione

Descriviamo la traiettoria usando coordinate polari nel piano passante per il centro di forza e perpendicolare a $\vec{L}$. Come abbiamo verificato in un esercizio precedente questa si può scrivere nella forma

$$R = \frac{p}{1 + e\cos(\theta + \phi)}$$

dove per una traiettoria ellittica $0 < e < 1$. La posizione del punto di massimo avvicinamento corrispondono dunque a $\theta = -\phi$, e quindi le componenti cartesiane di $\hat{n}$ sono

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ -\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'altra parte, dall'equazione della traiettoria segue che

$$R\cos(\theta + \phi) = \frac{p - R}{e}$$

ossia

$$n_x \cos\theta + n_y \sin\theta = \hat{n} \cdot \hat{e}_r = \frac{p - R}{eR}$$

Derivando questa espressione rispetto al tempo otteniamo

$$\hat{n} \cdot \hat{e}_\theta = -\frac{p}{e\dot{\theta}R^2}\dot{R}$$

da cui segue che il versore cercato è della forma

$$\hat{n} = \frac{1}{e}\left[\left(\frac{p - R}{R}\right)\hat{e}_r - \frac{p}{R^2\dot{\theta}}\dot{R}\hat{e}_\theta\right]$$

Cerchiamo di esprimere questa espressione in funzione dei vettori posizione e quantità di moto. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\hat{n} &= \frac{1}{e}\left[\left(\frac{p}{R}-1\right)\hat{e}_r - \frac{p}{R^2\dot{\theta}}\dot{R}\hat{e}_\theta\right] \\
&= \frac{1}{e}\left[\left(\frac{p}{R}-1\right)\hat{e}_r - \frac{p}{R^2\dot{\theta}}\left(\dot{R}\hat{e}_\theta - R\dot{\theta}\hat{e}_r + R\dot{\theta}\hat{e}_r\right)\right] \\
&= \frac{1}{e}\left[-\hat{e}_r - \frac{p}{R^2\dot{\theta}}\left(\dot{R}\hat{e}_\theta - R\dot{\theta}\hat{e}_r\right)\right] \\
&= \frac{1}{e}\left[-\hat{e}_r - \frac{p}{R^2\dot{\theta}}\hat{L}\wedge\vec{V}\right] \\
&= \frac{1}{e}\left[-\hat{e}_r + \frac{mp}{L^2}\vec{V}\wedge\vec{L}\right] \\
&= \frac{1}{e}\left[\frac{p}{L^2}\vec{P}\wedge\vec{L} - \hat{e}_r\right]
\end{aligned}$$

D'altra parte possiamo scrivere l'inverso del raggio di massimo e minimo avvicinamento nella forma

$$\begin{aligned}
\frac{p}{R_-} &= 1+e \\
\frac{p}{R_+} &= 1-e
\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{1}{R_+} + \frac{1}{R_-} = \frac{2}{p}$$

Ora, $1/R_+$ e $1/R_-$ sono soluzioni di

$$\frac{L^2}{2mR^2} - \frac{k}{R} - E = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_+}\right)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_-}\right) = 0$$

e troviamo

$$p = \frac{L^2}{km}$$

Analogamente possiamo verificare che anche e si può scrivere in funzione delle costanti del moto,

$$e = 1 - \frac{p}{R_+} = -\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2m}}$$

In conclusione possiamo scrivere il versore cercato nella forma

$$\begin{aligned}
\hat{n} &= \frac{1}{kme}\left[\vec{P}\wedge\vec{L} - km\frac{\vec{R}}{R}\right] \\
&= \frac{1}{kme}\left[\vec{P}\wedge\left(\vec{R}\wedge\vec{P}\right) - km\frac{\vec{R}}{R}\right]
\end{aligned}$$

In questa espressione non abbiamo più quantità che dipendono da una particolare scelta del piano orbitale, quindi il risultato sarà vero in generale.

Per specificare un versore in tre dimensioni sono necessari due parametri (ad esempio i due parametri angolari delle coordinate sferiche). Sappiamo però che $\hat{n}$ giace nel piano dell'orbita, che è completamente determinato dal momento angolare. Resta quindi un'unica nuova quantità conservata.

Osserviamo infine che il vettore

$$\vec{A} = km e\hat{n} = \vec{P} \wedge \vec{L} - km\frac{\vec{R}}{R}$$

diretto come $\hat{n}$ è noto come vettore di Lenz. Da quanto abbiamo visto segue che $\vec{A}$ è una costante del moto per il problema di Keplero.