PROBLEMA 5.106

Sistema solare su un cono ⋆⋆

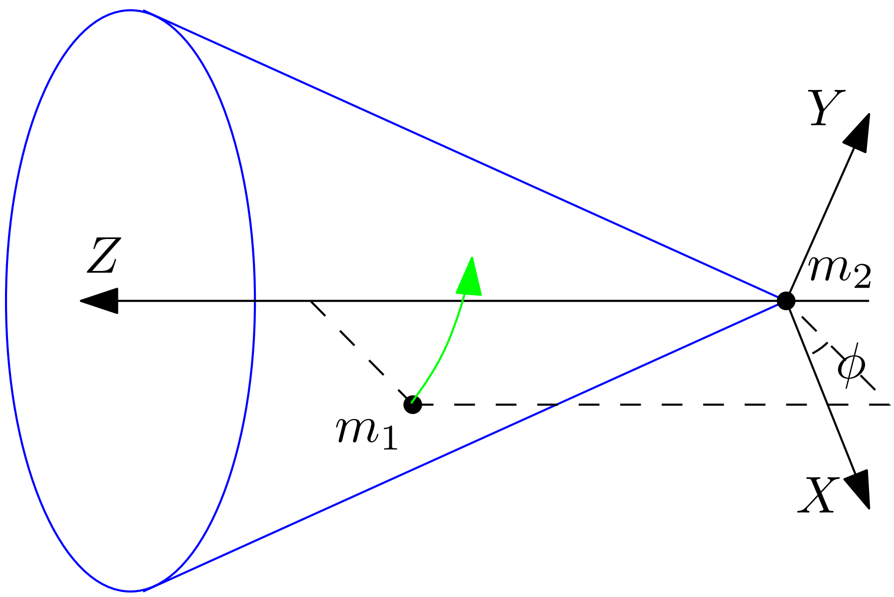

Figura 5.89.: Il cono sul quale si muove la particella di massa m_1. La massa m_2 è fissa nel vertice.

Una particella di massa m_1 si muove vincolata ad un cono senza attrito, con angolo di apertura 2α, sotto l'azione della sola interazione gravitazionale con una massa m_2 fissata sul vertice. In coordinate cilindriche l'equazione del cono è

$$\rho = z \tan \alpha \tag{5.106.1}$$

1. Scrivere le costanti del moto del sistema in termini delle sole coordinate ρ e ϕ.
2. Determinare il periodo di un'orbita circolare corrispondente ad un valore fissato di ρ.
3. Determinare la forma delle traiettorie.

Soluzione

Domanda 1 Le costanti del moto del problema sono l'energia totale e la proiezione del momento angolare lungo l'asse z. L'energia si conserva perchè la forza gravitazionale è conservativa, e il lavoro da essa fatto sarà incluso nell'energia totale come energia potenziale. L'unica altra forza che agisce sulla massa m_1 è la reazione vincolare del cono, ma dato che il vincolo è privo di attrito questa è perpendicolare alla superficie e quindi allo spostamento, per cui non fa lavoro.

L'energia totale si scrive nelle coordinate desiderate come

$$E = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{\dot{\rho}}{\sin\alpha}\right)^2 + \rho^2\dot{\phi}^2\right] - \frac{Gm_1m_2\sin\alpha}{\rho} \tag{5.106.2}$$

dato che ρ è legato alla distanza tra le due masse da $\rho = r_{12}\sin\alpha$. Per la proiezione del momento angolare lungo l'asse z abbiamo invece

Domanda 2 Data la forma del vincolo un'orbita circolare è una traiettoria a costante. La seconda legge della dinamica si scrive quindi nella forma

$$m_1\left(-\dot{\phi}^2\rho\hat{e}_\rho + \rho\ddot{\phi}\hat{e}_\phi\right) = \vec{R} - \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{21} \tag{5.106.3}$$

dove $\vec{R}$ è la reazione vincolare del cono e $\vec{r}_{12}$ il vettore che unisce il vertice del cono alla particella di massa m_1. Dato che $\vec{R}$ è normale alla superficie e quindi a $\vec{r}_{12}$ conviene proiettare lungo quest'ultimo l'equazione precedente, ottenendo

$$-\dot{\phi}^2\rho\hat{e}_\rho\cdot\vec{r}_{12} = -\frac{Gm_2}{r_{12}} \tag{5.106.4}$$

dato che $\vec{r}_{12}\cdot\hat{e}_\phi = 0$. Inoltre $\hat{e}_\rho\cdot\vec{r}_{12} = \rho$ e quindi

$$\dot{\phi}^2 = \frac{Gm_2\sin\alpha}{\rho^3} \tag{5.106.5}$$

da cui

$$\dot{\phi} = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{Gm_2\sin\alpha}{\rho^3}} \tag{5.106.6}$$

ossia

$$T = 2\pi\frac{\rho^{3/2}}{\sqrt{Gm_2\sin\alpha}} \tag{5.106.7}$$

Alternativamente si poteva eliminare $\dot{\phi}$ dall'energia ottenendo il potenziale efficace

$$E = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{\dot{\rho}}{\sin\alpha}\right)^2 + \frac{L_z^2}{2m_1\rho^2} - \frac{Gm_1m_2\sin\alpha}{\rho} \tag{5.106.8}$$

che è minimo al valore di ρ corrispondente all'orbita circolare. Derivando rispetto a ρ^{-1} otteniamo

$$\frac{L_z^2}{m_1\rho} - Gm_1m_2\sin\alpha = 0 \tag{5.106.9}$$

ossia

$$\rho = \frac{L_z^2}{Gm_1^2m_2\sin\alpha} \tag{5.106.10}$$

d'altra parte sostituendo L_z otteniamo

$$\dot{\phi}^{-2} = \frac{\rho^3}{Gm_2\sin\alpha} \tag{5.106.11}$$

che coincide col risultato precedente.

Domanda 3 Le orbite si possono ottenere analiticamente con un metodo analogo a quello usato per il problema di Keplero. Utilizzando come parametro la coordinata ϕ e non il tempo possiamo scrivere l'energia nella forma

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m_1\left(\frac{1}{\sin\alpha}\frac{d\rho}{d\phi}\dot{\phi}\right)^2 + \frac{L_z^2}{2m_1\rho^2} - \frac{Gm_1m_2\sin\alpha}{\rho} \\ &= \frac{1}{2}m_1\left(\frac{1}{\sin\alpha}\frac{d\rho}{d\phi}\frac{L_z}{m_1\rho^2}\right)^2 + \frac{L_z^2}{2m_1\rho^2} - \frac{Gm_1m_2\sin\alpha}{\rho} \end{aligned} \tag{5.106.12}$$

Introducendo adesso la coordinata $u = 1/\rho$ abbiamo

$$E = \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{m_1\sin^2\alpha}\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + \frac{L_z^2}{2m_1}u^2 - Gm_1m_2u\sin\alpha \tag{5.106.13}$$

e derivando rispetto a ϕ (l'energia è costante) otteniamo

$$\frac{dE}{d\phi} = \frac{L_z^2}{m_1\sin^2\alpha}\frac{du}{d\phi}\frac{d^2u}{d\phi^2} + \frac{L_z^2}{m_1}\frac{du}{d\phi}u - Gm_1m_2\frac{du}{d\phi}\sin\alpha = 0$$

cioè un'equazione per la traiettoria

$$\frac{L_z^2}{m_1\sin^2\alpha}\frac{d^2u}{d\phi^2} + \frac{L_z^2}{m_1}u = Gm_1m_2\sin\alpha \tag{5.106.14}$$

che ha per soluzione generale

$$u = \frac{1}{\rho} = \frac{Gm_1^2m_2\sin\alpha}{L_z^2} + A\cos(\phi\sin\alpha + \beta) \tag{5.106.15}$$

dove A, β dipendono dalle condizioni iniziali. Se $\alpha = \pi/2$ il cono si riduce ad un piano e le traiettorie sono le familiari coniche del problema di Keplero. La soluzione nel caso generale si può interpretare facilmente immaginando di "tagliare" il cono e di "incollarlo" su un piano come in Figura 5.90. L'operazione è possibile senza deformare la superficie, come si può osservare notando che le coordinate

$$r = \frac{\rho}{\sin\alpha} \tag{5.106.16}$$

$$\theta = \phi\sin\alpha \tag{5.106.17}$$

si possono interpretare come coordinate polari nel piano in cui è stato "incollato" il cono tagliato. In tali coordinate il problema è indistinguibile da quello di Keplero, come si può verificare riscrivendo le costanti del moto

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{Gm_1}{r} \tag{5.106.18}$$

$$L_z' = \frac{L_z}{\sin\alpha} = m_1r^2\dot{\theta} \tag{5.106.19}$$

se si eccettua il fatto che non tutto il piano è ricoperto dal cono se $\alpha < \pi/2$ (oppure è ricoperto più volte se $\alpha > \pi/2$). Avremo quindi, ad esempio, orbite ellittiche che però andranno collegate sui due bordi del taglio, che dovranno essere identificati. Questo equivarrà ad un angolo di precessione delle orbite di $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\sin\alpha}$. Vedere la Figura 5.90 e la discussione del problema

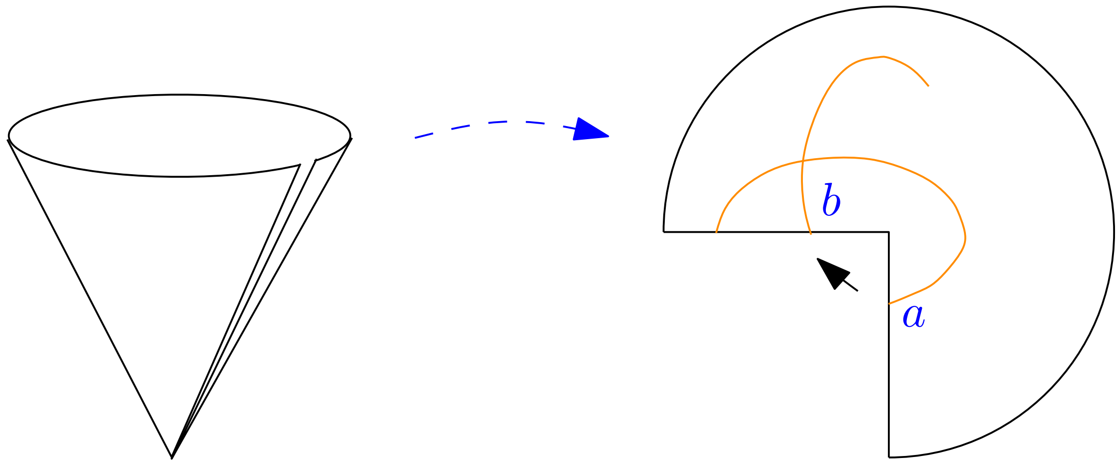

Figura 5.90.: Un cono può essere tagliato e "incollato" su un piano senza deformarlo. Nel caso considerato l'angolo α è tale che $\sin\alpha = 3/4$, quindi il cono ricopre tre quarti del piano. Le orbite sono tratti di coniche, perchè il problema è indistinguibile da quello di Keplero. Si devono però identificare i bordi del taglio, per cui quando un'orbita (ellittica in figura) arriva nel taglio al punto a, deve essere prolungata a partire dal punto corrispondente (a e b è tale che essa distanza dal vertice). Inoltre l'angolo tra orbita e taglio deve essere lo stesso sia in a che in b.