PROBLEMA 5.107

Pendolo urtato da un proiettile ★★

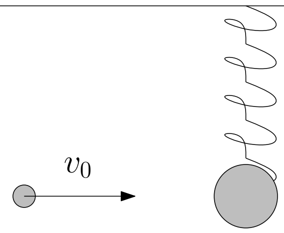

Figura 5.91.: La massa sospesa e il proiettile. L'urto è istantaneo.

Una massa m è sospesa al soffitto mediante una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Si trova inizialmente nella posizione di equilibro. Un proiettile di massa $m' = \gamma m$ la urta orizzontalmente con velocità v_0, rimanendo attaccato ad essa. L'urto è istantaneo.

1. Calcolare la velocità delle due masse immediatamente dopo l'urto.
2. Per quali valori di γ e v_0 le masse urtano il soffitto?
3. Calcolare il massimo allungamento della molla, nel caso $\gamma = 1$

Soluzione

Domanda 1 Durante l'urto le sole forze importanti sono quelle impulsive tra la massa sospesa e quella in arrivo. Dato che si tratta di forze interne, la quantità di moto si conserva e quindi

$$\gamma m v_0 \hat{x} = (\gamma + 1)\, m\vec{v} \tag{5.107.1}$$

quindi la velocità finale sarà orizzontale e varrà

$$\vec{v} = \frac{\gamma}{\gamma + 1} v_0 \hat{x} \tag{5.107.2}$$

Domanda 2 Immediatamente dopo l'urto le equazioni del moto per la massa risultante saranno

$$(\gamma + 1) m\ddot{x} + kx = 0 \tag{5.107.3}$$
$$(\gamma + 1) m\ddot{y} + ky = -(\gamma + 1) mg \tag{5.107.4}$$

quindi il moto sarà la composizione di un'oscillazione orizzontale attorno alla posizione di equilibrio $x = 0$, e di una verticale attorno alla posizione di equilibrio

$y = -(\gamma+1)\frac{mg}{k}$. Entrambe le oscillazioni avranno la frequenza angolare

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m(\gamma+1)}} \tag{5.107.5}$$

Consideriamo in particolare l'oscillazione verticale, che sarà data da

$$y(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t - (\gamma+1)\frac{mg}{k} \tag{5.107.6}$$

Poniamo le condizioni al contorno, tenendo presente che inizialmente la massa non si muove verticalmente e si trova in $y = -mg/k$. Abbiamo

$$y(0) = A - (\gamma+1)\frac{mg}{k} = -\frac{mg}{k} \tag{5.107.7}$$

$$\dot{y}(0) = B\omega = 0 \tag{5.107.8}$$

di conseguenza $A = \gamma mg/k$, $B = 0$ e

$$y(t) = \frac{mg}{k}\left[\gamma\cos\omega t - (\gamma+1)\right] \tag{5.107.9}$$

In altri termini, l'ampiezza di oscillazione è la differenza tra la quota iniziale e quella di equilibrio. Ma allora il massimo valore di y raggiungibile sarà quello iniziale, $y(0) = -mg/k$, e la massa non potrà mai urtare il soffitto.

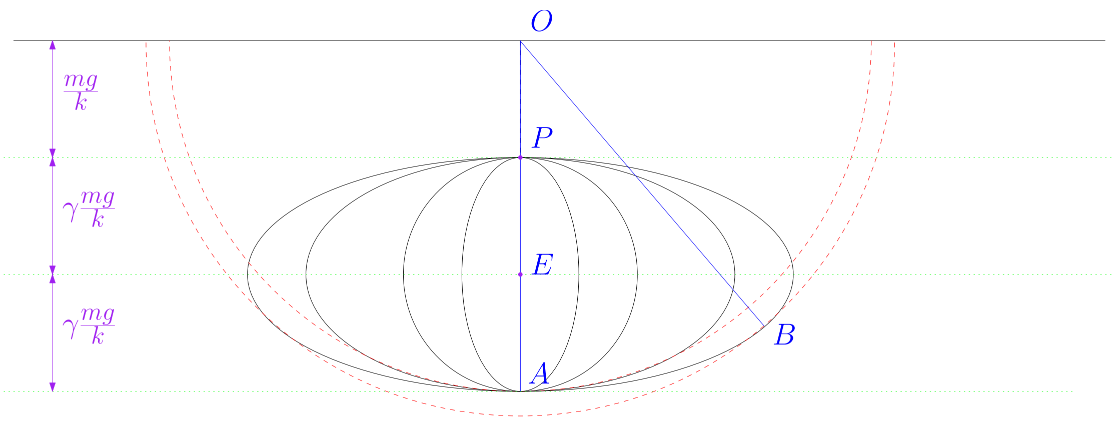

Figura 5.92.: Il massimo allungamento. Le masse si trovano inizialmente nel punto P, che è il punto di equilibrio della massa sospesa prima dell'urto, ed è sotto il punto di sospensione della molla O di $\overline{OP} = mg/k$. Dopo l'urto il punto di equilibrio diviene E, con $\overline{OE} = (\gamma+1)mg/k$.

Domanda 3 Abbiamo determinato in precedenza $y(t)$. Per quanto riguarda $x(t)$ la soluzione generale è

$$x(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t \tag{5.107.10}$$

e imponendo le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} x(0) &= C = 0 && (5.107.11) \\ \dot{x}(0) &= D\omega = \frac{1}{2}v_0 && (5.107.12) \end{aligned}$$

otteniamo

$$x(t) = \frac{v_0}{2\omega}\sin\omega t \qquad (5.107.13)$$

Possiamo adesso scrivere l'allungamento della molla nel caso $\gamma = 1$ come

$$\ell^2(t) = x(t)^2 + y(t)^2 = \frac{v_0^2}{4\omega^2}\left[\sin^2\omega t + \frac{g^2}{v_0^2\omega^2}(\cos\omega t - 2)^2\right] \qquad (5.107.14)$$

e per semplificare la discussione conviene introdurre la scala adimensionale $\beta = g/(v_0\omega)$. Troviamo il massimo di 5.107.14 . La derivata vale

$$\frac{d\ell^2}{dt} = \frac{v_0^2}{2\omega}\left[2\beta^2 + \left(1-\beta^2\right)\cos\omega t\right]\sin\omega t = 0$$

e si annulla per $\sin\omega t = 0$, che corrisponde ai due allungamenti quadri

$$\ell^2(t) = \frac{v_0^2}{4\omega^2}\beta^2(\pm 1 - 2)^2 = \begin{cases} \frac{1}{4}\frac{v_0^2}{\omega^2}\beta^2 \\ \frac{9}{4}\frac{v_0^2}{\omega^2}\beta^2 \end{cases} \qquad (5.107.15)$$

delle quali il secondo è il maggiore, e corrisponde al punto più basso raggiunto dalla traiettoria. L'altra possibile soluzione è

$$\cos\omega t = \frac{2\beta^2}{\beta^2 - 1} \qquad (5.107.16)$$

che è accettabile (perchè minore di 1 in modulo) nell'intervallo $0 < \beta < 1/\sqrt{3}$. La lunghezza corrispondente è

$$\ell^2(t) = \frac{1}{4}\frac{v_0^2}{\omega^2}\frac{1+3\beta^2}{1-\beta^2}$$

che è sempre l'allungamento massimo in questo intervallo.

Si può interpretare graficamente questo risultato. La traiettoria è una delle ellissi in Figura (5.92): il semiasse verticale vale sempre $\gamma mg/k$, quello orizzontale è tanto più grande quanto maggiore è la velocità iniziale. Se il semiasse orizzontale è piccolo (β grande) la distanza massima tra O e un punto dell'ellisse è $\overline{OA}$. Quando il semiasse orizzontale diviene abbastanza grande il massimo diviene $\overline{OB}$. Dalla figura è chiaro che questo accade quando il raggio di curvatura della traiettoria in A diviene maggiore di , cioè quando

$$(2\gamma+1)\frac{mg}{k} < \rho_A = \left|\frac{v^2}{a_\perp}\right|_A = \left|\frac{\dot{x}^2}{\ddot{y}}\right|_A = \frac{k}{mg\gamma\omega^2}\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{g\gamma}\left(\frac{v_0}{2}\right)^2$$

cioè per

$$\gamma(2\gamma+1)\beta^2 < 1$$

che per $\gamma = 1$ si riduce alla condizione trovata precedentemente $\beta < 1/\sqrt{3}$.