PROBLEMA 5.109

Cambio di orbita ⋆⋆

Un punto materiale di massa m si muove sotto l'azione di un potenziale

$$U(r) = -\frac{k}{r}$$

e percorre un'orbita ellittica con distanze di minimo e massimo avvicinamento al centro delle forze data da $r_{min} = b$ e $r_{max} = a$. Mediante un sistema di propulsione è possibile trasferire al punto materiale in un tempo molto breve un impulso $\vec{Q}$. Il sistema di propulsione viene azionato nella posizione di massimo avvicinamento.

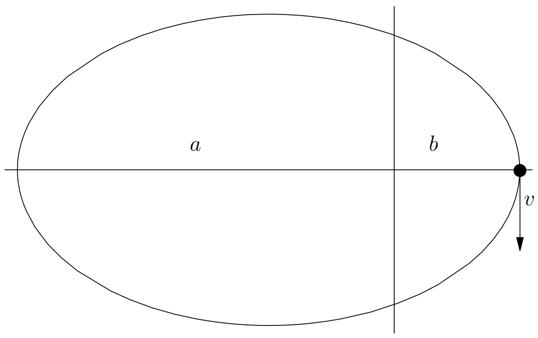

Figura 5.93.: L'orbita ellittica considerata. Sono indicate le distanze di massimo e minimo avvicinamento al centro di forza, posto nell'origine degli assi coordinati.

1. Determinare modulo, direzione e verso dell'impulso $\vec{Q}$ necessario a porre la particella in orbita circolare rimanendo nello stesso piano dell'orbita precedente.

2. Determinare il minimo modulo dell'impulso $\vec{Q}$ necessario a far cadere la particella sul centro delle forze.

3. Determinare il minimo modulo di $\vec{Q}$ necessario a porre la particella su un'orbita illimitata.

Soluzione[5]

Domanda 1

La velocità iniziale v si può calcolare scrivendo l'energia totale in $r = a$ e $r = b$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{L^2}{2mb^2} - \frac{k}{b} \\ E &= \frac{L^2}{2ma^2} - \frac{k}{a} \end{aligned}$$

dove si è utilizzato il fatto che nei punti di massimo e minimo avvicinamente $E = U_{eff}$. Segue che

$$\frac{L^2}{2m}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = k\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

ossia

$$(mvb)^2 = L^2 = 2mk\frac{ab}{a+b}$$

e quindi

$$v = \sqrt{\frac{2k}{m}\frac{a}{b}\frac{1}{a+b}}\,.$$

Dato che l'impulso è applicato in un tempo molto breve la posizione iniziale della nuova orbita sarà ancora quella di massimo avvicinamento, ma la velocità sarà cambiata:

$$\vec{v}_c = v\hat{\tau} + \frac{1}{m}\vec{Q}\,.$$

Se la nuova orbita deve essere circolare è chiaro che la nuova velocità deve essere ancora puramente tangenziale, da cui $\vec{Q} = Q\hat{\tau}$. Inoltre la massa per l'accelerazione centripeta dovranno essere uguali alla forza radiale,

$$m\frac{v_c^2}{b} = \frac{k}{b^2}$$

da cui

$$\frac{k}{mb} = v_c^2 = \left(v + \frac{Q}{m}\right)^2$$

e quindi

$$\vec{Q} = \left(\sqrt{\frac{mk}{b}} - mv\right)\hat{\tau} = \sqrt{\frac{mk}{b}}\left(1 - \sqrt{\frac{2a}{a+b}}\right)\hat{\tau}\,.$$

[5] Secondo problema scritto 30/3/2007

Domanda 2

Un'orbita corrisponde alla caduta sul centro di forze quando il momento angolare è nullo, l'impulso dovrà quindi essere applicato in modo tale da annullarne il valore iniziale. Scrivendo separatamente la componente radiale e tangenziale

$$\vec{Q} = Q_\tau \hat{\tau} + Q_n \hat{n}$$

abbiamo la condizione

$$\Delta \vec{L} = -\vec{L} = b\hat{n} \wedge (Q_\tau \hat{\tau} + Q_n \hat{n})$$

da cui

$$L = -mvb = bQ_\tau$$

mentre Q_n resta arbitrario. Il modulo minimo di $\vec{Q}$ corrisponde ovviamente a $Q_n = 0$ ed abbiamo

$$\vec{Q} = -mv\hat{\tau} = -\sqrt{\frac{km}{b}\frac{2a}{a+b}}\hat{\tau}$$

che corrisponde all'impulso necessario a fermare la particella nella posizione in cui si trova.

Domanda 3

Per ottenere un'orbita illimitata è sufficiente avere $E > 0$. Dopo l'applicazione dell'impulso l'energia totale vale

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{Q_r}{m}\right)^2 + \frac{(mvb + Q_\tau b)^2}{2mb^2} - \frac{k}{b}$$

da cui

$$Q_r^2 + (mv + Q_\tau)^2 \geq \frac{2mk}{b}.$$

Sviluppando i quadrati

$$Q_r^2 + Q_\tau^2 + 2mvQ_\tau + m^2v^2 \geq \frac{2mk}{b}$$

vediamo che il modo più efficiente di aumentare il membro destro è quello di applicare l'impulso tangenzialmente (a causa del termine lineare in Q_τ). Quindi avremo un Q minimo dato da

$$Q^2 + 2mvQ + m^2v^2 - \frac{2mk}{b} = 0$$

ossia

$$Q = -mv + \sqrt{\frac{2mk}{b}} = \sqrt{\frac{2mk}{b}}\left(1 - \sqrt{\frac{a}{a+b}}\right)$$