PROBLEMA 5.10

Asta incernierata ⋆⋆

Un'asta rettilinea è incernierata nel suo estremo inferiore ad un asse verticale, rispetto al quale forma un angolo fisso $\alpha < \pi/2$. L'asta ruota attorno all'asse con velocità angolare costante ω. Sull'asta è infilato un anello di massa m che può scorrere lungo essa. Il coefficiente di attrito statico è μ_s. Determinare le posizioni di equilibrio dell'anello.

Soluzione

La posizione dell'anello si può scrivere

$$\vec{R} = \ell\hat{\tau}(t)$$

dove $\hat{\tau}$ è un versore parallelo alla guida

$$\hat{\tau}(t) = \cos\alpha\hat{e}_z + \sin\alpha\hat{e}_\rho(t)$$

e ℓ è la distanza dell'anello dalla cerniera (costante all'equilibrio). Sappiamo che $\hat{e}_\rho$ ruota con velocità angolare costante attorno all'asse. Calcoliamo velocità

$$\vec{v} = \ell\omega\sin\alpha\hat{e}_\varphi$$

e accelerazione

$$\vec{a} = -\ell\omega^2\sin\alpha\hat{e}_\rho\,.$$

Le forze sono quella di gravità, $F_g = -mg\hat{e}_z$, la reazione vincolare $\vec{N}$, perpendicolare all'asta:

$$\vec{N} = N\hat{n}, \quad \hat{n} = \sin\alpha\hat{e}_z - \cos\alpha\hat{e}_\rho$$

e l'attrito statico $\vec{F}_A$, parallelo ad essa

$$\vec{F}_A = F_A\hat{\tau}$$

Avremo quindi

$$-m\ell\omega^2\sin\alpha\hat{e}_\rho = -mg\hat{e}_z + \vec{N} + \vec{F}_A$$

e proiettando nella direzione dell'asta otteniamo

$$-m\ell\omega^2\sin\alpha\hat{e}_\rho\cdot\hat{\tau} = -mg\hat{e}_z\cdot\hat{\tau} + F_A$$

cioè

$$-m\ell\omega^2\sin^2\alpha = -mg\cos\alpha + F_A$$

Proiettando perpendicolarmente all'asta abbiamo invece

$$-m\ell\omega^2\sin\alpha\hat{e}_\rho\cdot\hat{n} = -mg\hat{e}_z\cdot\hat{n} + N$$

cioè

$$m\ell\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha = -mg\sin\alpha + N$$

Sappiamo inoltre che

$$|F_A| \le \mu_s \left|\vec{N}\right|$$

da cui

$$\left|\cos\alpha - \frac{\ell\omega^2}{g}\sin^2\alpha\right| \le \mu_s \left|\sin\alpha + \frac{\ell\omega^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha\right|$$

L'argomento del valore assoluto a destra è sempre positivo nell'intervallo considerato. Distinguiamo i due casi. Nel primo

$$\begin{aligned}
\frac{\ell\omega^2}{g} &\le \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \\
\frac{\ell\omega^2}{g} &\ge \frac{\cos\alpha - \mu_s\sin\alpha}{\mu_s\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha}
\end{aligned}$$

che ha per soluzione (notare che il limite inferiore diviene negativo se $\mu_s > \cot\alpha$)

$$\frac{\cos\alpha - \mu_s\sin\alpha}{\mu_s\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha} \le \frac{\ell\omega^2}{g} \le \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \tag{5.10.1}$$

Nel secondo

$$\begin{aligned}
\frac{\ell\omega^2}{g} &\ge \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \\
\frac{\ell\omega^2}{g}\left(\sin^2\alpha - \mu_s\sin\alpha\cos\alpha\right) &\le \cos\alpha + \mu_s\sin\alpha
\end{aligned}$$

che ha per soluzione, nel caso $\mu_s < \tan\alpha$,

$$\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \le \frac{\ell\omega^2}{g} \le \frac{\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha}{\sin^2\alpha - \mu_s\sin\alpha\cos\alpha} \tag{5.10.2}$$

e

$$\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \le \frac{\ell\omega^2}{g} \tag{5.10.3}$$

per $\mu_s \ge \tan\alpha$.

Riassumendo, in assenza di attrito abbiamo un'unica posizione di equilibrio

$$\ell = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}$$

per $0 < \mu_s < \tan\alpha$ abbiamo l'intervallo

$$\frac{g}{\omega^2}\frac{\cos\alpha - \mu_s\sin\alpha}{\mu_s\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha} \le \ell \le \frac{g}{\omega^2}\frac{\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha}{\sin^2\alpha - \mu_s\sin\alpha\cos\alpha} \tag{5.10.4}$$

e per $\mu_s \ge \tan\alpha$ tutte le posizioni di equilibrio sono possibili.