PROBLEMA 5.110

Formica su un giradischi ⋆⋆

Una formica di massa m si trova sul bordo di un giradischi di raggio R, che ruota con velocità angolare ω. La formica vuole raggiungere il centro, ed è capace di spostarsi con una velocità radiale di modulo costante $v_0 > \omega R$ rispetto al giradischi.

1. Supponendo che la formica punti sempre il centro del giradischi, determinare l'equazione della sua traiettoria, in un opportuno sistema di coordinate, e rappresentarla graficamente.

2. Sempre nell'ipotesi precedente, determinare la forza risultante agente sulla formica in funzione della sua distanza dal centro.

3. Se invece la formica volesse percorrere una traiettoria rettilinea, quanto tempo impiegherebbe a raggiungere il centro?

Soluzione[6]

Domanda 1

Conviene descrivere il moto in un sistema di coordinate polari. La formica avrà una velocità radiale uguale a $-v_0\hat{e}_r$ e una velocità tangenziale (dovuta al trascinamento del disco) uguale a $r\omega\hat{e}_\theta$. D'altra parte l'espressione generale della velocità in coordinate polari è

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \tag{5.110.1}$$

e quindi

$$\dot{r} = -v_0 \tag{5.110.2}$$

$$\dot{\theta} = \omega\,. \tag{5.110.3}$$

Possiamo integrare direttamente queste equazioni, e imponendo le condizioni iniziali abbiamo

$$r = R - v_0 t \tag{5.110.4}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega t \tag{5.110.5}$$

da cui

$$r = R - \frac{v_0}{\omega}(\theta - \theta_0)\,. \tag{5.110.6}$$

La traiettoria è la combinazione di un moto uniforme in direzione radiale e di una rotazione uniforme, cioè una spirale di passo costante. In realtà l'angolo percorso prima di raggiungere il centro è dato da

$$(\theta - \theta_0) = \frac{\omega R}{v_0} < 1 \tag{5.110.7}$$

[6]Secondo esercizio scritto 12/11/2008

CC BY NC SA

ed è quindi sempre inferiore ad un radiante. La traiettoria è rappresentata in Figura 5.94 per diversi valori di $\omega R/v_0$.

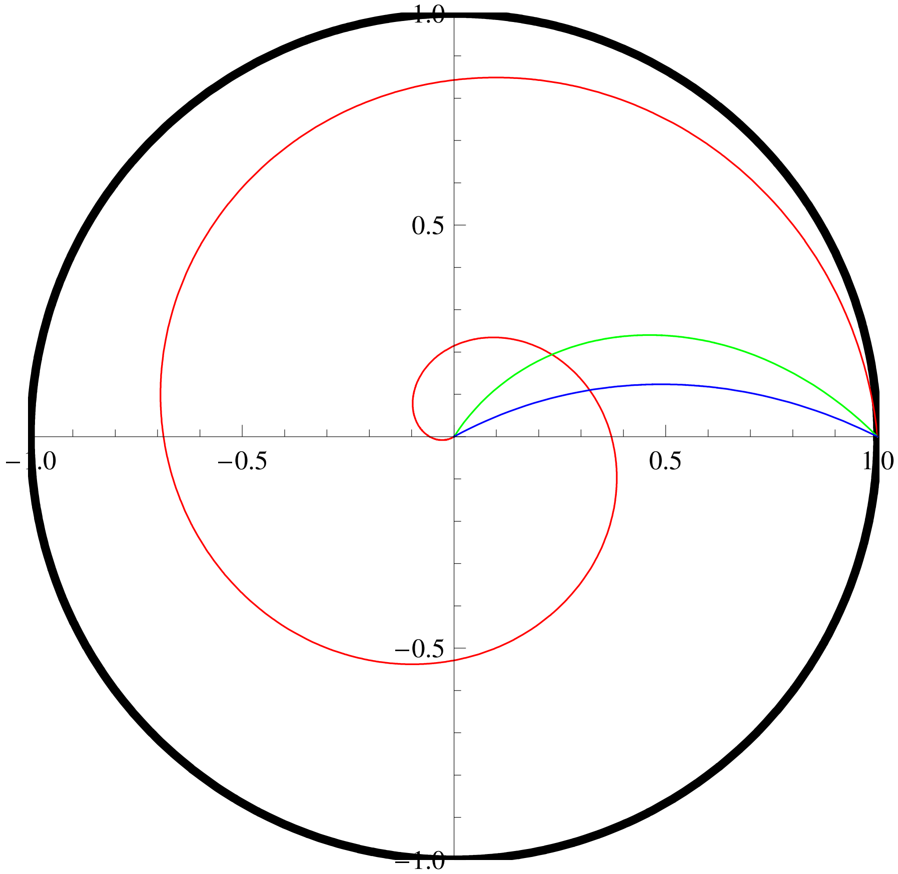

Figura 5.94.: Alcune possibili traiettorie sul disco, corrispondenti a $\omega R/v_0 = 1/2$ (blu) e $\omega R/v_0 = 1$ (verde). Per confronto è riportata anche una traiettoria corrispondente a $\omega R/v_0 = 10$ (in rosso).

Domanda 2

L'espressione generale per l'accelerazione in coordinate polari è data da

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta \tag{5.110.8}$$

ma nel nostro caso $\ddot{r} = 0$, $\dot{\theta} = \omega$, $\ddot{\theta} = 0$ e $\dot{r} = -v_0$. Otteniamo infine

$$\vec{F} = m\vec{a} = -rm\omega^2\hat{e}_r - 2v_0\omega\hat{e}_\theta \tag{5.110.9}$$

Domanda 3

Per muoversi radialmente la formica deve dirigere parte della sua velocità nella direzione tangenziale, in modo da annullare il trascinamento del disco. Detto α l'angolo tra la direzione della formica e il raggio avremo

$$v_0 \sin\alpha = -\omega r \tag{5.110.10}$$
$$v_0 \cos\alpha = -\dot{r}\,. \tag{5.110.11}$$

Dalla prima equazione segue

$$\sin\alpha = -\frac{\omega r}{v_0} \tag{5.110.12}$$

(notare che α dipende da r e che $\omega r/v_0 < 1$, quindi è sempre possibile soddisfare questa equazione. Sostituendo nella seconda otteniamo

$$v_0\sqrt{1-\left(\frac{\omega r}{v_0}\right)^2} = -\frac{dr}{dt} \tag{5.110.13}$$

(abbiamo usato $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$) da cui

$$1 = -\frac{1}{v_0\sqrt{1-\left(\frac{\omega r}{v_0}\right)^2}}\frac{dr}{dt}\,. \tag{5.110.14}$$

Integriamo adesso membro a membro rispetto al tempo,

$$\int_0^T dt = -\int_0^T \frac{1}{v_0\sqrt{1-\left(\frac{\omega r}{v_0}\right)^2}}\frac{dr}{dt}dt \tag{5.110.15}$$

e cambiando variabile nel secondo integrale otteniamo

$$\int_0^T dt = -\int_{r(0)}^{r(T)} \frac{dr}{v_0\sqrt{1-\left(\frac{\omega r}{v_0}\right)^2}} \tag{5.110.16}$$

cioè

$$T = \int_0^R \frac{dr}{v_0\sqrt{1-\left(\frac{\omega r}{v_0}\right)^2}} = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{\omega R}{v_0}\right)\,. \tag{5.110.17}$$

CC BY NC SA