PROBLEMA 5.111

Urto con una massa vincolata elasticamente ⋆⋆

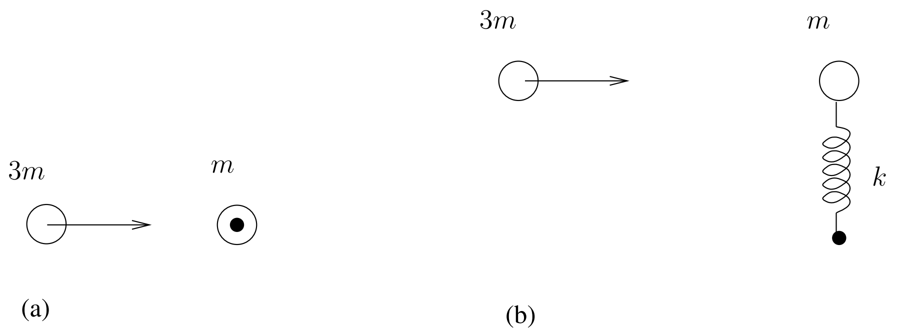

Figura 5.95.: I due urti considerati nell'esercizio.

Un proiettile urta come in Figura 5.95-(a) un bersaglio tenuto da una molla di lunghezza nulla e costante elastica k. Il proiettile ha massa tripla del bersaglio, l'urto ha una durata trascurabile ed è elastico.

1. Si calcoli la velocità di bersaglio e proiettile appena dopo l'urto.

2. Si calcoli la massima elongazione della molla.

3. Ora il bersaglio è tenuto fermo a distanza ℓ dalla posizione di equilibrio al momento dell'urto, in maniera che la molla sia perpendicolare alla velocità del proiettile come in Figura 5.95-(b). Si calcoli il momento angolare del bersaglio (sempre dopo l'urto) e quindi la massima elongazione della molla.

Soluzione[7]

Domanda 1

Durante l'urto, che avviene in un tempo molto breve, la molla rimane di lunghezza nulla. Si può considerare quindi il bersaglio come una massa libera, e varrà la conservazione dell'energia

$$\frac{3}{2}mv_0^2 = \frac{3}{2}mv_p^2 + \frac{1}{2}mv_b^2 \tag{5.111.1}$$

e della quantità di moto

$$3mv_0 = 3mv_p + mv_b \tag{5.111.2}$$

[7] Primo problema scritto 19/12/2008.

dove abbiamo indicato con v_p e v_b le velocità finali di proiettile e bersaglio. Risolvendo il sistema si ottiene la soluzione

$$v_p = v_0 \tag{5.111.3}$$
$$v_b = 0 \tag{5.111.4}$$

che chiaramente è da scartare (le particelle non cambiano velocità) e

$$v_p = \frac{3m - m}{3m + m} v_0 = \frac{1}{2} v_0 \tag{5.111.5}$$
$$v_b = \frac{6m}{3m + m} v_0 = \frac{3}{2} v_0 \tag{5.111.6}$$

che è quella cercata.

Domanda 2

Dopo l'urto l'energia totale E_b della sistema costituito dal bersaglio e dalla molla si conserva. Eguagliando l'espressione di E_b immediatamente dopo l'urto (solo energia cinetica, dato che la molla non è allungata) a quella nel momento di massimo allungamento (solo energia potenziale della molla, dato che la massa è ferma) si ottiene

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{3}{2} v_0 \right)^2 = \frac{1}{2} k \delta_{MAX}^2 \tag{5.111.7}$$

e risolvendo

$$\delta_{MAX} = \frac{3}{2} v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{5.111.8}$$

Notare che si conserva anche il momento angolare del sistema considerato, valutato rispetto all'estremo fisso della molla. Questo perchè la forza di richiamo della molla è centrale. Ma questa legge di conservazione non da alcuna informazione utile ($L_b = 0$ banalmente perchè il moto è radiale).

Domanda 3

Anche in questo caso dopo l'urto si conserva sia l'energia totale E_b che il momento angolare totale L_b del sistema costituito dal bersaglio e dalla molla. A differenza del caso precedente entrambe le leggi di conservazione danno informazioni utili. Osservando che la velocità iniziale del bersaglio $v_b = 3v_0/2$ è la stessa dei casi precedenti abbiamo per l'energia

$$\frac{1}{2} m v_b^2 + \frac{k}{2} \ell^2 = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{k}{2} r^2 \tag{5.111.9}$$

e per il momento angolare

$$- m v_b \ell = m r^2 \dot{\theta} \tag{5.111.10}$$

dove abbiamo espresso la posizione del bersaglio in coordinate polari. Ricavando dalla relazione (5.111.10)

$$\dot{\theta} = -\frac{v_b \ell}{r^2} \tag{5.111.11}$$

e sostituendo nella (5.111.9) otteniamo

$$m v_b^2 + k\ell^2 = m\left(\dot{r}^2 + \frac{v_b^2 \ell^2}{r^2}\right) + kr^2 \tag{5.111.12}$$

Tenendo conto che nell'istante di massimo e minimo allungamento $\dot{r} = 0$ possiamo riscrivere questa relazione nella forma

$$\left(\frac{m v_b^2}{r^2} - k\right)\left(r^2 - \ell^2\right) = 0 \tag{5.111.13}$$

che ci fornisce le due possibili soluzioni

$$r = \ell$$

e

$$r = v_b \sqrt{\frac{m}{k}}\,. \tag{5.111.14}$$

Il massimo allungamento sarà il maggiore tra questi due valori.

Si sarebbe potuto arrivare a questo risultato anche ricordando che il moto di una massa vincolata nel piano e da una molla si riduce alla composizione di due oscillazioni armoniche. Abbiamo quindi

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{5.111.15}$$

$$y = C\cos\omega t + D\sin\omega t \tag{5.111.16}$$

con $\omega = \sqrt{k/m}$. Imponendo le condizioni iniziali

$$x = \frac{v_b}{\omega}\sin\omega t \tag{5.111.17}$$

$$y = \ell\cos\omega t \tag{5.111.18}$$

che corrisponde a un'ellisse di semiassi ℓ e v_b/ω. Il semiasse maggiore corrisponde all'allungamento massimo, e otteniamo nuovamente il risultato precedente.