PROBLEMA 5.113

Caduta di una struttura ★★

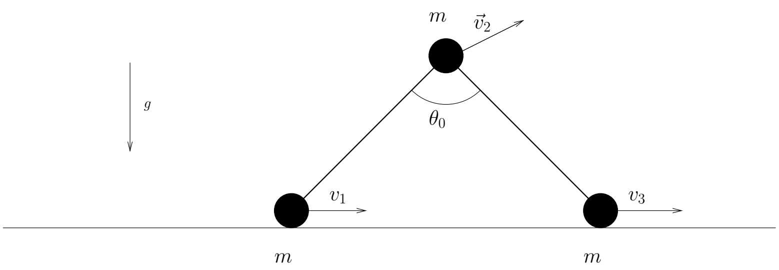

Figura 5.97.: La struttura in caduta.

Tre masse identiche sono collegate da due aste di lunghezza ℓ e massa trascurabile come in Figura 5.97. Le masse agli estremi sono vincolate a scorrere su un piano orizzontale, mentre l'angolo tra le due aste può variare liberamente, e vale inizialmente θ_0.

1. Se $v_1(0) = V$ e $v_3(0) = 0$ determinare la velocità iniziale della massa intermedia $\vec{v}_2(0)$.
2. Nel caso $v_1(0) = v_3(0) = 0$ determinare la velocità $\vec{v}_2$ quando la massa intermedia urta il piano.
3. Se $v_3(0) = 0$, determinare il minimo valore di $v_1(0)$ che permette alle masse agli estremi di toccarsi.

Soluzione[9]

Domanda 1

Posto un sistema di coordinate cartesiane con origine nella posizione della terza massa abbiamo

$$x_2 = -\ell \sin \frac{\theta}{2} \tag{5.113.1}$$

$$y_2 = \ell \cos \frac{\theta}{2} \tag{5.113.2}$$

per le coordinate della massa intermedia e

$$x_1 = -2\ell \sin \frac{\theta}{2} \tag{5.113.3}$$

[9]Problema compitino 19/12/2008

per quella della prima massa. Derivando rispetto al tempo quest'ultima relazione otteniamo, all'istante iniziale,

$$v_1(0) = -\ell\dot{\theta}\cos\frac{\theta_0}{2} = V \tag{5.113.4}$$

e quindi

$$\dot{\theta} = -\frac{V}{\ell\cos\frac{\theta_0}{2}} \tag{5.113.5}$$

Derivando x_2 e y_2 otteniamo le due componenti della velocità $\vec{v}_2$:

$$\dot{x}_2 = v_{2x} = -\frac{\ell}{2}\dot{\theta}\cos\frac{\theta}{2} \tag{5.113.6}$$

$$\dot{y}_2 = v_{2y} = -\frac{\ell}{2}\dot{\theta}\sin\frac{\theta}{2} \tag{5.113.7}$$

che valutate all'istante iniziale danno, utilizzando la (5.113.5),

$$v_{2x} = \frac{V}{2} \tag{5.113.8}$$

$$v_{2y} = \frac{V}{2}\tan\frac{\theta_0}{2}\,. \tag{5.113.9}$$

Domanda 2

Possiamo utilizzare due principi di conservazione, quello dell'energia totale e quello della quantità di moto orizzontale. Dalla seconda segue che il centro di massa del sistema non si muove orizzontalmente. Ma la posizione orizzontale del centro di massa coincide con quella della massa intermedia, che quindi si muoverà solo verticalmente. Ma allora possiamo scrivere, scegliendo un sistema di coordinate con origine nella proiezione del centro di massa sul piano orizzontale,

$$x_1 = -\ell\sin\frac{\theta}{2} \tag{5.113.10}$$

$$x_2 = 0 \tag{5.113.11}$$

$$x_3 = \ell\sin\frac{\theta}{2} \tag{5.113.12}$$

e anche

$$y_2 = \ell\cos\frac{\theta}{2}\,. \tag{5.113.13}$$

Scriviamo adesso l'energia totale conservata. Abbiamo

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{y}_2^2\right) + mgy_2\,. \tag{5.113.14}$$

All'istante iniziale le masse sono tutte ferme, ed abbiamo

$$E = mgy_2 = mg\ell\cos\frac{\theta_0}{2}\,. \tag{5.113.15}$$

Quando la massa intermedia tocca terra $\theta = \pi$. Quindi

$$\dot{x}_1 = -\frac{\ell}{2}\dot{\theta}\cos\frac{\pi}{2} = 0 \tag{5.113.16}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\cos\frac{\pi}{2} = 0 \tag{5.113.17}$$

ed otteniamo

$$E = \frac{m}{2}\dot{y}_2^2\,. \tag{5.113.18}$$

Eguagliando le due espressioni dell'energia otteniamo infine

$$\dot{y}_2 = -\sqrt{2g\ell\cos\frac{\theta_0}{2}} \tag{5.113.19}$$

che è la velocità cercata.

Domanda 3

Anche in questo caso possiamo usare la conservazione dell'energia e della quantità di moto orizzontale. Notare che con le condizioni al contorno specificate il centro di massa si muove anche in direzione orizzontale, ovviamente di moto rettilineo uniforme.

Inizialmente l'energia totale vale

$$E = \frac{1}{2}m\left(v_1^2(0) + v_{2x}^2(0) + v_{2y}^2(0)\right) + mgy_2 \tag{5.113.20}$$

che si può scrivere, utilizzando quanto visto rispondendo alla prima domanda,

$$E = \frac{1}{2}m\left(V_i^2 + \frac{1}{4}V_i^2 + \frac{1}{4}V_i^2\tan^2\frac{\theta_0}{2}\right) + mg\ell\cos\frac{\theta_0}{2}\,. \tag{5.113.21}$$

Gli estremi si toccheranno se $\theta = 0$. In questo caso avremo

$$E = \frac{1}{2}m\left(3V_f^2\right) + mg\ell \tag{5.113.22}$$

dove si è usato il fatto che nel caso limite le tre masse si muoveranno solo orizzontalmente con la stessa velocità V_f.

La conservazione della quantità di moto orizzontale ci da

$$m\left(V_i + \frac{1}{2}V_i\right) = 3mV_f \tag{5.113.23}$$

e quindi

$$\frac{1}{2}mV_i^2\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\tan^2\frac{\theta_0}{2}\right) + mg\ell\cos\frac{\theta_0}{2} = \frac{1}{2}m\left(3V_f^2\right) + mg\ell \tag{5.113.24}$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{4}V_i^2\right) + mg\ell \tag{5.113.25}$$

da cui ricaviamo la velocità iniziale cercata

$$V_i = \sqrt{\frac{8g\ell\left(1-\cos\frac{\theta_0}{2}\right)}{\left(2+\tan^2\frac{\theta_0}{2}\right)}}\,. \tag{5.113.26}$$