PROBLEMA 5.114

Un pendolo su un blocco mobile ⋆⋆

Un pendolo di lunghezza ℓ e massa m è montato su un blocco di massa M poggiato su un piano orizzontale. Tra blocco e piano è presente solo attrito statico μ_s ($\mu_d = 0$). Il blocco e il pendolo sono inizialmente in moto con velocità v_0, col pendolo nella sua posizione di equilibrio, e urtano frontalmente un secondo blocco in modo elastico. In seguito all'urto il primo blocco si arresta.

1. Determinare la massa del secondo blocco.
2. Supponendo μ_s abbastanza grande da impedire strisciamenti, determinare il valore minimo di v_0 affinchè il pendolo percorra un giro completo (il vincolo del filo si intende monolatero).
3. Per $v_0 = \sqrt{5g\ell}$ determinare il minimo valore di μ_s affinchè il blocco resti in quiete. Volendo è possibile considerare solo il caso $M \gg m$, dando il risultato al primo ordine in m/M.

Soluzione[10]

Domanda 1

Durante l'urto le uniche forze impulsive sono quelle che agiscono orizzontalmente tra i due blocchi. Possiamo quindi trascurare la presenza del pendolo, e la massa del secondo blocco è quindi uguale a quella del primo, perchè solo in questo caso quest'ultimo si ferma.

Domanda 2

La velocità del pendolo sarà inizialmente v_0. Nel punto più alto essa diverrà

$$v^2 = v_0^2 - 4g\ell \tag{5.114.1}$$

e la tensione del filo sarà determinata da

$$m\frac{v^2}{\ell} = T + mg \tag{5.114.2}$$

da cui

$$T = m\left(\frac{v_0^2}{\ell} - 4g\right) - mg = m\left(\frac{v_0^2}{\ell} - 5g\right) \geq 0 \tag{5.114.3}$$

cioè

$$v_0 \geq \sqrt{5g\ell} \tag{5.114.4}$$

[10]Secondo problema scritto 11/9/2008

Domanda 3

Per una inclinazione qualsiasi la tensione sarà determinata da

$$v^2 = 5g\ell - 2g\ell\,(1-\cos\theta) \tag{5.114.5}$$

e

$$m\frac{v^2}{\ell} = T - mg\cos\theta \tag{5.114.6}$$

e risolvendo si trova

$$T = 3mg\,(1+\cos\theta)\ . \tag{5.114.7}$$

Imponendo l'equilibrio del carrello abbiamo

$$F_a + T\sin\theta = 0 \tag{5.114.8}$$

$$N - T\cos\theta - Mg = 0 \tag{5.114.9}$$

da cui

$$F_a = -3mg\,(1+\cos\theta)\sin\theta \tag{5.114.10}$$

$$N = 3mg\cos\theta(1+\cos\theta) + Mg \tag{5.114.11}$$

ma dato che $|F_a| \le \mu_s N$ avremo

$$\frac{(1+\cos\theta)\sin\theta}{(1+\cos\theta)\cos\theta + \frac{M}{3m}} \le \mu_s \tag{5.114.12}$$

(supponendo che sia sempre $N > 0$). Dobbiamo massimizzare rispetto a θ il primo membro. I punti stazionari corrispondono alle soluzioni di

$$\left(1+\frac{2M}{3m}\right)\cos^2\theta + \left(2+\frac{M}{3m}\right)\cos\theta + \left(1-\frac{M}{3m}\right) = 0 \tag{5.114.13}$$

che ha per soluzioni

$$\cos\theta = -1 \tag{5.114.14}$$

e

$$\cos\theta = \frac{1-\frac{3m}{M}}{2+\frac{3m}{M}} \tag{5.114.15}$$

e quest'ultimo valore corrsponde al minimo. Per $m/M \ll 1$

$$\cos\theta \simeq \frac{1}{2} \tag{5.114.16}$$

$$\mu_s \ge \frac{9m}{4M}\sqrt{3} \tag{5.114.17}$$