PROBLEMA 5.115

Urto con un cuneo mobile ★★

Nel sistema in Figura 5.98 il piano inclinato è libero di scorrere sul piano orizzontale, ed è inizialmente fermo. La particella ha velocità iniziale v_0, e all'istante $t = 0$ arriva al piano inclinato. Particella e piano inclinato hanno la stessa massa m e $\theta = \pi/4$. Si supponga che la giunzione tra piano obliquo e piano inclinato sia stata resa sufficientemente regolare, e che non vi sia alcun genere di attrito.

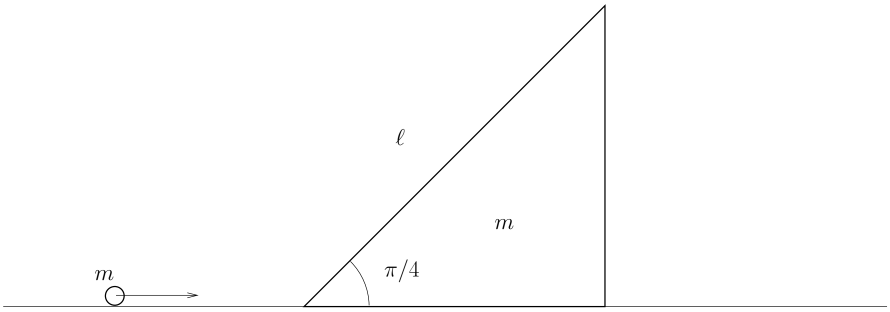

Figura 5.98.: Il cuneo e la particella prima dell'urto.

1. La particella, considerata un punto materiale, è vincolata a rimanere aderente al piano obliquo. Per quale valore minimo della velocità $v_{0,min}$ essa riesce a superare il blocco?

2. Se $v_0 < v_{0,min}$ calcolare le velocità finali del piano inclinato e della particella.

3. Calcolare la velocità del blocco immediatamente dopo l'istante $t = 0$.

Soluzione[11]

Domanda 1

Usiamo la conservazione dell'energia e della quantità di moto orizzontale. L'energia totale del sistema si può scrivere nella forma

$$E = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) + mgy = \frac{1}{2}mv_{0,min}^2 \tag{5.115.1}$$

e la quantità di moto orizzontale

$$P_x = mV + mv_x = mv_{0,min}\,. \tag{5.115.2}$$

[11]Primo esercizio scritto 31/1/2007

Nel caso limite la particella arriva nel punto più alto del piano inclinato, con velocità nulla rispetto ad esso ($v_x = V$, $v_y = 0$). Allora possiamo scrivere

$$mV^2 + mg\frac{\sqrt{2}}{2}\ell = \frac{1}{2}mv_{0,min}^2$$

e

$$V = \frac{1}{2}v_{0,min}\,. \tag{5.115.3}$$

da cui

$$v_{0,min} = \sqrt{2\sqrt{2}g\ell}\,. \tag{5.115.4}$$

Domanda 2

Dato che siamo interessati alle sole velocità finali, possiamo trattare il problema come un urto completamente elastico. In dettaglio, le equazioni per la conservazione di energia e quantità di moto orizzontale si possono scrivere

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}mv^2 \tag{5.115.5}$$

$$mv_0 = mv + mV \tag{5.115.6}$$

Risolvendo il sistema si trova che particella e piano inclinato si scambiano le velocità, cioè

$$v = 0 \tag{5.115.7}$$

$$V = v_0 \tag{5.115.8}$$

Domanda 3

Abbiamo nuovamente conservazione di energia e di quantità di moto orizzontale. Inoltre l'energia potenziale non varia, quindi

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) \tag{5.115.9}$$

$$mv_0 = mV + mv_x \tag{5.115.10}$$

Abbiamo infine un vincolo da imporre, cioè il fatto che per $t > 0$ la velocità relativa della particella rispetto al piano è inclinata di $\pi/4$ rispetto all'orizzontale. Questo significa

$$v_x - V = v_y \tag{5.115.11}$$

Usando le ultime due relazioni per esprimere la conservazione dell'energia in funzione di V abbiamo

$$v_0^2 = V^2 + (v_0 - V)^2 + (v_0 - 2V)^2 \tag{5.115.12}$$

che da

$$V = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right) v_0 \,. \tag{5.115.13}$$

La soluzione accettabile è quella con il segno negativo, la sola che corrisponda ad una velocità verticale positiva della particella:

$$v_y = v_0 - 2V = \frac{1}{\sqrt{3}} v_0 \tag{5.115.14}$$