PROBLEMA 5.116

Doppia cerniera mobile ⋆⋆

Nel sistema in Figura 5.99 la massa m_1, libera di muoversi verticalmente, e la massa m_2, libera di muoversi orizzontalmente, sono collegate da un filo inestensibile di lunghezza ℓ privo di massa. Inizialmente il sistema è fermo nella configurazione in figura con il filo inclinato di un angolo $\theta = \theta_0$ rispetto alla verticale. Si consiglia di utilizzare questo parametro per descrivere il sistema.

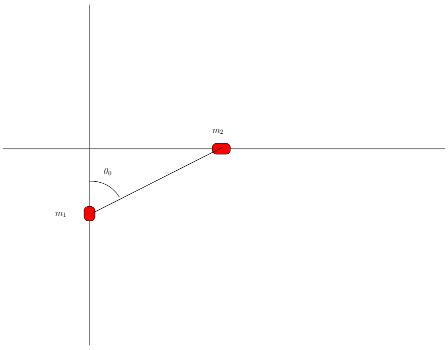

Figura 5.99.: Il sistema considerato nell'esercizio.

1. Supponendo la presenza di attrito tra la particella m_2 e il vincolo orizzontale, determinare per quale valore minimo del coefficiente di attrito statico μ_s il sistema è in equilibrio.

2. In assenza di attrito si lascia adesso il sistema libero di muoversi. Calcolare la velocità della massa m_2 quando $\theta = 0$ (filo verticale).

3. Determinare la tensione del filo in funzione dell'angolo θ durante l'evoluzione da $\theta = \theta_0$ a $\theta = 0$, sempre in assenza di attrito.

Soluzione[12]

Domanda 1

Facendo riferimento al diagramma delle forze in Figura 5.100, all'equilibrio deve essere

$$N_1 = m_2 g + T\cos\theta_0 \tag{5.116.1}$$

$$F_A = T\sin\theta_0 \tag{5.116.2}$$

e d'altra parte $|F_A| \leq \mu_s N_1$ da cui

$$\mu_s (m_1 + m_2)\, g \geq m_1 g \tan\theta_0 \tag{5.116.3}$$

[12] Secondo esercizio scritto 31/1/2007

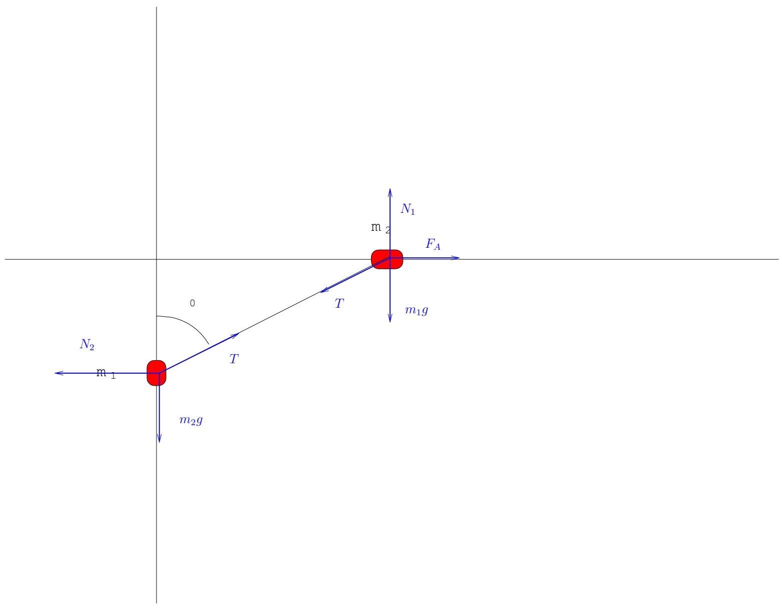

Figura 5.100.: Diagramma delle forze. Sono rappresentate le forze applicate alle due masse.

cioè

$$\mu_s \geq \frac{m_1}{m_1 + m_2} \tan \theta_0 \tag{5.116.4}$$

Domanda 2

In assenza di attrito vale la conservazione dell'energia totale. Inoltre nella configurazione finale la massa m_1 è ferma. Possiamo quindi scrivere

$$- m_1 g \ell \cos \theta_0 = -m_1 g \ell + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \tag{5.116.5}$$

da cui

$$v_2 = -\sqrt{2 \frac{m_1}{m_2} g \ell \left(1 - \cos \theta_0\right)}\,. \tag{5.116.6}$$

Domanda 3

Scriviamo ancora una volta la conservazione dell'energia confrontando la configurazione iniziale con quella ad un generico angolo θ. Otteniamo

$$- m_1 g \ell \cos \theta_0 = -m_1 g \ell \cos \theta + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2\,. \tag{5.116.7}$$

In funzione della coordinata scelta le velocità si scrivono

$$v_1 = \frac{d}{dt}\ell\cos\theta = -\ell\dot{\theta}\sin\theta \tag{5.116.8}$$

$$v_2 = \frac{d}{dt}\ell\sin\theta = \ell\dot{\theta}\cos\theta \tag{5.116.9}$$

$$\tag{5.116.10}$$

da cui

$$\frac{1}{2}\left[m_1\sin^2\theta + m_2\cos^2\theta\right]\ell^2\dot{\theta}^2 = m_1 g\ell\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right) . \tag{5.116.11}$$

D'altra parte deve essere

$$m_2\frac{dv_2}{dt} = -T\sin\theta \tag{5.116.12}$$

$$m_1\frac{dv_1}{dt} = -m_1 g + T\cos\theta \tag{5.116.13}$$

cioè

$$m_2\left(\ell\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\sin\theta\right) = -T\sin\theta \tag{5.116.14}$$

$$m_1\left(-\ell\ddot{\theta}\sin\theta - \ell\dot{\theta}^2\cos\theta\right) = -m_1 g + T\cos\theta \tag{5.116.15}$$

er semplificare i calcoli possiamo prendere una combinazione delle equazioni precedenti che cancella i termini in $\ddot{\theta}$, cioè la somma di $m_1\sin\theta$ volte la prima e di $m_2\cos\theta$ volte la seconda:

$$-m_1 m_2\ell\dot{\theta}^2 = -T\left(m_1\sin^2\theta - m_2\cos^2\theta\right) - m_1 m_2 g\cos\theta \tag{5.116.16}$$

da cui

$$T = \frac{m_1 m_2\ell\dot{\theta}^2 - m_1 m_2 g\cos\theta}{m_1\sin^2\theta - m_2\cos^2\theta} \tag{5.116.17}$$

e ricavando $\dot{\theta}^2$ dalla conservazione dell'energia otteniamo la risposta finale:

$$T = m_1 m_2 g\frac{m_1\cos\theta - 2m_1\cos\theta_0 + (m_1 - m_2)\cos^3\theta}{\left(m_1\sin^2\theta - m_2\cos^2\theta\right)\left(m_1\sin^2\theta + m_2\cos^2\theta\right)} . \tag{5.116.18}$$