PROBLEMA 5.117

Massa su guida circolare e molla ★★

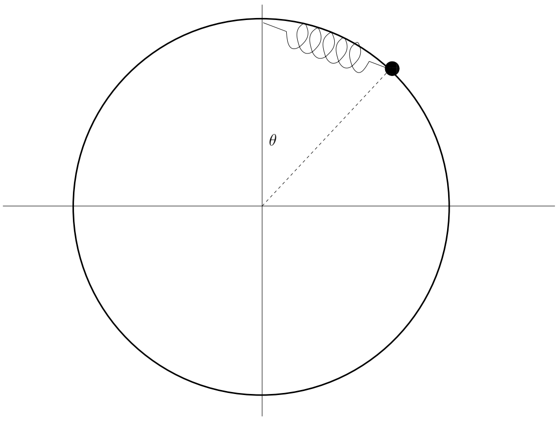

Figura 5.101.: Il punto materiale vincolato alla guida circolare.

Un punto materiale di massa m è vincolato ad una guida liscia circolare di raggio r disposta in un piano verticale. Tra il punto materiale e il punto più alto della guida è inoltre fissata una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k.

1. Discutere, in funzione di k, le posizioni di equilibrio per il sistema e la loro stabilità.
2. Supponendo $kr < mg$ e che inizialmente il punto materiale si trovi nel punto più basso della guida determinare per quale velocità iniziale esso può percorrere un giro completo.
3. Discutere il moto del punto materiale nel caso $kr = mg$.

Soluzione[13]

Domanda 1

Scriviamo l'energia potenziale in funzione dell'angolo θ in Figura 5.101. Abbiamo

$$\begin{aligned} U &= mgh + \frac{1}{2}k\ell^2 = mgr\cos\theta + 2kr^2\sin^2\frac{\theta}{2} \\ &= mgr\cos\theta + kr^2\left(1-\cos\theta\right) \end{aligned}$$

dove è stata indicata con $h = r\cos\theta$ l'altezza della particella relativa al centro della guida e con $\ell = 2r\sin\theta/2$ la lunghezza della molla. Dall'ultima espressione segue che gli estremi del potenziale sono in $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \pi$. In particolare se $mg < kr$ si ha equilibrio stabile in θ_1 e instabile in θ_2, viceversa se $mg > kr$. Il caso $mg = kr$ è

[13] Secondo esercizio 10/9/2007

particolare: l'energia potenziale non dipende da θ e qualsiasi posizione è di equilibrio indifferente.

Domanda 2

Nel caso considerato la posizione iniziale è di equilibrio stabile. Imponendo la conservazione dell'energia totale troviamo che l'energia cinetica iniziale deve essere almeno uguale alla massima variazione di energia potenziale:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 > 2(mgr - kr^2)$$

da cui

$$v_0 > 2\sqrt{gr - \frac{kr^2}{m}}\,.$$

Domanda 3

Nel caso considerato l'energia è, a meno di una costante, solo cinetica:

$$E = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$

da cui seguono le equazioni del moto:

$$\dot{E} = mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0 \to \ddot{\theta} = 0\,.$$

Il moto quindi è circolare uniforme:

$$\theta = \theta_0 + \omega t\,.$$