PROBLEMA 5.119

Carrucola su cuneo ⋆⋆

Un cuneo di massa M a forma di prisma triangolare di apertura angolare θ è libero di muoversi sul piano orizzontale su cui è appoggiato. Sul cuneo si trovano due masse m_1 e m_2 ($m_2 > m_1$), collegate tra loro da un filo inestensibile di massa nulla come mostrato in Figura 5.103. Il filo scorre senza attrito su un perno solidale al piano inclinato. Non vi è attrito tra le masse e il piano inclinato.

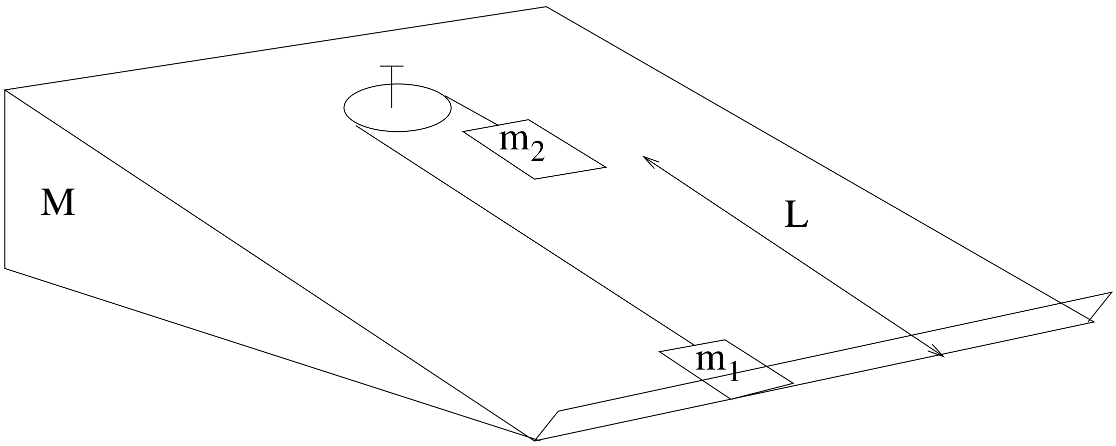

Figura 5.103.: La carrucola con le due massa appoggiate sul cuneo mobile.

1. Se il cuneo è mantenuto immobile, determinare il moto delle masse m_1 e m_2 (lasciate andare da ferme).
2. Se il cuneo è libero di muoversi senza attrito sul piano orizzontale, determinare il suo spostamento quando la massa m_2 raggiunge il bordo.
3. In presenza di attrito statico μ_s tra il cuneo e il piano orizzonale, determinare il valore minimo affinchè il cuneo resti immobile durante la discesa di m_2.

Soluzione[15]

Domanda 1

Consideriamo le forze che agiscono sulle due masse lungo la direzione parallela al piano. Per la prima abbiamo

$$m_1 a_1 = m_1 g \sin\theta - T$$

e per la seconda

$$m_2 a_2 = m_2 g \sin\theta - T\,.$$

[15] Seconda parte compitino 22/12/2006

Abbiamo preso come verso positivo per le accelerazioni di entrambe le masse quello verso lo spigolo del cuneo. Sottraendo membro a membro abbiamo

$$m_1 a_1 - m_2 a_2 = (m_1 - m_2) g \sin\theta$$

ma $a_2 = -a_1$ da cui

$$a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \sin\theta < 0 .$$

Le due masse quindi si muovono di moto uniformemente accelerato. Partendo da fermi e misurando lo spostamento a partire dalla posizione iniziale di ciascuna massa abbiamo

$$s_1 = \frac{1}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \sin\theta \, t^2$$
$$s_2 = \frac{1}{2} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \sin\theta \, t^2$$

Domanda 2

La quantità di moto orizzontale del sistema si conserva. Questo significa che la posizione orizzontale del centro di massa non cambia, dato che inizialmente è ferma. Possiamo dunque scrivere

$$\frac{MX_0 + m_1 x_1 + m_2 x_2}{M + m_1 + m_2} = \frac{M\left(X_0 + \Delta\right) + m_1\left(x_1 + \delta_1\right) + m_2\left(x_2 + \delta_2\right)}{M + m_1 + m_2}$$

dove X_0, x_1 e x_2 sono le coordinate orizzontali iniziali del centro di massa del cuneo e delle due masse, e Δ, δ_1, δ_2 i relativi spostamenti finali, il tutto nel sistema di riferimento del laboratorio. D'altra parte lo spostamento orizzontale finale della massa m_2 è noto

$$\delta_2 - \Delta = L\cos\theta$$

e per l'inestensibilità del filo deve essere

$$\delta_2 - \Delta = -\left(\delta_1 - \Delta\right) .$$

Ricavando δ_1, δ_2 da queste ultime due relazioni otteniamo

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \Delta + L\cos\theta \\ \delta_1 &= \Delta - L\cos\theta \end{aligned}$$

e sostituendo nella prima abbiamo

$$M\Delta + m_1\left(\Delta - L\cos\theta\right) + m_2\left(\Delta + L\cos\theta\right) = 0$$

da cui

$$\Delta = \frac{(m_1 - m_2) L\cos\theta}{M + m_1 + m_2} .$$

Domanda 3

Facciamo riferimento ai diagrammi delle forze agenti sul cuneo e sulle due masse riportati in Figura 5.104. Indichiamo con T la tensione del filo, con N_1 e N_2 le reazioni vincolari del piano obliquo, con R la reazione vincolare del piano orizzontale e con la forza di attrito.

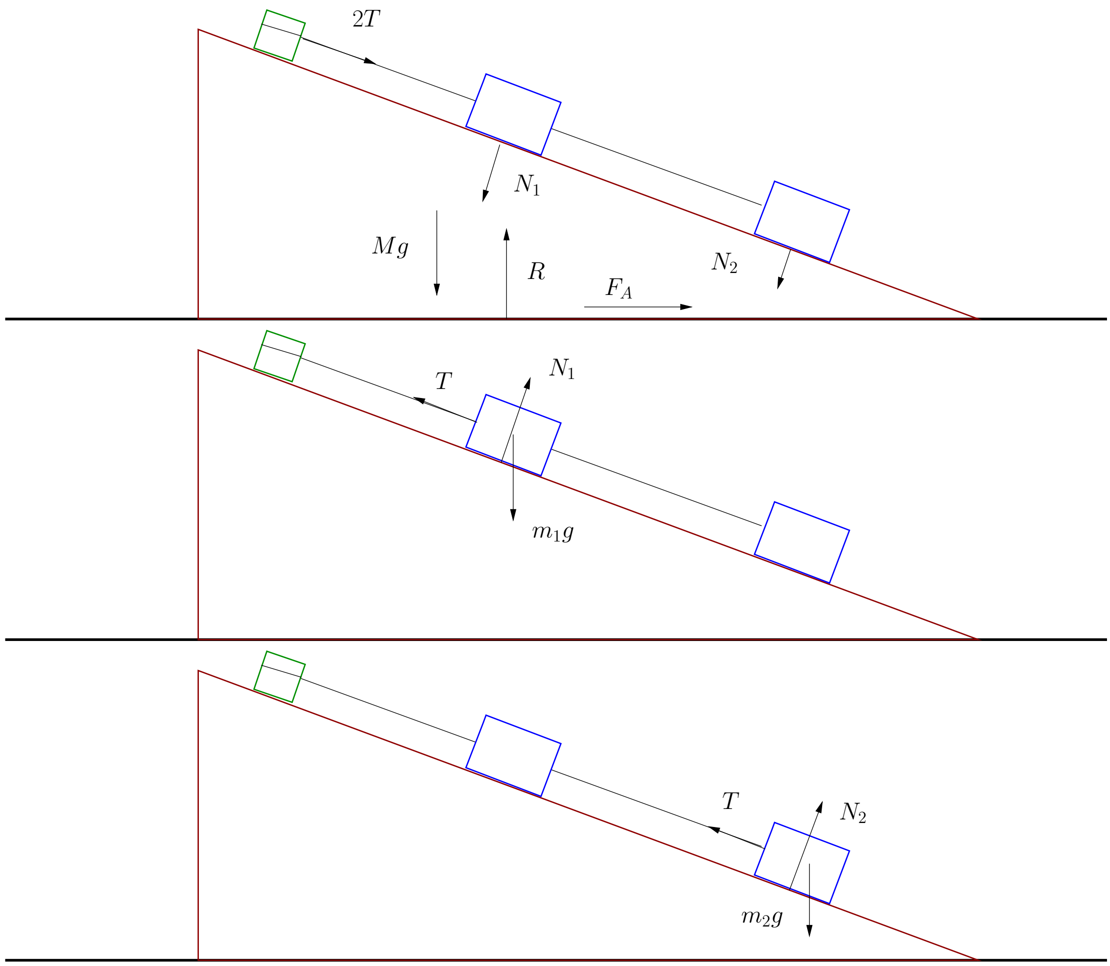

Figura 5.104.: Diagrammi delle forze.

Scriviamo le equazioni del moto per le masse e per il cuneo, nell'ipotesi che quest'ultimo resti fermo. Tenendo conto del fatto che

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -\ddot{y}_2 \\ \ddot{x}_1 &= -\ddot{x}_2 \,. \end{aligned}$$

possiamo scrivere

$$
\begin{aligned}
m_1 \ddot{x}_1 &= N_1 \sin\theta - T\cos\theta && (5.119.1)\\
m_1 \ddot{y}_1 &= N_1 \cos\theta + T\sin\theta - m_1 g && (5.119.2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-m_2 \ddot{x}_1 &= N_2 \sin\theta - T\cos\theta && (5.119.3)\\
-m_2 \ddot{y}_1 &= N_2 \cos\theta + T\sin\theta - m_2 g && (5.119.4)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
0 &= -\left(N_1 + N_2\right)\sin\theta + 2T\cos\theta + F_A && (5.119.5)\\
0 &= R - Mg - \left(N_1 + N_2\right)\cos\theta - 2T\sin\theta\,. && (5.119.6)
\end{aligned}
$$

Dato che

$$\frac{\ddot{y}_1}{\ddot{x}_1} = \frac{\ddot{y}_2}{\ddot{x}_2} = -\tan\theta$$

dividendo membro a membro le Equazioni (5.119.1) (5.119.2) e (5.119.3), (5.119.4) otteniamo

$$N_1 = m_1 g\cos\theta$$

$$N_2 = m_2 g\cos\theta$$

Dalle equazioni del moto per le masse abbiamo

$$\left(\frac{N_1}{m_1} + \frac{N_2}{m_2}\right)\sin\theta - T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\cos\theta = 0$$

$$\left(\frac{N_1}{m_1} + \frac{N_2}{m_2}\right)\cos\theta + T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\sin\theta = 2g$$

da cui ($\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$)

$$T = 2g\mu\sin\theta\,.$$

Sostituendo nella equazione (5.119.6) troviamo

$$R = Mg + (m_1 + m_2) g\cos^2\theta + 4g\mu\sin^2\theta$$

e tenendo conto che deve essere $|F_A| \le \mu_s R$ abbiamo infine

$$\left[(m_1 + m_2) - 4\mu\right]\left|\cos\theta\sin\theta\right| \le \mu_s\left[M + (m_1 + m_2)\cos^2\theta + 4\mu\sin^2\theta\right]$$

ossia

$$\mu_s \ge \frac{(m_1 - m_2)^2\cos\theta\sin\theta}{M(m_1 + m_2) + (m_1 + m_2)^2\cos^2\theta + 4m_1 m_2\sin^2\theta}\,.$$