PROBLEMA 5.11

Disco rotante ⋆⋆

Un disco di raggio r ruota in un piano orizzontale con velocità angolare costante ω. sul disco è praticata un scanalatura diametrale, in cui può scorrere senza attrito una pallina di massa m, legata al centro mediante una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k. Supponendo che sia $k > m\omega^2$ si determini il moto della pallina.

Inizialmente la pallina si trove ferma a distanza $r/2$ dal centro.

Soluzione

In un sistema inerziale il moto sarà la composizione del movimento lungo la scanalatura e dalla rotazione insieme al disco. Scrivendo la posizione della pallina in un sistema di coordinate polari abbiamo

$$\vec{R} = R\hat{e}_r$$

dove R è una funzione del tempo (da determinare), mentre sappiamo che $\hat{e}_r$ ruota con velocità angolare ω costante. Quindi abbiamo per la velocità

$$\vec{v} = \dot{R}\hat{e}_r + R\omega\hat{e}_\theta$$

e per la accelerazione

$$\vec{a} = \left(\ddot{R} - R\omega^2\right)\hat{e}_r + 2\dot{R}\omega\hat{e}_\theta$$

dove sono state usate le solite relazioni $\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta$ e $\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r$. Notare che non è necessario porre alcuna restrizione su R, che potrà assumere anche valori negativi.

Le due forze in gioco saranno quella di richiamo della molla, che potremo scrivere

$$\vec{F}_m = -kR\hat{e}_r$$

e la reazione vincolare $\hat{N}$ della guida, che sappiamo ortogonale alla stessa: $\hat{e}_r \cdot \vec{N} = 0$. Le equazioni del moto sono quindi

$$m\left[\left(\ddot{R} - R\omega^2\right)\hat{e}_r + 2\dot{R}\omega\hat{e}_\theta\right] = -kR\hat{e}_r + \hat{N}\,.$$

Proiettando nella direzione radiale abbiamo

$$m\left[\left(\ddot{R} - R\omega^2\right)\hat{e}_r\cdot\hat{e}_r + 2\dot{R}\omega\hat{e}_\theta\cdot\hat{e}_r\right] = -kR\hat{e}_r\cdot\hat{e}_r + \hat{N}\cdot\hat{e}_r$$

cioè

$$m\left(\ddot{R} - R\omega^2\right) = -kR$$

ossia

$$m\ddot{R} + (k - m\omega^2)R = 0\,.$$

La soluzione generali di questa equazione è una oscillazione armonica

$$R(t) = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t$$

con
$$\Omega = \sqrt{\frac{k - m\omega^2}{m}}\,.$$
Imponendo le condizioni iniziali troviamo $A = r/2$ e $B = 0$, quindi
$$\vec{R}(t) = \frac{r}{2}\cos\Omega t\,\hat{e}_r$$
ossia, in coordinate Cartesiane,
$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{r}{2}\cos\Omega t\,\cos\omega t \\ y(t) &= \frac{r}{2}\cos\Omega t\,\sin\omega t \end{aligned}$$
dove abbiamo supposto che la scanalatura sia inizialmente allineata all'asse x.